ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

P. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 60.

DER GANZEN REIHE 365. BAND.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT DREI FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1919.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

S
C.M.

Quart Fd.
9.E.5.
3

WITHDRAWN
from
COLLEGE

Inhalt.

Vierte Folge. Band 60.

Siebzehntes Heft.

		Seite
1.	H. Baerwald. Über die von langsamen positiven Strahlen ausgelösten Elektronen	1
2.	A. Becker. Vergleich der lichtelektrischen und thermischen Elektronenemission	30
3.	Otto Abraham. Zur Akustik des Knalles	55
4.	Reinhold Fürth. Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen. II	77
5.	Ernst Bräuer. Die kathodischen Vorgänge im Bogenstrome	95

Ausgegeben am 25. September 1919.

Achtzehntes Heft.

1.	Emil Beck. Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme	109
2.	Joseph Würschmidt. Elementare Theorie der terrestrischen Refraktion und der atmosphärischen Spiegelungen	149
3.	Robert Fellinger. Über die Dielektrizitätskonstante einiger natürlicher und synthetischer Edelsteine (mit einem Anhang über Bernstein)	181
4.	J. Stark. Der spektrale Nachweis elektrischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome	196

Ausgegeben am 7. Oktober 1919.

Neunzehntes Heft.

Seite

1. Fr. Hoffmann und W. Meißner. Über die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt 201
2. Robert Scheuermann. Über die Gestalt und die Auflösung des fallenden Flüssigkeitsstrahles 233
3. K. Siebel. Über die Änderung der Thermokraft und der elektrischen Leitfähigkeit einer Kalium-Natriumlegierung beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand . . 260
4. F. Krüger. Zur Hydrodynamik der Hiebtöne 279
5. R. H. Weber. Über Gay-Lussac- und Boyle-Temperaturen 291

Ausgegeben am 20. Oktober 1919.

Zwanzigstes Heft.

1. Hermann Senftleben und Elisabeth Benedict. Über die Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen leuchtender Flammen 297
2. Otto Wiener. Ein allgemeiner Satz über die Schutzwirkung von Schirmen gegen Wärmeübertragung 324
3. P. Lenard. Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger. III: Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien, mit Beiträgen von W. Weick und Hans Ferd. Mayer 329
4. G. Borelius. Über Thermokräfte in einem chemisch homogenen Leiterkreise; Bearbeitungs- und Oberflächenerscheinungen . . 381

Ausgegeben am 13. November 1919.

Einundzwanzigstes Heft.

1. F. Paschen. Das Spektrum des Neon 405
2. W. Hahnemann und H. Hecht. Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons 454
3. H. Weyl. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter 481

Ausgegeben am 20. November 1919.

Zweiundzwanzigstes Heft.

Seite

1. Arthur Szarvassi. Über einen für die Quantentheorie wichtigen Satz der analytischen Mechanik 501
2. Alfred Hölzel. Luftelektrisches Potentialgefälle und Gewittervorhersage 521
3. R. Schachenmeier. Kristallgitter, deren Atome durch Gravitationsfelder in stabilen Gleichgewichtslagen gehalten werden 548
4. Hans Joachim. Über die Messung der Dielektrizitätskonstante in der Wheatstoneschen Brücke bei Anwendung hoher Frequenzen 570

Ausgegeben am 27. November 1919.

Dreiundzwanzigstes Heft.

1. W. Wien. Über Messungen der Leuchtdauer der Atome und der Dämpfung der Spektrallinien. I. (Hierzu Tafel I) . . . 597
2. W. Voigt. Strukturtheorie und Kohäsionserscheinungen . . 638
3. K. Försterling. Quantentheorie und Adiabatenhypothese . 673

Ausgegeben am 9. Dezember 1919.

Vierundzwanzigstes Heft.

1. Hans Th. Wolff. Atomkern und α-Strahlung 685
2. F. Krüger und E. Schmidtke. Theorie der Spalttöne. (Hierzu Tafel II) 701
3. E. Schmidtke. Zur Hydrodynamik der Schneidentöne. (Hierzu Tafel III) 715
4. J. Wallot. Der senkrechte Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Schicht räumlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante 734

Namenregister zum Jahrgang 1919 768

Ausgegeben am 19. Dezember 1919.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I. W. Wien.
„ II. F. Krüger u. E. Schmidtke.
„ III. E. Schmidtke.

1919. № 17.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. *Über die von langsamen positiven Strahlen ausgelösten Elektronen;*

von H. Baerwald.

I

1. In einer früheren Arbeit habe ich über Untersuchungen berichtet, welche die von schnellen Kanalstrahlen an festen Körpern ausgelösten Elektronen zum Gegenstand hatten.[1]) Ihr Hauptergebnis läßt sich dahin zusammenfassen, daß für schnelle Kanalstrahlen im wesentlichen dieselben Gesetzmäßigkeiten gelten, die N. R. Campbell[2]) an den von α-Strahlen ausgelösten δ-Strahlen festgestellt hatte. Im einzelnen hatte sich das Folgende gefunden:

a) Die Menge der Sekundärstrahlung ist der Intensität des Primärstrahls proportional.

b) Die Geschwindigkeit der Sekundärstrahlung ist von der Intensität des Primärstrahls unabhängig und nur durch seine Geschwindigkeit bedingt.

Insbesondere ließ sich hier an Hand der Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärstrahlung und durch ihre Analogie mit dem Dopplereffekt nachweisen, daß höhere oder tiefere Grenzgeschwindigkeiten der sekundär ausgelösten Elektronenmengen größeren oder kleineren Geschwindigkeiten des primären auslösenden Strahlteilchens entspricht.

c) Die Existenz der Sekundärstrahlung ließ sich bis zu einer Primärstrahlgeschwindigkeit von 900 Volt herab verfolgen. Auffallend war, daß die sekundären Teilchen auch hier noch Grenzgeschwindigkeiten von 4—6 Volt aufwiesen.

Dies Resultat, welches der mit damaligen Mitteln erreichbaren Genauigkeit entsprach, ist der Hauptanlaß zu den fol-

1) H. Baerwald, Ann. d. Phys. 41. S. 643—669. 1913.

2) Über die einschlägige Literatur bis 1913 siehe die unter Anm. 1 angeführte Arbeit, S. 643.

genden Messungen geworden und wird durch sie ganz wesentlich korrigiert.

d) Bei verschiedenen Metallen wie verschiedenartigen Kanalstrahlen ließen sich die gleichen Gesetzmäßigkeiten wie die unter a) und b) genannten beobachten. Insbesondere war für die Menge der Sekundärstrahlung wesentlich nur die Stromdichte des Primärstrahls, nicht aber die chemische Natur der reagierenden Stoffe als maßgebend zu betrachten.

Eine spätere Arbeit[1]) hatte an diesen Ergebnissen nichts geändert, beschäftigte sich auch mehr mit methodischen Fragen und hatte den Zweck, die Differenz aufzuklären, welche zwischen Herrn Chr. Füchtbauers[2]) Geschwindigkeitsmessungen der Sekundärstrahlung und den meinigen bestanden.

2. Zu diesen Resultaten liegen in der Literatur nur vereinzelte Äußerungen vor. Herr R. Holm stellt in seiner Mitteilung IV „Zur Theorie des Glimmstroms“[3]) den Satz auf, daß „die Fähigkeit eines Ions, Elektronen aus dem Metall zu lösen, fast unabhängig von der Geschwindigkeit des Ions ist, wenn diese nur oberhalb einer gewissen Grenze liegt“ und hält ihn nur durch den oben unter 1a genanten Befund gestützt, daß die Menge der Sekundärstrahlung der Intensität der Primärstrahlung proportional ist. Tatsächlich ist der Satz nicht bloß durch die Mengen, sondern auch durch die Geschwindigkeitsmessungen gestützt. Aber diese ficht Hr. Holm an und meint, die Geschwindigkeitskurven fielen, auf gleiche sekundäre Mengen bezogen, innerhalb der wahrscheinlichen Fehlergrenzen zusammen und bewiesen geradezu die Unabhängigkeit der Sekundärstrahlgeschwindigkeit von der Geschwindigkeit der primären Kanalstrahlen.

Dieser Einwand ist nicht glücklich. Reduktionen auf gleiche Mengen bedeuten Veränderungen in der Größe von Ordinaten. Bei den Geschwindigkeitsfeststellungen handelt es sich aber um Abszissenwerte. Die Genauigkeit der Beobachtungen, soweit sie für deren Beurteilung maßgebend ist, findet

---

1) H. Baerwald, Ann. d. Phys. **42**. S. 1287—1310. 1913.

2) Chr. Füchtbauer, Phys. Zeitschr. **7**. S. 153—157, 748—750. 1906; Ann. d. Phys. **23**. S. 301—307. 1907.

3) R. Holm, Phys. Zeitschr. **16**. S. 26—27. 1915.

der Leser der oben zitierten Arbeit freilich weniger in den Kurvenreproduktionen, wohl aber in Tabelle 2 (p. 651) im Verein mit dem in Nr. 9 und Nr. 10 über die Zuverlässigkeit und Fehlergrenzen der Versuche Gesagten. Aus diesem geht die Unhaltbarkeit der von Hrn. Holm vorgenommenen Umdeutung der Geschwindigkeitsmessungen hervor. Das unter 1b genannte Resultat bleibt vielmehr als das wichtigste der früheren Messungen bestehen.

Berechtigt dagegen ist der Zweifel an der 900 Voltgrenze. Freilich dürfte unterhalb dieser Grenze nicht der Primärstrom zu schwach gewesen sein, um eine meßbare Sekundärstrahlung zu erzeugen, wie Hr. Holm meint, sondern die Sekundärstrahlung mit ihren geringen Geschwindigkeiten war zu schwach, um in der hier versagenden Versuchsanordnung erkennbar zu bleiben. Tatsächlich mehren sich die Schwierigkeiten in der Trennung der Sekundärstrahlung von reflektierter Primärstrahlung mit abnehmender Primärstrahlgeschwindigkeit.

Berechtigt mag auch der Einwand gegen die Feststellung sein, daß die Natur des getroffenen Stoffes ohne Einfluß auf Menge und Geschwindigkeit der Sekundärstrahlung ist. Besonders der Menge; denn wenn die Messungen als solche auch ihre Gültigkeit behalten, so ist es möglich, daß die vorgenommenen Variationen noch nicht den genügenden Umfang hatten, um den Satz in dieser Allgemeingültigkeit hinzustellen. Es kann sein, daß die Alkalimetalle merklich größere sekundäre Elektronenmengen abgeben. Die gefundene Mengenkonstanz könnte sich fernerhin auch dadurch erklären, daß die Natur der Primärstrahlen in Wasserstoff und Luft nicht sehr verschieden ist und daß die sekundären Elektronen hauptsächlich aus den bewegten Strahlteilchen, statt, wie angenommen, aus den getroffenen Metallatomen stammen. Auch hier müßten weitere Versuche, am besten, wenn möglich, mit Alkalikanalstrahlen Aufklärung bringen.

3. In der vor kurzem erschienenen gründlichen Studie: „Über die Bestimmung von Elektronenaustrittsgeschwindigkeiten" geht Hr. Becker[1]) in den speziellen Anwendungen der Theorie und ihrer praktischen Folgerungen neben der Elek-

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 393—473. 1919.

tronenemission bei Erregung durch Wellenstrahlen auch auf die von Kanalstrahlen ausgelösten Elektronen ein. Mit Recht macht Hr. Becker darauf aufmerksam, daß die früheren Anordnungen zur Erzeugung von Kanalstrahlen nicht so klare und einwandfreie Verhältnisse im Beobachtungsraum für die Messung von Austrittsgeschwindigkeiten sekundärer Elektronen ermöglichten, wie man sie für die Beobachtung lichtelektrisch ausgelöster Mengen schaffen konnte. Man wird Hrn. Becker auch beipflichten müssen, wenn er die Methode des homogenen Feldes der Methode der magnetischen Ablenkung gegenüber unter diesen Umständen als die zuverlässigere ansieht.

Hr. Becker findet, daß die im homogenen Felde ermittelte Geschwindigkeitsverteilung der Kritik der Theorie gegenüber im wesentlichen standhält. Auffallend ist Hrn. Becker der „dem begrenzten homogenen Felde im allgemeinen fremde außerordentlich starke Anstieg der beobachteten Kurve im Gebiet kleiner Potentialdifferenzen. Da die Variation der Kanalstrahlengeschwindigkeit — so heißt es a. a. O. S. 472 — den Verlauf nur geringfügig beeinflußt, ist er jedenfalls nicht als Folge einer inhomogenen Strahlung anzusehen".

Hier muß man sich die Tatsachen in Erinnerung bringen: Gerade die unvermeidliche Inhomogenität der Kanalstrahlen ist ihr empfindlichster Mangel bei den besprochenen Messungen. Steigerung der Spannung verschiebt den Schwerpunkt der bewegten Intensität eben nur ganz unwesentlich nach höheren Geschwindigkeiten hin. Die Hauptmenge bleibt auch bei höherer Entladungsspannung, wie der Dopplereffekt beweist, bei den geringen Geschwindigkeiten stehen. Und ebenso ist es bei der Sekundärstrahlung. Ich habe auf diesen Parallelismus ausdrücklich hingewiesen und daraus den Satz gefolgert (a. a. O. S. 659), daß den höheren Geschwindigkeiten eines Primärstrahlteilchens eine höhere Geschwindigkeit des sekundär ausgelösten Elektrons entspricht. Dies Entsprechen ist im Sinne einer Geschwindigkeitsverteilung verstanden, in welcher mit wachsender Primärgeschwindigkeit die höheren Sekundärgeschwindigkeiten prozentual zunehmen. Die geringen Geschwindigkeiten überwiegen in der sekundären Menge bei Kanalstrahlen so übermäßig stark, weil sie im inhomogenen Primärstrahl auch bei hohen Entladungsspannungen überwiegen.

Strahlzerlegung und Ausblendung eines homogenen Bündels müßte bei kommenden Untersuchungen zur Grundbedingung gemacht werden. Soweit sind aber schon die damaligen Messungen gekommen, daß sie das eben hervorgehobene Resultat sicherten. Hrn. Beckers Analyse, welche homogene Primärstrahlung voraussetzt, wird damit die wesentliche Vorbedingung entzogen. Der Voltaeffekt tut hier jedenfalls nichts zur Sache hinzu, er bedeutet höchstens eine Art Nullpunktsverschiebung in den betrachteten funktionalen Zusammenhängen.

4. Die Diskussion zeigt, daß ein Fortschritt im Problem der Sekundärstrahlung von Kanalstrahlen nur von der Schaffung klarerer Versuchsbedingungen zu erwarten ist. Die Unklarheiten des bisherigen entspringen in der Hauptsache zwei Umständen: Der Inhomogenität der Primärstrahlung und den Vakuumverhältnissen im Beobachtungsraum, welche die Wirkung des Feldes nicht unerheblich beeinflussen können.

Am deutlichsten hatten sich Schwächen der Anordnung an der unteren Grenze der Primärstrahlgeschwindigkeiten gezeigt. Wir haben schon in Nr. 1c darauf hingewiesen, daß es auffallend war, wenn sich an der unteren Grenze der Sekundärstrahlauslösung, die damals bei 900 Volt beobachtet war, noch Grenzgeschwindigkeiten von 4—6 Volt an den sekundären Elektronen feststellen ließen. Genau genommen liegt hierin nach allen unseren sonstigen Kenntnissen bereits ein Widerspruch vor. Zu seiner Lösung wurden bereits 1913 Messungen bei langsamen Strahlen geplant, die erst jetzt begonnen werden konnten. Die vorliegende Mitteilung bringt von ihnen eine Reihe vollständig in sich abgeschlossener Versuche.

Diese Versuche zeigen einen deutlichen Zusammenhang mit meinen früheren Messungen und ergänzen sie ebenso, wie die Mitteilungen über die durch langsame Kanalstrahlen in Gasen erzeugte Sekundärstrahlung und Trägerbildung, welche in der Zwischenzeit von Eva v. Bahr und J. Franck[1]) einerseits, andererseits von A. J. Dempster[2]) veröffentlicht worden sind.

1) Eva v. Bahr und J. Franck, Verh. d. D. Phys. Ges. 16. S. 57—68. 1914.

2) A. J. Dempster, Proc. Amer. Nat. Ac. 2. S. 374. 1916.

E. v. Bahr und J. Franck arbeiten mit Platindraht in Rotglut als positiver Stromquelle. Die Wirksamkeit ist durch Aluminiumphosphat erhöht. Genauere Angaben und Untersuchungen über die von glühenden Metalldrähten abgegebenen positiven Teilchen findet man in der Arbeit von W. Hüttemann.[1]) Die Versuchsanordnung ist die gleiche, wie sie J. Franck und G. Hertz zur Ermittelung von Grenzgeschwindigkeiten bei langsamen Elektronen diente: Zylinderkondensator mit einfachem Zwischennetz und Gegenfeldprinzip. Das Hauptresultat: Es besteht keine fest definierte Grenzgeschwindigkeit wie bei Elektronen, vielmehr nähert sie sich mit wachsender Stromstärke der Null und liegt jedenfalls für Luft und Wasserstoff unter 6 Volt.

A. J. Dempster arbeitet mit einer Wehneltkathode und findet, daß zur Sichtbarmachung der langsamen Kanalstrahlen in Wasserstoff 30 Volt genügen, daß aber als untere Grenze für die zur Erregung von Lichtemission nötige Geschwindigkeit eine wesentlich niedrigere, etwa 5 Volt, in Betracht kommt. Nun ist bei der Identifizierung der Geschwindigkeitsgrenze für Lichtemission und für Sekundärstrahlung Vorsicht geboten. Seit van der Bijls[2]) Kritik und Bergen Davis und Gouchers[3]) Arbeiten wissen wir, daß beide nicht zusammenfallen, erstere vielmehr — im Bilde des Bohrschen Modells gesprochen — in der Lockerung des Emissionselektrons aus seiner innersten Bahn, letztere in seiner gänzlichen Entfernung aus dem Atomsystem besteht. Daher sind Dempsters Resultate nicht so klar wie die von E. v. Bahr und J. Franck. Im ganzen aber sagen beide dasselbe aus, nämlich das Bestehen einer außerordentlich geringen Grenzgeschwindigkeit für die Auslösung sekundärer Elektronen in Gasen durch positive Strahlteilchen.

5. Der in meiner früheren Arbeit gefühlte Widerspruch in der Beobachtung der primären Grenzgeschwindigkeit mit den von ihr ausgelösten, noch sehr hohen sekundären Grenzgeschwindigkeiten wird durch diese an Gasen gewonnenen

1) W. Hüttemann, Ann. d. Phys. 52. S. 816—848. 1917.
2) H. J. van der Bijl, Phys. Rev. 10. S. 546—556. 1917.
3) Bergen Davis und F. S. Goucher, Phys. Rev. 10. S. 101 bis 115. 1917.

neueren Versuche ein eklatanter. Ich habe zu seiner Aufklärung die im folgenden beschriebenen Versuche an Metallen im höchsten Vakuum unternommen und denke, daß durch sie die Lücke geschlossen worden ist.

Die Versuchsanordnung war keine einheitliche, ich habe mit vier Varianten gearbeitet, gebe aber die Form, welche die wichtigsten Aussagen lieferte, ausführlich wieder.

a) *Das Versuchsrohr.* — *A: Anode* bestehend aus einem Messingzylinder, Länge 60 mm, Durchmesser 10 mm, einem Innendraht, Länge 100 mm, Durchmesser 4 mm, beide durch

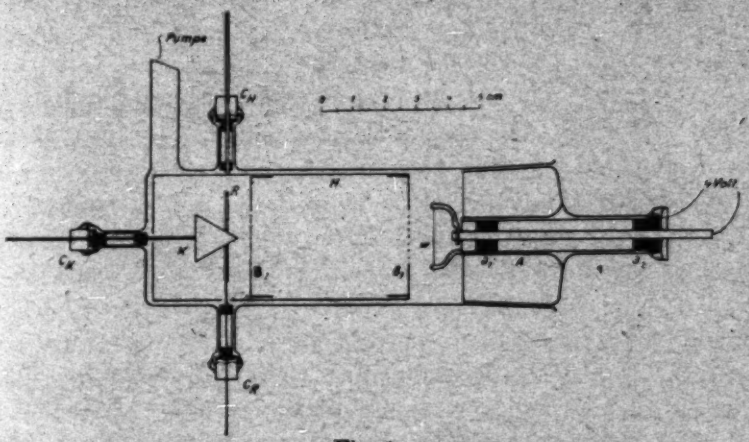


Fig. 1.

zwei Ebonitstücke a_1, a_2 isoliert und vorn mit je einer Kröpfung versehen. Diese Kröpfungen sind geschlitzt und tragen zwischen ihren federnden Backen den Wolframdraht W von 0,1 mm Durchmesser in einer Länge von 18 mm. Zylinder und Kerndraht besorgen die Stromzuführung von einer isoliert aufgestellten 4-Voltbatterie nebst Regulierwiderstand. Die Glühstromstärke beträgt 0,7—1,0 Amp., die glühende Strecke etwa die Hälfte bis zwei Drittel der ganzen Fadenlänge. Der diesen Stromstärken entsprechende Spannungsabfall am Faden beträgt 0,6—0,9 Volt, der auf den glühenden Teil entfallende Spannungsabfall mithin 0,3—0,45 Volt. Die Strahlen sind also praktisch homogen. (Über Versuche, sie absolut homogen zu machen, siehe Nr. 12, Schluß.) Sie bestehen nach W. Hüttemann im wesentlichen aus Wasserstoffatomen und Molekeln.

Bei Steigerung von dunkler Rotglut zur Gelbglut wächst die Emission positiver Ströme enorm, um bei weiterer Steigerung zur Grenze der Weißglut rasch in Elektronenemission umzuschlagen. Die Grenze ist so scharf, daß die Einregulierung sehr leicht ist und jeden Fehler ausschließt. Die Lebensdauer des Drahtes bei Benutzung mit Rotglut ist unbeschränkt. Die durchschnittlich geringe Stärke der positiven Ströme, wie sie hier benutzt wurden, blieb wochenlang ungemindert.

H: Kathode, zugleich schützende Hülle für das Rohrinnere, Länge 80 mm, Durchmesser 40 mm. Sie trägt zwei weite Blenden B_1, B_2 von 16 mm Durchmesser im Abstand von 50 mm, B_1 mit einem gröberen Netz von 1,05—1,10 mm Maschenweite und 0,35 mm Drahtstärke, B_2 mit einem feineren von 0,25—0,30 mm Maschenweite und 0,12 mm Drahtstärke. Hinten ist die Hülle geschlossen und läßt zur Durchführung für K nur ein Loch von 4 mm Durchmesser. Der Abstand $W B_1$ beträgt 6 mm.

K: Kegel: Spitzenwinkel 60°, Seitenlänge bzw. Grundkreisdurchmesser 15 mm.

R: Ring: Durchmesser 26 mm, Breite 1,5 mm, Dicke 1 mm.

C_H C_K C_R: Gekröpfte Zylinder, fest in die drei Glashälse passend, geerdet, die Durchführungsstifte für H, K, R mittels je zweier gut sitzender Bernsteinpfröpfchen tragend. Die Zylinderkröpfe sind mit weißem Siegellack außen an das Glas gekittet und mit Picein innen vergossen, jedoch so, daß die Metallränder der Kröpfe frei bleiben und Überkriechen von Ladung verhindern. Durchmesser der Kröpfung 7 mm. Sämtliche Metallteile bestehen aus Messing und sind hoch poliert. Auch als Quelle der Sekundäremission wurde nur Messing benutzt. Auf die Prüfung anderer Metalle bin ich angesichts des Ergebnisses der früheren Arbeit nicht eingegangen.

b) *Elektrometer:* Quadrantelektrometer, Empfindlichkeit $1150 \frac{\text{mm}}{\text{Volt}}$ bei 2 m Skalenabstand und 100 Volt Nadelladung. Seine Besonderheit ist eine zweiblättrige Nadel. Wird durch sie auch die Empfindlichkeit gemindert, so gewinnt das Instrument dafür in seinen Schwingungseigenschaften Vorzüge, welche für die vorliegenden Zwecke vorteilhaft ins Gewicht

fallen. Wegen Vergrößerung der richtenden Kräfte wird die Schwingungsdauer erheblich verkürzt. Sie betrug hier bei 100 Volt Nadelladung 15—20 sec., die Schwingung selbst ist fast aperiodisch.[1])

c) *Aufstellung*: Elektrometer und Batterie zur Nadelladung sind ganz in Metallkästen eingeschlossen, die Zuführungen liegen in Metallröhren. Nur für die Spiegelbeobachtung bleibt ein durch Schieber beliebig begrenzbares, durch Drahtgeflecht geschütztes Fenster. Das Versuchsrohr liegt direkt auf dem Schutzkasten des Elektrometers auf, so daß für die Zuführung von *R* an das Elektrometer sich jeder Zwischenschutz erübrigt. Ein solcher war nur für die gelegentliche Zuführung von *K* zum Elektrometer nötig. Störungen sind denn auch bei der Vollkommenheit des angewandten Schutzes selbst beim Arbeiten mit der Influenzmaschine nicht vorgekommen und Fälschungen im Sinne des Auftretens von Wellenkräften blieben ausgeschlossen.[2]) Die Angaben des Elektrometers waren regelmäßig, stets reproduzierbar und auch bei variierter Anordnung unter gleichen Bedingungen in gleicher Weise wiederkehrend.

d) *Spannungsquellen:* Für höhere Spannungen, zum Anschluß an frühere Messungen, diente eine Wehrsenmaschine. Scheibendurchmesser 26 cm. Ihre Polarität ist leicht zu prüfen, ihre Wirkung zufriedenstellend konstant. Durch Einschaltung eines Baumwollbandes von veränderlicher Länge zwischen positivem Pol und Heizbatterie gelang es leicht, die Spannung bis auf 20—30 Volt herunter zu regulieren; sie wird am Braunschen Elektrometer, unter 100 Volt durch Schätzung, abgelesen.

Für den niedrigen Bereich diente auch eine 100 Voltbatterie tragbarer Hochspannungsakkumulatoren.

e) *Vakuum*. Das Vakuum entsprach den höchsten Anforderungen; es wurde durch drei hintereinander geschaltete Pumpen aufrecht erhalten, durch eine Gerykölpumpe für das Vorvakuum, eine rotierende Gaedesche Quecksilberpumpe, dahinter durch eine Gaedesche Diffusionspumpe.

---

1) Diese Verbesserung verdanke ich dem Rate des Hrn. E. Schreiber, dessen elektrometrische Untersuchungen demnächst veröffentlicht werden.

2) Vgl. hierüber: O. Devik, Ann. d. Phys. 45. S. 941. 1914; P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Heidelb. Ber. 1918. Abh. 5. Besonders S. 20, 21.

Die Kühlung wurde durch ein Kohlensäureätherbad oder durch ein einfaches Wasserbad von ca. 10° C besorgt. Ein Unterschied in der Wirkung beider ging aus den Beobachtungen nicht hervor. Die Kühlung trennte das Versuchsrohr von Pumpe und MacLeod ab.

Das MacLeod gestattet 10^{-5} mm Hg direkt zu messen, 10^{-6} mm Hg zu schätzen; der Druck war während der Beobachtung in allen Fällen unmeßbar klein. Das Quecksilber blieb in der geschlossenen Kapillare des Manometers nach hartem Anschlag hängen und löste sich erst, wenn es in der Vergleichskapillare 1—2 cm tiefer stand.

II.

6. *Nachweis der Sekundärstrahlung.* In Versuchsanordnung Fig. 1 wird Anode A auf positive Spannung gebracht, Hülle H nebst Kegel K und den Zuführungshülsen C_H, C_K geerdet, dagegen das Elektrometer, die Nadelbatterie mit den Schutzhüllen, dem Ring K und seiner Zuführung auf variable positive Spannung gebracht. Die Ausschläge sind regelmäßig, irgendwelche Störungen im Sinne der von Fr. Mayer[1]) bei Anwendung der Methode des isolierten Ringes im Gasraum[2]) hervorgehobenen waren nicht zu konstatieren. Der Ring lag absolut im Schatten der Blenden. Wir wenden also die Lenardsche Methode hier im hohen Vakuum an, und sie bewährt sich gut.

Versuch 1: An der Anode liegen 1200 Volt.

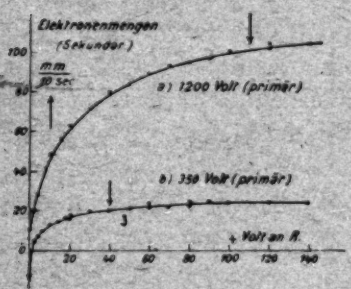


Fig. 2.

Ring und Elektrometer wird von 0—140 Volt positiv geladen. Resultat: Eine Sättigungskurve negativer Elektrizität vom Typ a in Fig. 2. Im Negativen beginnend, Sättigung bei ca. 100—120 Volt.

Maximalordinate ca. 100 $\frac{\text{mm}}{10\text{ sec}}$ (Ausschlag am Elektrometer innerhalb 10 sec).

1) Fr. Mayer, Ann. d. Phys. 45. S. 8, unten. 1914.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. S. 188. 1902.

Versuch 2: An der Anode 350 Volt. Die gleiche Variation am Ring wie in Versuch 1. Resultat: Eine Sättigungskurve vom Typ *b* in Fig. 2, im Positiven beginnend und mit Sättigung bei 30—50 Volt im Negativen endend.[1]) Maximalordinate $25 \frac{\text{mm}}{10 \text{ sec.}}$.

Folgerungen: a) Die Methode ist geeignet, die vom positiven Teilchen ausgelösten Elektronen nachzuweisen.

b) Im Raume der Sekundärstrahlung überlagern sich reflektierte positive und ausgelöste negative Mengen.

c) Der Strahl von 1200 Volt löst größere Mengen Elektronen aus als der Strahl von 350 Volt.

Als noch unsichere Folgerung fügen wir an:

d) Die Elektronenmengen überwiegen die reflektierten primären Mengen bei 1200 Voltstrahlen, dagegen überwiegt die Reflexion positiver Primärstrahlen bei 350 Volt.

Der Schluß, aus dem Punkt 0 Volt am Ring gezogen, ist unsicher, weil er gleiche Reflexionsverhältnisse positiver schnellerer Teilchen und langsamer Elektronen am Ring voraussetzt. Das wird nicht zu erwarten sein. Immerhin hat diese Folgerung einstweilen relativen Wert.

7. *Nachweis der Reflexion.* In der Versuchsanordnung Fig. 1 wird Ring *R* nebst Elektrometer auf konstante niedrige positive Spannung gebracht, Kegel *K* und Hülle *H* ist geerdet. An der Anode *A* liegt variable positive Spannung von 0 bis 100 Volt.

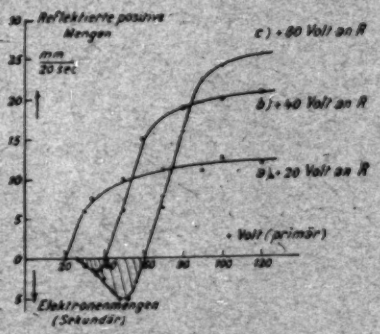


Fig. 3.

Versuch 3: An *R* liegen + 20 Volt. Resultat: An *R* kommen positive Mengen, welche beim Übergang zu geringeren primären Geschwindigkeiten abnehmen und bei Unterschreiten von 20 Volt Null werden. (Kurventyp *a* Fig. 3.)

1) Vgl. die Pfeile in Fig. 2.

Versuch 4: Das Gleiche. An R liegen + 40, bzw. + 60 Volt. Die hier ankommenden positiven Mengen werden bei + 40, bzw. + 60 Volt primär Null, gehen aber hier in negative Mengen über, welche zwischen 20 + 30 Volt verschwinden. (Kurventyp *b* und *c*.)

Das Umbiegen des positiven Anstiegs zur Abszissenachse rührt von stärker werdender Sekundärstrahlung her, die sich unter die Reflexion mischt. Nr. 6, Versuch 2, läßt erwarten, daß die Kurven der Fig. 3 wieder sinken und jenseits 350 Volt Primärgeschwindigkeit ins Negative zurückkehren werden.

Folgerungen: a) Im Bereich von 0—100 Volt primär überwiegen die Mengen reflektierter primärer positiver Strahlteilchen die sekundäre Elektronenemission.

Schlußfolgerung Nr. 6d bestätigt sich.

b) Die primären positiven Mengen können solange an Ring R kommen, als sein Potential kleiner ist als das der Anode. Unterhalb der Grenze kann sich sekundäre Elektronenemission geltend machen, so lange das Potential von R über ihrer unteren Grenze liegt.

c) Die untere Grenze der sekundären Elektronenemission muß in der Nähe von 20 Volt liegen.

8. *Abhängigkeit der sekundären Elektronenmengen von der Intensität und Geschwindigkeit der Primärstrahlung.* Wir legen an Ring R, das Elektrometer und seinen Schutz, konstant 100 Volt positiv, so daß nach Nr. 6, Versuch 1 der Strom der Sekundärstrahlung nach R nahezu gesättigt ist. Die positive Spannung an A wird variiert und von 0—1000 Volt und darüber gesteigert.

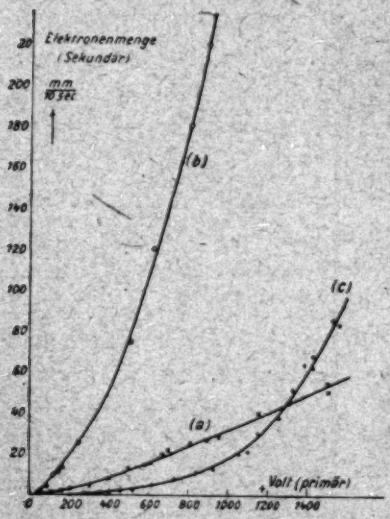


Fig. 4.

Versuch 5: Schwache Glut am Faden, das mittlere Drittel glüht dunkelrot. Wir erhalten Kurve *a*; die Ordinaten sind Ausschläge in Millimetern innerhalb 10 Sek. Nur die letzten Punkte im Kurvenauslauf bei

100 Volt primär sind in 100 Sek. gemessen. Bei der fast absoluten Ruhe des Elektrometers nach Aufheben der Erdung haben Ausschläge von über 0,5 mm Anspruch auf Geltung.

Versuch 6: Dasselbe bei stärkerer Fadenglut: hellrot über die Hälfte der Länge glühend. Es resultiert Kurve *b*. Sie steigt sehr viel rascher an, läuft aber an der gleichen Grenze aus. (20—30 Volt.)

Versuch 7: Zur Kontrolle für das Verhalten des positiven Primärstroms wird statt Kegel *K* und Ring *R* ein Aufhänger mit enger Öffnung in der Vorderwand eingesetzt. Blende B_2 ist ihr entsprechend noch enger gewählt und ohne Netz. Resultat sind positive Sättigungskurven, die für schwache Ströme bei 6—10 Volt, für stärkere bei 20—30 Volt ihre Maximalstärke erreichen und bis zu mehreren Tausend Volt behalten. Dies Resultat war für verschiedene Auffänger mit verschieden weiten Blenden B_1 und B_2, mit und ohne Netze an den Öffnungen, dasselbe. Über die Bildung eines schwachen Maximums bei 20 Volt wegen Überlagerung von Sekundärstrahlung siehe später, Nr. 13.

Versuch 8: Versuchsanordnung Fig. 1 mit Kegel und Ring. Fadenglut nur eben merkbar, das aufzuladende Quadrantenpaar des Elektrometers durch einen auf Glimmer geriebenen Graphitstrichwiderstand mit dem am Gehäuse liegenden Quadrantenpaar ableitend verbunden.

Es entstehen konstante Ausschläge. Die Spannung an *A* wird bis 12000 Volt gesteigert. Dauernder Anstieg der sekundären Elektronenmenge ganz im Sinne von Kurve *b*, Fig. 4.

Versuch 9: Dasselbe bei + 10 Volt an *R* und stärkerer Glut: Das Ergebnis, Kurve *c*, zeigt geringere Ordinaten und früheren Auslauf, schon bei 200, statt bei 20 Volt.

Folgerungen: *a)* Die Menge der sekundär ausgelösten Elektronen entspricht der Intensität des Primärstrahls. Ob genaue Proportionalität beider Mengen vorliegt, läßt sich auf Grund von Versuch 6 und 7 nicht sagen. Dazu wären korrespondierende Sekundärstrahlungs- und Auffängermessungen nötig, und die Versuche 6 und 7 stellen solche nicht dar. Ich habe diese Frage nicht weiter verfolgt, weil sie für die Absicht der vorliegenden Arbeit weniger von Interesse war. Es darf aber ohne weiteres angenommen werden, daß im homogenen Strahl

auf jedes primäre Teilchen die gleiche Anzahl sekundärer entfällt. In unseren Versuchen handelt es sich um verschwindend geringe Raumdichten der Elektrizität. Eine gegenseitige Beeinflussung der Teilchen, welche eine Abweichung von der Proportionalität zur Folge haben könnte, findet sicherlich nicht statt.

b) Die Menge der ausgelösten Elektronen wächst nach Versuch 6 und 7 mit der Geschwindigkeit der Primärstrahlteilchen. Der Anstieg hat den Charakter einer Exponentialfunktion. Ob und wann hier eine Grenze eintritt, eine Art Geschwindigkeits-Sättigungsgrenze, ob ein Optimum wie in Gasen, lassen unsere Versuche nicht erkennen. Das letztere ist nach Versuch 8 jedenfalls sehr zweifelhaft.

c) Versuch 9 bestätigt die Versuche 1 und 2. Bei Feststellung geringster Mengen an der Grenze der Sekundärstrahlung verlangt R so hohe positive Ladung, daß die sekundären negativen Mengen im Sättigungsstrom nach R getrieben werden.

III.

9. *Die Grenzgeschwindigkeit der Primärstrahlen für die Auslösung der sekundären Elektronenemission.* Das Ergebnis der Versuche 5 und 6 führte zu folgendem:

Versuch 10: In der Versuchsanordnung mit Kegel K, Ring R, weiten Blenden B_1 und B_2 (Fig. 1) liegen an R und Elektrometer 140 Volt positiv. Der Heizdraht wird auf hellste Rotglut gebracht, so daß im Sinne der Ausführung in Nr. 5a der positive Primärstrom seine größtmögliche Intensität bekommt. Wir legen den positiven Pol der Influenzmaschine an A und gehen von einigen Hundert Volt bis Null abwärts. In Kurve Fig. 5 bezeichnen die Punkte die Ausschläge in 10 Sek. Bei 50 Volt betrug dieser Ausschlag noch $\frac{1{,}8\text{ mm}}{10\text{ sec}}$, bei 40 Volt $\frac{0{,}9\text{ mm}}{10\text{ sec}}$, bei 30 Volt 0,7 auf 100 Sek.

Ich habe eine ganze Reihe solcher Versuche angestellt, unter 100 Volt auch die Batterie-Hochspannungsakkumulatoren verwandt. Tiefer als im eben beschriebenen und in Fig. 5 dargestellten Versuch bin ich nicht gekommen, und stets verlief die Kurve der negativen Mengen asymptotisch zur

Abszissenachse und in ihrer letzten Beobachtbarkeit abhängig von den Intensitäten.[1]) Eine feste Grenze war nicht feststellbar. Nach dem obigen Versuch würde die Sekundärstrahlung zwischen 20—30 Volt primär beginnen, anfangs sehr geringe Mengen liefernd, die aber nach Art einer Exponentialfunktion äußerst rasch ansteigen. (Nr. 8, Folgerung b.)

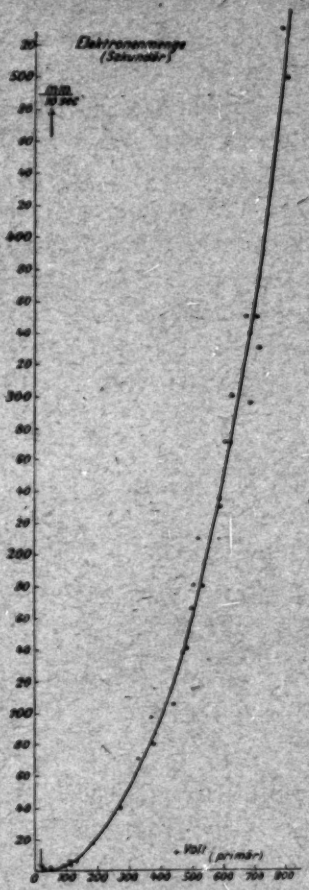


Fig. 5.

10. *Weitere Versuche zur Frage nach der Existenz einer Grenzgeschwindigkeit.* Wie in Nr. 5 bei Beschreibung der Versuchsanordnung gesagt wurde, ist das vor dem Kegel liegende Netz der Blende B_2 ein dichtes feindrähtiges. Die sekundären Elektronen werden also nicht bloß am Kegel K erzeugt, sondern auch — und das war die Absicht beim Entwurf der Anordnung — am Netz B_2. Diese Elektronen breiten sich nach vorne, nach B_1 zu aus, ebenso aber nach hinten, in den Kegelraum hinein. Wir benutzen nun diese Elektronen und bestimmen ihre Emissionsgrenze mit der Gegenfeldmethode.

Versuch 11: An Anode A und Kegel K liegt gemeinsame positive Spannung von 0—100 Volt, an K ist außerdem das Elektrometer mit seinem Schutz gelegt, Hülle H und Ring R sind geerdet. K kann von den Primärstrahlen nicht getroffen werden, bekommt dagegen negative Mengen, sobald an B_2 die Elektroemission beginnt. Es ist dies die Methode, welche J. Franck und G. Hertz für ihre Beobachtungen über Ionisierungsspannungen in Gasen gebrauchten. Es ergeben sich Kurven des Typs der Figg. 4

1) Vgl. über entsprechende Versuche in Gasen: E. v. Bahr und J. Franck, Verh. d. D. Phys. Ges. 16. S. 64—66. 1914.

und 5. Ihr Auslauf liegt zwischen 20 und 30 Volt; ich glaube aber in einigen Fällen auch noch unter 20 Volt Primärgeschwindigkeit negativen Gang beobachtet zu haben, doch verliert sich hier die Bestimmung in der Unsicherheit der Beobachtung.

11. Wir verweisen an dieser Stelle auf das Ergebnis der Versuche 3 und 4, Fig. 3, in Nr. 7. Auch diese beweisen, daß die Emissionsgrenze der sekundären Elektronen entweder im Bereich zwischen 20 und 30 Volt Primärgeschwindigkeit oder nahe unterhalb zu suchen ist.

12. Genau die gleichen Versuche, wie sie in Nr. 10 und 11 (bzw. 7) beschrieben sind, habe ich mit nebenstehender, schematisch skizzierter Versuchsanordnung angestellt.

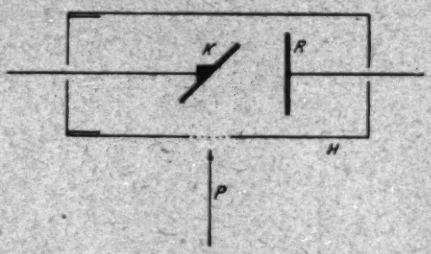


Fig. 6.

Der Primärstrahl P tritt senkrecht zur Achse der Hülle H durch ein mit feindrähtigem, weitmaschigem Netz versehenes Fenster und trifft auf eine unter 45° stehende Platte K. Geschützt steht ihr eine Platte R gegenüber. Wir erhalten genau die gleichen Ergebnisse wie in Nr. 10 und 11 (7), wenn wir mit K, R und H dieselben Manipulationen vornehmen wie dort.

Man erkennt in dieser Anordnung diejenige der früheren Mitteilung (Ann. d. Phys. 41. S. 645. 1913) wieder. Sie ist indessen in ihren Feldverhältnissen nicht so günstig wie die Ringanordnung der Fig. 1.

Die Anordnung hatte noch die Besonderheit, daß die Anode als Spirale, welche den Anodenzylinder mit dem Anodenkerndraht verbindet, gebildet war. Über den Zylinder wurde eine Netzkappe geschoben, welche, wenn der Außenzylinder am positiven Pol der Heizbatterie lag, bewirkte, daß alle positiven Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit austraten.

Irgendwelche merkbaren Unterschiede hat diese Konstruktion gegenüber der Bügelanordnung der Fig. 1 nicht ergeben. Der unter 5a genannte, auf den glühenden Teil des Wolframfadens entfallende Spannungsabfall ist so gering, daß er keine Inhomogenität des Primärstrahls von praktischer Bedeutung mit sich bringt.

13. Wir benutzen endlich die Sekundärstrahlung des dichten Netzes der Blende B_2 in Versuchsanordnung 1, um ein Urteil über die Grenze der Sekundäremission zu gewinnen.

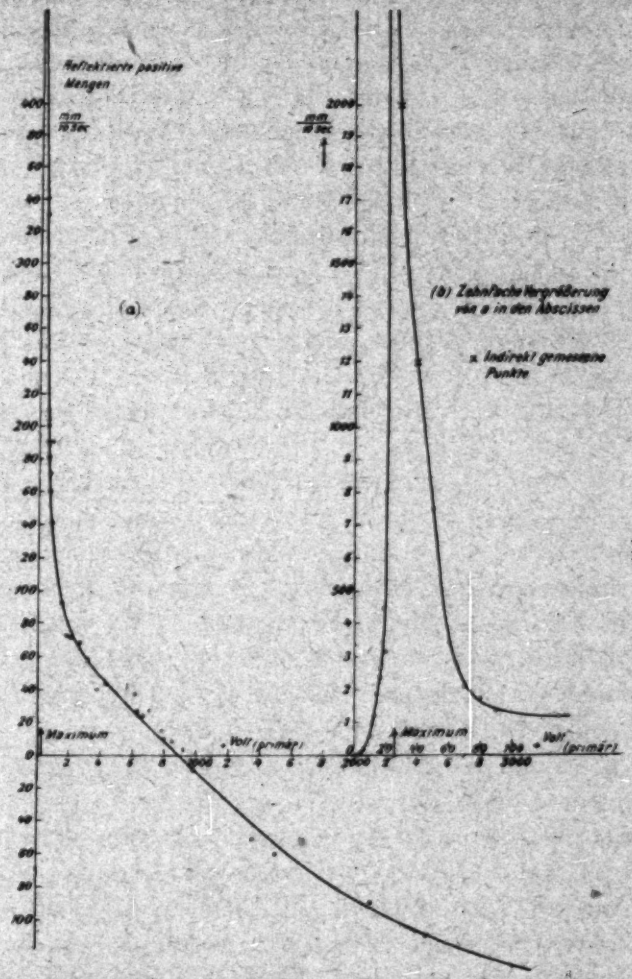


Fig. 7.

Versuch 12: Anode A erhält positive variable Spannung. Hülle H und Ring R ist geerdet, Kegel K über das Elektrometer zur Erde abgeleitet. Wir beobachten den von K abfließenden Strom. Er steigt positiv von Null an mit einer leichten Biegung, die dem kleinen Spannungsabfall am Glühfaden und seinem magnetischen Felde zuzuschreiben sein dürfte,

erreicht zwischen 20 und 30 Volt ein Maximum[1]) und nimmt rasch ab, wird bei 900 Volt Null und dann negativ.

Figg. 7a und 7b (letztere eine 10fache Vergrößerung für den Bereich des Maximums in den Abszissen) zeigt ein Beispiel dieses Versuchs, welches durch eine sehr reichlich spendende Sekundärstrahlungsquelle (Netz B_2) definiert ist. Außerdem ist diese Quelle dem Empfänger des positiven Stroms sehr benachbart. Daher die Größe und Schärfe des Maximums.

Je mehr in den zahlreichen Wiederholungen des Versuchs die Nachbarquellen der Sekundärstrahlung von K entfernt werden, desto mehr flachte das Maximum ab. Ebenso verschwand der Übergang ins Negative, der abfließende Strom blieb nach dem Maximum positiv. Als K allein in der Hülle H, Ring R und Blende B_2 ganz entfernt, B_1 mit wenigen dünnen Drähten bespannt war, blieb im wesentlichen nur noch eine flache Biegung übrig, stets aber an derselben Stelle bei 20 Volt, teils nach oben, teils gegen 10 Volt hin sich etwas verschiebend. Es ist merkwürdig, wie empfindlich der Primärstrom gegenüber diesen sekundären Beimengungen ist. Auch Auffängermessungen zeigen sie. Sie lassen sich nicht umgehen, weil der Primärstrahl zu seiner Beschleunigung einen Feldträger (Blende B_1) braucht, der notwendigerweise zur Quelle sekundärer Elektronen werden muß. Versuchsanordnung Fig. 6 hatte dieselben Ergebnisse wie die eben beschriebenen der Fig. 1.

Versuch 13: Reflexion kann diese Erscheinung nicht erklären. In Versuchsanordnung 1 wurde statt K und R ein Auffänger mit isolierter Rückwand eingesetzt. Die Rückwand nahm den Primärstrom, die Seiten- und Vorderwand die Reflexion auf. Letztere bleibt bei 20 Volt unter 5 Proz. und steigt nicht bei wachsender Primärgeschwindigkeit trotz des Einsetzens der Sekundärstrahlung. Im Auffänger könnte nun

---

1) Die hohen Werte der Ausschläge sind indirekt gemessen, entweder bei geminderter Empfindlichkeit des Elektrometers, oder durch Verwendung des Instrumentes als ein ballistisches, indem die Erdung 10 Sek. nur 1 Sek. gehoben, dann gesenkt und der Maximalausschlag abgelesen wurde. Eichung an bekannten Werten der übrigen Kurve ergab gute Einordnung der Resultate dieser indirekten Messungsart in den Gesamtlauf der Kurve.

zwar mehrfache Reflexion das Bild trüben, immerhin doch nicht so, daß ein bei 20 Volt etwa bestehendes, der Reflexion zuzuschreibendes Maximum ganz verwischt würde. Das Bild, welches wir uns von der Reflexion zu machen haben, ist eben wohl folgerichtig dies: Sie beansprucht einen kleinen, etwa 5 Proz. betragenden Bruchteil des Primärstrahls und nimmt mit wachsender Primärgeschwindigkeit wahrscheinlich noch etwas ab, wie Messungen an Kanalstrahlen von B. Saxén[1]) beweisen. Daß sie nicht ganz verschwindet, zeigen Beobachtungen am Dopplereffekt. Die Beschaffenheit von Flächen spielt keine Rolle und nirgends deutet eine Beobachtung auf eine Diskontinuität im oben beschriebenen Sinne.

Wir folgern also aus unseren Beobachtungen, daß der in Fig 7a u. b gekennzeichnete Abfall im pesitiven Primärstrahlstrom vom Einsatz der aus der Umgebung gelieferten Sekundärstrahlung herrührt. Das zustande kommende Maximum wird umso schärfer, je benachbarter und reichlicher spendend die Emissionsquelle am Auffänger des Primärstroms ist.

Bei so scharfen Maximis wie in Fig. 7a u. b können wir den Einsatz der Sekundärstrahlung an den Ort des Maximums verlegen. Wir erhalten somit aus diesen Versuchen dasselbe Resultat wie aus den früheren: Beginn der Elektronenemission bei einer Primärstrahlgeschwindigkeit von ca. 20 Volt. Einige Fälle deuten auf einen Einsatz zwischen 10 und 20 Volt.

14. Wir finden bei Metallen im hohen Vakuum also eine höhere Grenzgeschwindigkeit als E. v. Bahr und J. Franck in Gasen. Einer Grenze von 6 Volt und weniger stehen hier 20 Volt und weniger, nach den in Nr. 13 beschriebenen Versuchen gegen 10 Volt gegenüber.

Die Versuche 5, 6 und 10 ebenso wie die von E. v. Bahr und J. Franck zeigen aber, daß die Grenzbeobachtung bei positiven Primärströmen eine Empfindlichkeitsfrage ist und daß bei höherer Primärintensität sich diese Grenze nach kleineren Werten zu verschiebt. Da nun E. v. Bahr und J. Franck mit größeren Stromdichten arbeiteten als sie unseren Versuchen zugrunde liegen, so könnte die Differenz hierdurch als aufgeklärt gelten.

1) B. Saxén, Ann. d. Phys. 38. S. 319—354. 1912.

Wahrscheinlich ist es jedenfalls nicht, daß das im festen Körper gebundene Metallatom bei positiven Strömen eine höhere Grenzgeschwindigkeit zur Elektronenemission verlangt als das freie H_2, O_2, N_2-Molekel, wenn, wie wir wissen, bei Kathodenstrahlen ein solcher Unterschied nicht besteht. Das Bestehen einer Bildkraft ist zweifelhaft, und sie würde durch die größere Emissivität des Metallatoms wohl ausgeglichen werden.

Möglich bleibt aber, im Einfluß der Primärstrahlintensität nicht bloß eine Frage der Empfindlichkeit und Beobachtbarkeit, also eine Frage des praktischen Versuchs zu sehen, sondern auch eine solche von theoretischer Bedeutung, die aus dem Bohrschen Atommodell heraus verstanden werden kann. Ein positives Teilchen von 20 Volt Geschwindigkeit mag vielleicht noch nicht imstande sein, ein Elektron aus dem äußersten Atomring zu entfernen. Zwei oder drei Teilchen derselben Geschwindigkeit in derselben Zeit werden es können; denn das 2. und 3. Teilchen findet das Elektron schon gelockert vor, wenn sie mit ihm in Energieaustausch treten.

So verschiebt sich die Grenze mit der Stromdichte; und daß sie nicht mit derselben Schärfe wie bei Kathodenstrahlen einsetzt, wird nicht wundernehmen, wenn man bedenkt, daß es sich gegenüber der einfachen, scharf definierten Wirkung eines Elektrons beim Atom um die Superposition der Wirkung mehrerer und verschieden geladener Elemente in einem komplizierten Bau handelt. Wir werden nicht sehr fehl gehen, wenn wir sagen, daß bei Metallen die Grenze im ganzen wesentlich dieselbe sein wird wie bei Gasen und daß die beobachtete Grenze von 10—20 Volt noch etwas unterschritten werden kann.

IV.

15. *Die Geschwindigkeitsverteilung der sekundär ausgelösten Elektronen und ihre Abhängigkeit von der Primärgeschwindigkeit der auslösenden positiven Strahlteilchen.*

Die Ringanordnung der Fig. 1 ist geeignet, sich ein Urteil über die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronenemission zu bilden. Der Fall des zentralen Feldes ist in ihr mit Annäherung realisiert, weil der Ring gegenüber den bestrahlten Flächen als punktförmig gelten kann. Während bei den licht-

elektrischen Untersuchungen[1]) das Zentrum bestrahlt wird, ist es hier die Hülle, bzw. ein Teil von ihr. Aber diese Umkehrung ändert nichts am Prinzip. Die von der Anode A kommenden Strahlen bestreichen den Teil K (Kegel) rings um den Punkt R (Ring) geerdeter Hüllen. Geben wir R negatives Potential, so werden nur diejenigen Elektronen aus dem Bereich P_1, P_2 nach R gelangen, welche von dem jeweiligen Emissionspunkte P geradlinig verlaufen und eine höhere Geschwindigkeit besitzen als die Bremsung auf dem Wege PR beträgt. Wir haben es also hier unmittelbar mit den äußeren Geschwindigkeiten der Elektronenemission zu tun, nicht bloß mit Relativwerten wie bei den inhomogenen Kanalstrahlen und mit ihren Komponenten wie im homogenen Felde.

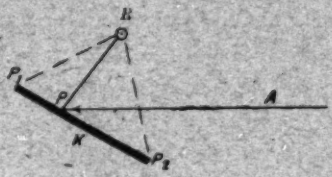


Fig. 8.

Die Umkehrung der Methode des zentralen Feldes liefert nicht die Gesamtmenge der Elektronenemission, aber einen für jede Geschwindigkeit proportionalen Teil von ihr. Anders ausgedrückt: Jeder Punkt P der bestrahlten Hülle wird in zeitlichem Hintereinander jede Geschwindigkeit in derselben Häufigkeit liefern, wie sie in jedem Zeitelement in räumlichem Nebeneinander in der Gesamtmenge enthalten sein werden.

Was von der Kegelfläche K gegenüber R gilt, hat auch für die Netzfläche der Blende B_2 Geltung. Die um das Zentrum R geschlossene Hülle kann beliebige Gestalt haben. Die unsrige setzt sich aus Kegelflächen, Zylinderflächen und Ebenen zusammen; an zwei Stellen wird sie vom Primärstrahl geschnitten, und für die herausgeschnittenen Stücke gilt die obige Überlegung.

Endlich fragt es sich, wie die von K nach R reflektierte positive Primärstrahlmenge wirken wird. Offenbar neutralisiert sie eine gewisse Menge ausgelöster Elektronen, aber in dieser

1) Genaueres siehe hierüber bei A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 393—478. 1919. Dort auch die Literaturdiskussion über die Arbeiten von O. W. Richardson und K. T. Compton, Phil. Mag. 24. S. 575. 1912 und C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 45. S. 961. 1121. 1914.

vom Elektrometer nicht angezeigten Menge werden sich die Geschwindigkeiten genau so verteilen wie in der zur Beobachtung kommenden.

Bezeichnet also in Fig. 9 die Kurve a die Mengenkurve der Elektronenemission, wie sie ohne gleichzeitige Anwesenheit

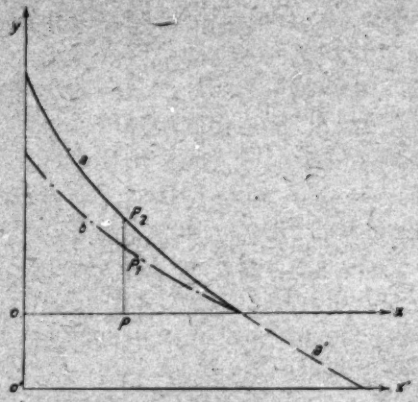


Fig. 9.

positiver Mengen sein würde, so verändert die positive reflektierte Elektrizität die Figur nicht etwa so, daß sie die x'-Achse nach oben rückt, von der Kurve a also das Stück a' wegschneidet und so die größten Geschwindigkeiten allein benachteiligt, sondern so, daß sie von jeder Ordinate ein ihrer Länge proportionales Stück abnimmt und a in b umgestaltet. Bei einem bestimmten Potential — P an R wandert das Elektrometer um so viel langsamer, um wieviel an dieser Stelle die Reflexion aus der Gesamtmenge diejenigen Geschwindigkeiten neutralisiert hat, welche gleich oder größer als P sind. Das Elektrometer gelangt von P (Fig. 9) nicht nach P_2, sondern nur nach P_1.

Nur dadurch kann eine Änderung des Verlaufs der Geschwindigkeitsverteilungen entstehen, daß das steigende negative Potential an R die nach R gerichteten positiven reflektierten Mengen in ihrem Laufe beeinflußt und in wachsendem Maße zu sich herüberzieht. Dadurch kann eine Benachteiligung der höheren Geschwindigkeiten entstehen. Die Größe dieses Fehlers ist nur aus den jeweiligen Versuchsumständen heraus zu beurteilen.

Im ganzen können wir sagen: Die positive Reflexion überlagert wohl die Elektronenemission, stört aber das Bild der Geschwindigkeitsverteilungen nicht. Die prozentual auf die einzelnen Gebiete entfallenden Mengen kommen im Elektrometerausschlag klar zum Ausdruck. Wesentliche Fehler, die durch mehr oder minder indirekte Schlüsse zu eliminieren wären, dürften also in der Geschwindigkeitsmessung nicht enthalten sein.

16. *Versuch 14:* An Anode A (Fig. 1) liegt positive konstante Spannung. Kegel K und Hülle H nebst Durchführungen c_H, c_K ist geerdet. Ring R liegt am Elektrometer und ist mit diesem, wie mit seinem Schutz auf variable negative Spannung gebracht. Beobachtet werden die Ausschläge in 10 Sek. Wir erhalten bei stärkerer Fadenglut Fig. 10b bei 1790, 1080, 500, 420 Volt. Bei 400 Volt ist eben kein Ausschlag bemerkbar, 330 Volt gibt bei 0 Volt an R schon positiven Gang. Hier berühren wir das Resultat von Nr. 6, Versuch 2, der auch mit annähernd derselben Fadenglut arbeitete und bei 0 Volt das Überwiegen der Reflexion anzeigte.

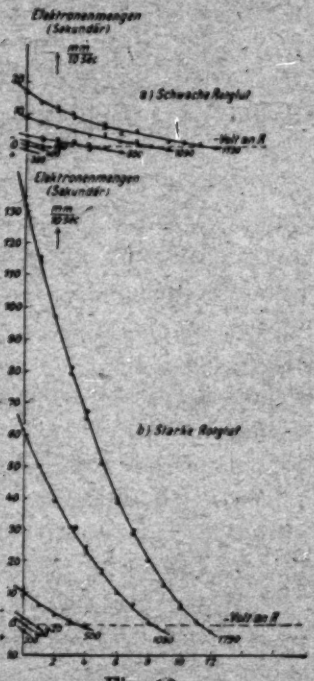


Fig. 10.

Versuch 15: Dasselbe bei schwächerer Glut. Wir erhalten das Bild Fig. 10a. Die Mengen sind geringer, positiver Gang setzt ebenfalls gleich nach 400 Volt primär ein.

Wir folgern aus diesen Versuchen unmittelbar:

a) Größeren Intensitäten des Primärstroms entsprechen größere Mengen ausgelöster Elektronen. Das Resultat von Nr. 8, Folgerung a, wird hierdurch bestätigt.

b) Höheren Primärgeschwindigkeiten entsprechen größere Mengen sekundärer Elektronen. Wir erhalten hier ebenfalls dasselbe Resultat wie in Nr. 8, Folgerung b.

c) Höheren Primärgeschwindigkeiten entspricht ein Zuwachs höherer Sekundärgeschwindigkeiten in der Geschwindigkeitsverteilung der ausgelösten Elektronen. Damit bestätigt sich das Resultat der früheren Arbeit über die Sekundärstrahlung von Kanalstrahlen (Ann. d. Phys. 41. S. 659. Satz 8. 1913 auch im Bereich geringer Geschwindigkeiten positiver Primärstrahlung.

d) Der Schnittpunkt der sekundären Mengenkurven[1]) ist bei starker Primärstrahlung derselbe, wie bei schwacher. Wir schließen auf die Unabhängigkeit der Geschwindigkeit sekundär ausgelöster Elektronen von der Intensität des Primärstrahls und kommen damit auf das entsprechende bei Kanalstrahlen gewonnene Ergebnis (a. a. O. S. 655, Satz 3).

Das gleiche Ergebnis wie das in Fig. 10 wiedergegebene fand sich in zahlreichen Versuchen wieder, auch dann, wenn K und H an positiv von 0—2 Volt variabler Spannung und R an Erde lag. Die Variation der geringen verzögernden Potentiale von H gegen A kommen den Primärgeschwindigkeiten gegenüber nicht in Betracht. Wir können also dasselbe für die Reflexion folgern und weiter sagen:

e) Eine besondere Benachteiligung der höheren sekundären Geschwindigkeiten durch die positiven reflektierten Strahlen im Sinne der Schlußausführung von Nr. 15 ist nicht zu erwarten.

f) Für die hier angewandten Primärstromstärken wird die Sekundäremission unterhalb 430 Volt unmerklich. Der Rest bis zur Grenze von ca. 20 Volt wird durch Reflexion von Primärstrahlung zugedeckt. Aus den Figg. 4 und 5 geht hervor, daß ihre Menge gegenüber der hier bei höherer Primärgeschwindigkeit aufgenommenen verschwindend klein ist. Was die in ihr enthaltenen maximalen Geschwindigkeiten anbetrifft, so dürften sie 0,01 Volt nicht übersteigen.

g) Auf eine Zahlenbeziehung zwischen der Primärgeschwindigkeit und der sekundären Elektronenmenge, wie sie aus

---

1) Genauer wäre die Grenzgeschwindigkeit der Sekundärstrahlung aus dem Übergang der Mengenkurve zur Parallelität mit der Abszissenachse zu entnehmen. Der Schnittpunkt mit der Abszissenachse ist aber schärfer bestimmbar und verändert am Resultat nichts Wesentliches.

Fig. 10 abzulesen ist, sei noch mehr nebenbei hingewiesen. Aus Figg. 4 und 5, Nr. 8 und 9, war zu sehen, daß die Gesamtemission mit der Spannung exponentiell wächst. Hier haben wir es nicht mit der Gesamtemission, sondern nur mit der von K und B_2 nach R hin gerichteten linearen Emission zu tun. Außerdem deckt hier die Reflexion einen Teil dieser Emission bis ca. 400 Volt primär zu. Für diese lineare Emission ist nun aus Fig. 10 eine lineare Proportionalität mit der Primärgeschwindigkeit abzunehmen, wenn man für diese 400 Volt als Nullpunkt ansieht. Tabelle 1 zeigt dies deutlich. Sie gibt in Kolonne 1 die Sekundärmengen J, d. h. die Ordinaten in mm für $V_R = 0$, in Kolonne 2 die Quotienten zweier auf einander folgenden Werte Q_J; Kolonne 3 bringt die Anodenspannungen, abzüglich 400 Volt, Kolonne 4 wieder die Quotienten zweier aufeinander folgender Werte dieser so korrigierten Anodenspannungen Q_V:

Tabelle 1.

Starke Primärintensität				Schwache Primärintensität			
J	Q_J	V	Q_V	J	Q_J	V	Q_V
132	2,13	1390	2,04	17	1,89	1330	1,93
62	6,2	680	6,8	9	3,05	690	3,45
10	5,0	100	5,0	3	2,30	200	2,22
2		20		1,3		90	

Die zweite und vierte Kolonne beider Tabellenhälften beweist die Proportionalität von J mit V. Betont sei aber, daß hiermit eben nur die lineare Emission im bremsenden Felde charakterisiert ist, nicht die gesamte Emission, von der oben die Rede war.

17. Durch Differentiation gewinnen wir aus den Mengenintegralkurven der Fig. 10a und b die Geschwindigkeitsverteilungen. Die folgende Tabelle gibt die einzelnen Geschwindigkeitsmengen in Prozenten der Gesamtmenge wieder, so zwar, wie sie sich auf die Einzelbereiche der Zehntelvoltintervalle verteilen. Die Summe jeder Horizontalreihe ergibt 100.

Tabelle 2.

Volt (primär)	Geschwindigkeitsverteilung in Prozenten der Gesamtmenge												Bemerkung
	0—0,1	0,1—0,2	0,2—0,3	0,3—0,4	0,4—0,5	0,5—0,6	0,6—0,7	0,7—0,8	0,8—0,9	0,9—1,0	1,0—1,1	1,1—1,2	
1790	13,5	12,8	12,0	11,2	10,5	9,0	7,5	6,8	6,1	5,3	3,8	1,5	Starke Primärintensität
1080	19,4	16,1	14,5	12,9	11,3	9,7	8,1	6,4	1,6				
500	40	30	20	10									
420	100												
1730	16,5	13,2	11,8	10,5	9,9	9,2	8,5	6,6	5,3	4,6	3,9		Schwache Primärintensität
1090	19,8	15,4	14,3	12,1	11,0	9,9	8,8	6,6	2,1				
600	37	27	21	15									
490	100												

Man bemerkt in dieser Übersicht, die als Beispiel für viele gelten mag, mit großer Deutlichkeit das Gesetz der Verschiebung der Geschwindigkeiten nach größeren Werten.

a) Mit wachsender Geschwindigkeit der Primärstrahlung nehmen die prozentischen Beträge der niederen Sekundärgeschwindigkeiten ab, die der höheren zu. Stets jedoch bilden sie eine nach höheren Geschwindigkeiten hin fallende Reihe.

b) Dieses Gesetz gilt für alle Primärintensitäten in gleicher Weise.

18. Ebenso wie die obigen Versuche über die zur Auslösung der Elektronenemission notwendige Minimalgeschwindigkeit die Lücke schloß, welche die frühere Arbeit über die Sekundärstrahlung der Kanalstrahlen gelassen hatte, so vervollständigten die Ausführungen der Nrn. 16 und 17 die früher gegebene Geschwindigkeitsverteilung.

Bei Kanalstrahlen von 30000 bis 40000 Volt Beschleunigungsspannung bis herunter zu solchen von rund 1000 Volt hatten sich sekundäre Grenzgeschwindigkeiten in der Geschwindigkeitsverteilung von 22 Volt an abnehmend bis 4 Volt gefunden.

Hier entsprechen den homogenen Primärgeschwindigkeiten

von etwa 1800—400 Volt Grenzgeschwindigkeiten der Sekundäremission von ca. 1,2—0,1 Volt, und wir sahen, daß von ca. 20 Volt die sekundären Grenzgeschwindigkeiten gegen 0 Volt konvergieren müssen (16 f.).

Nehmen wir, um den Bereich nach oben zu ergänzen, noch hinzu, daß bei α-Strahlen Sekundärgeschwindigkeiten von ca. 15 Volt[1]) auftreten, eine Grenzgeschwindigkeit, bei welcher ungefähr auch die Sekundäremission bei Kanalstrahlen stehen bleibt, so haben wir das Gesamtbild der sekundären Emissionsgeschwindigkeiten bei Atomstrahlerregung skizziert.

19. Auf die Bedeutung des Verteilungsgesetzes selbst sei noch zum Schluß kurz hingewiesen. Zum erstenmal ist es für homogene atomistische Strahlung mit Sicherheit aufgestellt. Während die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronenemission bei Erregung durch Wellenstrahlung, wie Ramsauer[2]) nachwies, eine im Großen und Ganzen der Maxwellschen sehr ähnliche ist, sieht sie hier sehr viel anders aus. Legt jene den Gedanken eines einheitlichen Resonanzauslösungsvorganges nahe, dem die Konstitution des Metalles seine Besonderheit, die Inhomogenität in der Verteilung der Geschwindigkeiten, aufdrückt, ohne das Resonanzmaximum zu vernichten, so hat man hier den Eindruck eines in das System der Atome zerstörend eindringenden Geschosses. Das langsamere Strahlteilchen dringt nicht tief in die Elektronensphäre des Atoms ein; nur der äußerste Ring — im Sinne des Bohrschen Modells gesprochen — wird berührt oder durchsetzt. Es liefert die langsamen sekundären Elektronen. Je schneller das Primärteilchen, desto größer die Häufigkeit der Fälle, in denen aus den nächst inneren Ringen Elektronen hinausgeschleudert werden, wobei es nicht fehlen kann, daß die äußersten Ringe auch in diesen Fällen zur Elektronenspende mit beitragen, und zwar numerisch mehr als die inneren, wie die Geschwindigkeitsverteilung beweist.

---

1) N. R. Campbell, Jahrb. d. Rad. u. Elektronik. 9. S. 419—438. 1912. Man bemerke in diesem Bericht die große Ähnlichkeit der δ-Strahlen mit der Sekundäremission bei schnellen und langsamen positiven Strahlen.

2) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 45. S. 1121. 1914.

20. Es ist nicht schwer, sich in diesem Sinne Bilder des Vorganges zurecht zu machen. Ihre Ausgestaltung muß der Zukunft überlassen bleiben. Hier wollen wir nur betonen, wieviel feiner die Lichtwelle in den Atommechanismus eingreift, wieviel gröber das bewegte Atom. Wollen wir beide als Sonden bei der Erforschung des Atominnern benutzen, so dürfte die Lichtwelle dem bewegten Atom überlegen sein.

Aber wenn es auch so ist, daß der α-Strahl wohl das neuere Atombild begründete, die Röntgenwelle aber seine feinere Struktur und den Anschluß an das periodische System ausarbeitete, diese eine feinere Analyse lieferte als jene, so behalten die Probleme des gröberen Eingriffs in den Bau des Atoms ihren Wert. Wir dürfen hoffen, mit der hier beschriebenen Methode der homogenen langsamen Trägerstrahlung die Vorgänge der Absorption in Gasen und Dämpfen, die freien Weglängen und ihre Variation mit der Geschwindigkeit u. a. m., und ferner die Vorgänge bei der Phosphorescenzerregung untersuchen zu können, von welch letzterer wir durch die Arbeiten Lenards[1]) und Rüchardts[2]) wissen, daß es in Gebieten niedriger Primärgeschwindigkeit bei Kathoden- und Trägerstrahlen zwei verschiedene, durch eine scharfe Geschwindigkeitsgrenze getrennte Erregungsarten gibt.

Nicht weniger nahe liegt der Vergleich der Erregung der Elektronenemission aus Metallen durch langsame Träger mit der durch langsame Kathodenstrahlen. Nach unseren heutigen Kenntnissen scheint bei Metallen im Vakuum derselbe Unterschied obzuwalten, wie in Gasen: Bei Kathodenstrahlen feste Grenzen, bei Trägerstrahlen Verwaschenheit und Abhängigkeit von der Primärintensität. Die in Nr. 13 beschriebene Methode des konzentrischen Feldes dürfte es ermöglichen, mit der Sicherstellung dieser Frage auch die nach der Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärstrahlung aus Metallen bei Erregung durch langsame Kathodenstrahlen und ihrem Verschiebungsgesetz bei Variation der Primärgeschwindigkeit endgültig zu beantworten.[3])

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. S. 449—490. 1903.

2) E. Rüchardt, Ann. d. Phys. 48. S. 838—876. 1915.

3) Eine Zusammenfassung des bisher hierüber Bekannten siehe bei P. Lenard, „Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten". Spez. Teil. V. D. 2. e. S. 160.

Ein Teil der Apparate ist aus Mitteln der Fuhrschen Stiftung zu Darmstadt angeschafft, und ich benutze gern die Gelegenheit, dem Senate der Technischen Hochschule als Kuratorium für die Bewilligung meinen Dank an dieser Stelle zum Ausdruck zu bringen.

Darmstadt, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule,
30. April 1919.

(Eingegangen 7. Mai 1919.)

2. *Vergleich der lichtelektrischen und thermischen Elektronenemission;*
von A. Becker.

Versucht man die bisher meist für sich getrennt betrachteten verschiedenen Erscheinungsgebiete der Elektronenemission zusammenfassend zu überblicken, so drängt sich notwendig die Wahrscheinlichkeit auf, daß die verschiedenen Formen der Energietransformation, die uns in der Auslösung von Elektronen aus der Materie entgegentritt, einen gewissen durch den Atombau bedingten Grundmechanismus gemeinsam haben, wenn auch ein Einfluß der besonderen erregenden Energieform auf das Endergebnis nicht von vornherein ausgeschlossen erscheint.

Die vorliegende Arbeit verfolgt diese Frage im Einzelnen auf dem Wege eines quantitativen Vergleichs der beiden bisher am eingehendsten untersuchten Fälle der lichtelektrischen und thermischen Elektronenemission. Sie sucht zu diesem Zweck die gesamte quantitativ als gesichert anzusehende hierhergehörige Erfahrung heranzuziehen. Vorzugsweise kommt in dieser Hinsicht neben der Kenntnis der die *Gesamtmenge* der ausgelösten Elektronen betreffenden Zusammenhänge die Kenntnis der *Absolutwerte* und der *relativen Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten* in Betracht. Besondere Bedeutung kommt dabei auch der wichtigen Frage nach der *Abtrennungs-* bzw. *Austrittsarbeit*[1]) zu.

Ältere Versuche eines solchen Vergleichs liegen vornehmlich von Hrn. Richardson[2]) und von Hrn. W. Wilson[3]) vor.[4]) Dieselben beschränken sich in der Hauptsache auf die Betrachtung der Gesamtmenge der in beiden Fällen emittierten Elektronen.

---

1) Über die Präzisierung dieser Begriffe siehe P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten. Heidelberg 1918, bei C. Winter. S. 172.

2) O. W. Richardson, Phys. Rev. (1) **34**. p. 146. 1912; Phil. Mag. (6) **23**. S. 594; **24**. S. 570. 1912.

3) W. Wilson, Ann. d. Phys. **42**. S. 1154. 1913.

4) Vgl. auch P. Lenard, a. a. O. Abschnitt V u. Note 390 u. 501.

Hr. Richardson, der das Problem nach mehreren Richtungen verfolgt, kommt zu dem Ergebnis, daß zwischen beiden Erscheinungen zwar eine enge Beziehung bestehe, daß aber die naheliegende Auffassung, nach der die glühelektrische Wirkung lediglich die Folge lichtelektrischer Wirkung sei, durch die Erfahrung nicht gestützt werde. Hr. Wilson sieht demgegenüber eine Stütze für diese Vorstellung darin, daß er auf der Grundlage der Planckschen Quantenhypothese für den Temperaturgang der ausgelösten Gesamtelektronenmenge einen der Richardsonschen Formel gleichartigen Ausdruck herleiten konnte.

Berücksichtigt man die erhebliche, im Einzelnen noch nicht verständlich gewordene Beeinträchtigung der Eindeutigkeit der quantitativen Aussagen der Beobachtung durch fremde Faktoren (wie insbesondere Gasgehalt der emittierenden Metalle), so könnte der Versuch eines allgemeinen Einblicks in den Mechanismus der Elektronenauslösung wenig erfolgversprechend scheinen. Demgegenüber ist aber zu bemerken, daß eine solche Beeinflussung sich auf beiden hier zu betrachtenden Gebieten in ganz analoger Weise feststellen läßt und daß sie sich vorwiegend, wenn nicht ausschließlich, auf den Absolutwert der austretenden Elektronenzahl und nicht auf die Austrittsgeschwindigkeiten zu beziehen scheint.[1]) Sofern wir vornehmlich die letzteren der Betrachtung unterwerfen, dürfte sonach der beabsichtigte Vergleich eine gesicherte Grundlage besitzen; in seinen auf eine *nahe Verwandschaft der beiden Erscheinungen* hinweisenden Ergebnissen dürfte er überdies in jener Analogie der fremden Einflüsse eine Stütze finden.

Eine weitere Prüfung bzw. Vervollständigung der auf diesem Wege gewonnenen Kenntnis wird man von der vergleichsweisen Heranziehung insbesondere derjenigen Erregungsarten erwarten können, welche von den genannten Einflüssen nachweislich frei sind.

A. Die glühelektrische Wirkung.

Für das Verständnis dieses Erscheinungsgebiets ist bis jetzt die Richardsonsche Theorie[2]) grundlegend geblieben. Sie identifiziert die austretenden Elektronen mit den im Innern der

1) Eine Erklärung hierfür siehe A4 und B II.

2) O. W. Richardson, Cambr. Phil. Soc. 11. S. 286. 1901; Phil. Trans. A. 201. S. 497. 1903.

Metalle anzunehmenden und daselbst auch für die Elektrizitätsleitung maßgebenden *freien* Elektronen, denen nach dem Maxwellschen Gesetz verteilte gastheoretische Geschwindigkeiten zukommen sollen. Die Möglichkeit ihres Austritts aus der Metalloberfläche ist an die Bedingung geknüpft, daß ihre kinetische Energie mindestens die Größe einer gegen eine vorhandene Oberflächenkraft zu leistenden Austrittsarbeit erreiche.

1. Gilt für die linearen Geschwindigkeiten der freien Elektronen im Metallinnern das Maxwellsche Verteilungsgesetz, so ist die Relativzahl der im Geschwindigkeitsbereich v bis $v + dv$ liegenden Elektronen

$$P(v)\,dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{v_w^3}\cdot v^2\cdot e^{-v^2/v_w^2}\cdot dv,$$

wo v_w die wahrscheinlichste Geschwindigkeit derselben bezeichnet.

2. Wir betrachten nun zunächst diejenige *äußere Verteilung* der Elektronengeschwindigkeiten, die *bei fehlender Oberflächenkraft* zu erwarten wäre. Die hierauf bezüglichen Größen seien in Übereinstimmung mit einer früheren entsprechenden Untersuchung[1]) mit dem Index i bezeichnet, da sie im danach zu betrachtenden Fall einer vorhandenen Oberflächenkraft die Bedeutung von „inneren" Werten annehmen.

a) Im Winkelbereich α bis $\alpha + d\alpha$ (gegen die Oberflächennormale) tritt aus der Flächeneinheit in der Sekunde die Elektronenmenge

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{N}{v_w^3}\cdot v^3\cdot e^{-v^2/v_w^2}\cdot dv\cdot \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot d\alpha$$

aus, was einer räumlichen Elektronendichte

$$\varrho_i = \frac{N}{\pi^{3/2}}\,\frac{1}{v_w^3}\cdot v^3\cdot e^{-v^2/v_w^2}\cdot dv\cdot\cos\alpha$$

entspricht, wenn N die Gesamtzahl aller freien Elektronen der Volumeneinheit des Metallinneren angibt. Es liegt hier also eine Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz vor, die in der vorgenannten früheren Untersuchung allgemein eingehend verfolgt worden ist.

Die Relativzahl der im Ganzen in der Sekunde austretenden Elektronen des betrachteten Geschwindigkeitsbereichs ist also

$$P(v)\,dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{v_w^3}\cdot v^3\cdot e^{-v^2/v_w^2}\cdot dv.$$

---

1) A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 393. 1919.

b) Für letztere ergibt sich nach Einführung der *Voltgeschwindigkeit*

$$P(V_i)\,dV_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{v_w^3} \cdot V_i \cdot e^{-\frac{2\,e/m\,V_i}{v_w^2}}\,dV_i,$$

oder auch

$$P(\bar{V}_i)\,d\bar{V}_i = \frac{\sqrt{\frac{e}{m}V_{wi}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \bar{V}_i \cdot e^{-\bar{V}_i}\,d\bar{V}_i,$$

wenn alle Voltgeschwindigkeiten mit dem wahrscheinlichsten Wert als Einheit gemessen werden, also

$$\bar{V}_i = \frac{V_i}{V_{wi}}$$

gesetzt wird.[1])

c) *Im zentralen elektrischen Feld* ist die bei der verzögernden Potentialdifferenz $\bar{V}$ meßbare Elektronenmenge der emittierenden Flächeneinheit in der Sekunde

$$z_i = N\int_{\bar{V}}^{\infty} P(\bar{V}_i)\,d\bar{V}_i = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}V_{wi}} \cdot \int_{\bar{V}}^{\infty} \bar{V}_i e^{-\bar{V}_i}\,d\bar{V}_i$$

$$= A \cdot (\bar{V}+1) \cdot e^{-\bar{V}},$$

wo die konstanten Größen im Faktor A zusammengefaßt sind. Diese Beziehung scheint bisher noch nicht experimentell geprüft worden zu sein. Theoretisch ist sie zuerst von Hrn. Richardson[2]) durch Spezialisierung allgemeinerer, auf ein zylindrisches Feld bezüglicher Entwicklungen gewonnen worden; später findet sie sich noch, ohne Ableitung, bei Hrn. Schottky.[3])

---

1) Es ist hier zu beachten, daß

$$V_{wi} = \frac{v_w^2}{2\,e/m}$$

ist, daß die wahrscheinlichste Voltgeschwindigkeit der *austretenden* Elektronen also durch diese Beziehung mit der wahrscheinlichsten Lineargeschwindigkeit v_w der gastheoretisch bewegten Elektronen des *Metallinneren* verknüpft ist, während sie mit der nach dem Austritt vorhandenen wahrscheinlichsten Lineargeschwindigkeit v_{wi} gemäß

$$V_{wi} = \frac{v_{wi}^2}{3\,e/m}$$

zusammenhängt.

2) O. W. Richardson, Phil. Mag. (6) 17. S. 813. 1909.

3) W. Schottky, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 16. S. 482. 1914.

Mißt man z_i mit der maximalen Menge A (für $\bar{V}=0$) als Einheit, so wird

$$\bar{z}_i = (\bar{V}+1)\cdot e^{-\bar{V}}.$$

d) *Im homogenen elektrischen Feld* findet sich die bei der verzögernden Potentialdifferenz $\bar{V}$ meßbare Elektronenmenge — wieder bezogen auf die emittierende Flächeneinheit und die Sekunde — im Falle der Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz allgemein zu

$$y_i = z_i - N\cdot\bar{V}\int_{\bar{V}}^{\infty}\frac{P(\bar{V}_i)}{\bar{V}_i}\,d\bar{V}_i,\ ^{1})$$

woraus sich im gegenwärtigen Fall ergibt

$$y_i = A\cdot e^{-\bar{V}},$$

was mit Hrn. Richardsons bekanntem Ausdruck übereinstimmt.[2])

3. Es werde jetzt das *Vorhandensein einer Oberflächenkraft* angenommen. Würde deren Richtung mit der Elektronenbahn beim Austritt zusammenfallen, so würde die Austrittsgeschwindigkeit Null im Gegensatz zur Erfahrung nicht mehr mit der Menge Null verknüpft sein. Es ist daher mit Hrn. Richardson eine *flächennormale Kraft* anzunehmen. Die Austrittsarbeit werde, in Volt gemessen, mit Π, die nach Überwindung der Oberflächenkraft vorhandene „äußere" Geschwindigkeit und Menge der Elektronen mit dem Index a bezeichnet.

a) Für die *relative Verteilung der äußeren Voltgeschwindigkeiten* gilt allgemein im Falle der Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz

$$P(V_a)\,dV_a = P(V_i)\,dV_i\cdot\left\{1-\frac{\Pi}{V_i}\right\}.\ ^{3})$$

Hieraus folgt, daß im gegenwärtigen Fall $V_{wa}=V_{wi}$, d. h. die äußere und innere wahrscheinlichste Voltgeschwindigkeit den gleichen Wert hat und daß für die äußere Verteilung der Voltgeschwindigkeiten

---

1) Vgl. A. Becker, a. a. O., Gleichung (20a).

2) Derselbe liefert $y_i/A = 0{,}368$ für $\bar{V}=1$, was einen einfachen Weg anzeigt, die wahrscheinlichste Voltgeschwindigkeit aus einwandfreien Homogenfeldmessungen abzuleiten.

3) Vgl. A. Becker, a. a. O., Gleichung (42b).

$$P(\bar{V}_a)\,d\bar{V}_a = \frac{\sqrt{\frac{e}{m}V_{wa}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\bar{\Pi}} \cdot \bar{V}_a \cdot e^{-\bar{V}_a} d\bar{V}_a$$

wird, wenn alle Voltgeschwindigkeiten mit dem wahrscheinlichsten äußeren Wert als Einheit gemessen werden, also

$$\bar{V}_a = \frac{V_a}{V_{wa}} \quad \text{und} \quad \bar{\Pi} = \frac{\Pi}{V_{wa}}$$

gesetzt wird.

Der Vergleich dieses Ausdrucks mit dem für die inneren Voltgeschwindigkeiten angegebenen zeigt, daß beide sich nur durch den konstanten Faktor $e^{-\bar{\Pi}}$ voneinander unterscheiden, und daß daher der relative Verlauf der Verteilungskurve vom Vorhandensein einer Austrittsarbeit völlig unbeeinflußt bleibt.

b) Für die *äußere Raumdichte* der Elektronen ergibt sich nach vorstehendem sofort

$$\varrho_a = N \frac{\sqrt{\frac{e}{m}V_{wa}}}{\pi^{3/2} \cdot \sqrt{2}} \cdot e^{-\bar{\Pi}} \cdot \bar{V}_a \cdot e^{-\bar{V}_a} \cdot d\bar{V}_a \cdot \cos\alpha',$$

wenn der Neigungswinkel gegen die Flächennormale im Außenraum mit α' bezeichnet wird.

Es ist also auch der Gang der Raumdichte sowohl mit V als mit dem Winkel von der Oberflächenkraft unabhängig.

c) Im *zentralen elektrischen Feld* ist die bei der verzögernden Potentialdifferenz $\bar{\bar{V}}$ meßbare Elektronenmenge

$$z_a = N \cdot \int_{\bar{\bar{V}}}^{\infty} P(\bar{V}_a)\,d\bar{V}_a = A \cdot e^{-\bar{\Pi}} \cdot (\bar{\bar{V}} + 1) \cdot e^{-\bar{\bar{V}}},$$

oder, wenn z_a mit der maximalen Menge (für $\bar{\bar{V}} = 0$) als Einheit gemessen wird,

$$\bar{z}_a = (\bar{\bar{V}} + 1) \cdot e^{-\bar{\bar{V}}}.$$

Dieser Ausdruck ist mit dem für fehlende Oberflächenkraft gültigen (2c) formal identisch.

d) Auch im *homogenen elektrischen Feld* tritt diese Identität auf.

e) Die *Gesamtmenge* der von der Flächeneinheit in der Zeiteinheit emittierten Elektronen ist

$$n = A \cdot e^{-\bar{\Pi}} = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}V_{wi}} \cdot e^{-\frac{\Pi}{V_{wi}}};$$

sie allein hängt also von der Austrittsarbeit ab. Setzen wir $V_{wi} = V_{wi}^1 \cdot \Theta$, wo V_{wi}^1 die wahrscheinlichste Voltgeschwindigkeit bei der absoluten Temperatur $\Theta = 1$ bezeichnet[1]), so wird

$$n = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{e}{m} V_{wi}^1} \cdot \sqrt{\Theta} \cdot e^{-\frac{H}{V_{wi}^1 \Theta}},$$

was mit dem zuerst von Hrn. Richardson hergeleiteten entsprechenden Ausdruck für den Temperaturgang inhaltlich identisch ist.[2])

f) Führt man die Temperatur auch in den Ausdruck für die Verteilung der Voltgeschwindigkeiten ein, so wird

$$P(\bar{V})_\Theta \, d\bar{V} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{e}{m} V_{wi}^1} \cdot \sqrt{\Theta} \cdot \bar{V} \cdot e^{-\bar{V}} \, d\bar{V}.$$

Alle Verteilungskurven der relativen Voltgeschwindigkeiten sind also in ihrem relativen Verlauf identisch, und die Absolutwerte ihrer Ordinaten stehen im Verhältnis der Quadratwurzeln der absoluten Temperaturen.

4. Zusammenfassend ergibt sich aus den vorstehenden Betrachtungen der Schluß:

Wenn die Richardsonsche Auffassung vom Mechanismus des Glüheffekts zutrifft, so kann das Vorhandensein und die Größe einer Austrittsarbeit experimentell nur aus dem Absolutwert der emittierten Elektronenzahl und seinem Gang mit der Temperatur ermittelt werden. Der Absolutwert und die Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten sind dagegen ebenso wie der Gang der äußeren Raumdichte der Elektronen mit dem Emissionswinkel vom Vorhandensein einer flächennormalen Oberflächenkraft vollkommen unabhängig.

Wir legen auf die Feststellung dieser an sich naheliegenden Tatsache hier deshalb Wert, weil sie bisher in der Literatur nicht deutlich hervorgetreten ist, was mehrfach zu irrtümlichen Auffassungen bezüglich der Austrittsarbeit geführt hat.

Man erkennt aus dem Vorstehenden auch leicht, daß alle fremden Faktoren, die einen Einfluß auf die Konzentration der freien Elektronen oder die Größe der Austrittsarbeit zu gewinnen vermögen, an einer Veränderung der emittierten Absolutmenge

1) Ihr Wert beträgt $V_{wi}^1 = 0{,}86 \cdot 10^{-4}$ Volt.

2) Aus der Beobachtung findet sich mit Hilfe dieser Gleichung für Platin H zu etwa 5,7 Volt.

der Elektronen und ihres Temperaturgangs erkennbar werden müssen, während die den Geschwindigkeiten zugewandte Beobachtung ungestört bleibt, wie wir bereits in der Einleitung bemerkt haben.

Zu späterem Vergleich sei der relative Verlauf der Zentral- und Homogenfeldkurve und der direkten Verteilungskurve der Voltgeschwindigkeiten in beistehender Fig. 1 (Kurven 1—3) wiedergegeben.

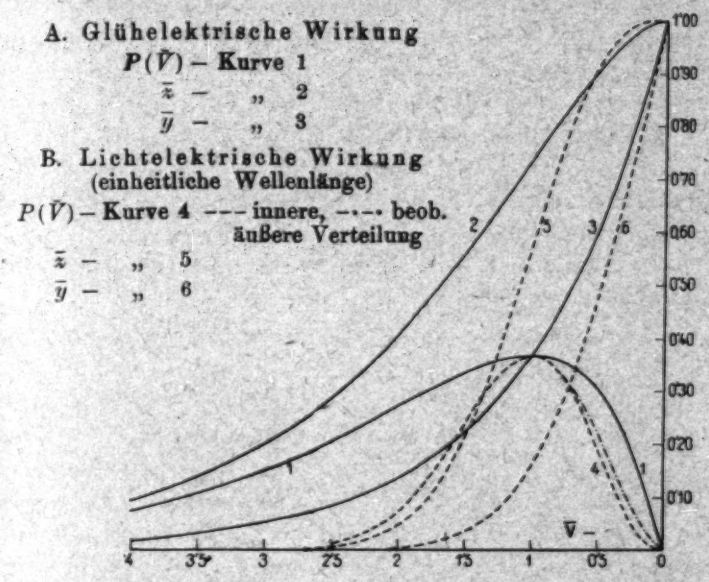


Fig. 1.

B. Die lichtelektrische Wirkung.

I. Erregung mit einheitlicher Wellenlänge.

1. *Geschwindigkeitsverteilung.* — Nach den Untersuchungen der Herren Richardson u. Compton[1]) und des Hrn. Ramsauer[2]) besteht bei der normalen lichtelektrischen Wirkung eine Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Elektronen von ähnlichem Charakter wie bei der glühelektrischen Wirkung. Die Verteilungskurve steigt mit von Null an wachsender Geschwindig-

1) O. W. Richardson u. K. T. Compton, Phil. Mag. **24.** S. 575. 1912.

2) C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **45.** S. 1121. 1914 und Heidelberger Akad. d. Wiss. A. **20.** 1914.

keit vom Mengenwert Null bis zu einem Maximum und fällt dann, asymptotisch sich wieder dem Nullwert nähernd.

Der relative Verlauf der Verteilungskurven zeigt sich bei allen untersuchten Metallen innerhalb der Versuchsgenauigkeit unabhängig sowohl von der Schwingungszahl des erregenden Lichts als von der Natur des emittierenden Metalls[1]; er ist danach allgemein als Charakteristikum für den normalen Photoeffekt zu betrachten. Hierdurch wird auch auf diesem Gebiet eine Unabhängigkeit von fremden Einflüssen angedeutet.

Wie in einer vorhergehenden Arbeit[2]) gezeigt worden ist, läßt sich diese Verteilung durch die Annahme beschreiben, daß die *Voltgeschwindigkeiten* der erregten Elektronen vor ihrem Austritt aus der Materialoberfläche nach dem Maxwellschen Gesetze verteilt seien und daß beim Austritt eine Arbeit von der Größenordnung weniger Zehntel Volt gegen eine vorhandene Oberflächenkraft zu leisten sei.

a) *Die Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten* entspricht danach dem Ausdruck

$$P(\bar{V}_i)\,d\bar{V}_i = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \bar{V}_i^2 \cdot e^{-\bar{V}_i^2} \cdot d\bar{V}_i ,$$

wo $\bar{V}_i = \frac{V_i}{V_{wi}}$ gesetzt ist.

b) Für die beobachtbare *Verteilung der äußeren Voltgeschwindigkeiten* gilt dementsprechend, wenn auch hier Ausstrahlung nach dem Cosinusgesetz angenommen wird,

$$P(\bar{V}_a)\,d\bar{V}_a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\bar{V}_a + \bar{\Pi}}{(1+\bar{\Pi})^3} \cdot \bar{V}_a \cdot \left\{1 + \frac{\bar{\Pi}}{2}\right\} \cdot e^{-\left(\frac{\bar{V}_a + \bar{\Pi}}{1+\bar{\Pi}}\right)^2 \frac{2+\bar{\Pi}}{2}} \cdot d\bar{V}_a .$$

c) *Die Gleichung der* experimentell festgestellten *Zentralfeldkurve* nimmt dann die Form an

$$\bar{z}_a = \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\bar{V}\sqrt{1+\bar{\Pi}/2}}{1+\bar{\Pi}} \cdot e^{-\left(\frac{\bar{V}+\bar{\Pi}}{1+\bar{\Pi}}\right)^2 \frac{2+\bar{\Pi}}{2}} - \Phi\left\{\frac{\bar{V}+\bar{\Pi}}{1+\bar{\Pi}} \cdot \sqrt{1+\bar{\Pi}/2}\right\}}{1 - \Phi\left\{\frac{\bar{\Pi}}{1+\bar{\Pi}} \cdot \sqrt{1+\bar{\Pi}/2}\right\}},$$

1) Soweit dies Ergebnis aus den Beobachtungen der Herren Richardson u. Compton folgt, ist es aus diesen zuerst in einer vorhergehenden Untersuchung (A. Becker, Ann. d. Phys. 58. S. 461. 1919) abgeleitet worden.

3) A. Becker, a. a. O. S. 454.

wo die Funktion Φ das Gaußsche Fehlerintegral bezeichnet und die bei der relativen Spannungsdifferenz $\bar{\bar{V}}$ jeweils meßbare Elektronenmenge auf die maximal austretende Menge als Einheit bezogen ist.

d) *Die Gleichung der* zugehörigen *Homogenfeldkurve* ist schließlich

$$\bar{\bar{y}}_a = \frac{1 - \Phi\left\{(\bar{\bar{V}} + \bar{\bar{\Pi}}) \cdot \frac{\sqrt{1 + \bar{\bar{\Pi}}/2}}{1 + \bar{\bar{\Pi}}}\right\}}{1 - \Phi\left\{\frac{\bar{\bar{\Pi}} \cdot \sqrt{1 + \bar{\bar{\Pi}}/2}}{1 + \bar{\bar{\Pi}}}\right\}}$$

Eine graphische Darstellung der unter b—d gegebenen Ausdrücke, die für $\bar{\bar{\Pi}} = 0{,}2$ mit der Beobachtung sehr nahe übereinstimmen, zeigen die Kurven 4—6 der Fig. 1.

Für eine weitere leichte Verwertung der hier dargestellten Zusammenhänge ist zu bemerken, daß insbesondere in den Fällen c) und d) auch die vereinfachende Annahme einer fehlenden Austrittsarbeit den Beobachtungen in guter Annäherung gerecht wird. Wie weit diese Annahme die unmittelbare Verteilungskurve der Voltgeschwindigkeiten beeinflussen würde, wird aus der Abweichung der die *innere* Verteilung [Fall a)] darstellenden gestrichelten Kurve 4 von der beobachteten strichpunktierten ersichtlich. Eine systematische Abweichung besteht nur im ersten Anstieg der Kurven, während für den gesamten weiteren Verlauf die Mittelwerte der von den Herren Richardson u. Compton und von Hrn. Ramsauer erhaltenen Ergebnisse, die wir im gegenwärtigen Zusammenhang als der Wirklichkeit am nächsten stehend auffassen, sich sehr nahe mit der inneren Verteilungskurve decken.[1])

Der durch Fig. 1 ohne weiteres ermöglichte Vergleich des relativen Verlaufs der einander entsprechenden Kurven beider Effekte zeigt, daß *die Geschwindigkeitsverteilung der lichtelektrisch von einheitlicher Wellenlänge und der thermisch ausgelösten Elektronen weitgehende Verschiedenheit besitzt, wenn auch der Charakter derselben qualitativ ein ähnlicher ist.*

2. *Absolutwert der Austrittsgeschwindigkeiten.* — Da wir streng genommen annehmen, daß alle möglichen Geschwindigkeiten zwischen 0 und ∞ zur Emission kommen, so handelt es sich hier

1) Vgl. A. Becker, a. a. O. Fig. 14.

nur um die Frage nach dem Absolutwert der *wahrscheinlichsten* Austrittsgeschwindigkeit.

Wie durch die Beobachtungen von Hrn. Ramsauer sichergestellt worden ist, ist die wahrscheinlichste Voltgeschwindigkeit bei allen untersuchten Metallen eine lineare Funktion der Schwingungszahl ν des erregenden Lichts derart, wie dies durch den etwas modifizierten Einsteinschen Ansatz

$$V_{wa} = a_w \left\{ \frac{h}{e} \cdot \nu - \Pi \right\}$$

zum Ausdruck gebracht wird. Hierin bezeichnet Π übereinstimmend mit der bereits im Vorhergehenden ihm zugeschriebenen Bedeutung den von der eingestrahlten Lichtenergie entnommenen, zur Abtrennungs- bzw. Austrittsarbeit benötigten Energiebetrag, während der Faktor a_w der besonderen Forderung Rechnung trägt, daß sich der so festgelegte Wert von V auf die wahrscheinlichste Geschwindigkeit beziehen soll. Nach Hrn. Ramsauers Feststellung hat a_w den Wert 0,7, und dies folgt auch aus der Theorie des selektiven lichtelektrischen Effekts der Herren Debye u. Sommerfeld.[1]) Wie daselbst gezeigt wird, folgt daraus, daß der Einsteinsche Ansatz ohne diesen Faktor auf den „wahrscheinlichen" Wert der Voltgeschwindigkeit oder Energie zutrifft, d. h. auf denjenigen Wert, der ebenso oft über- wie unterschritten wird, und der sich also durch Halbierung der von der Verteilungskurve und der Abszissenachse eingeschlossenen Fläche bestimmt.

V_{wa} wird Null für

$$\frac{h}{e} \cdot \nu_0 = \Pi,$$

so daß auch

$$V_{wa} = a_w \frac{h}{e} (\nu - \nu_0)$$

wird, wo ν_0 die Grenzfrequenz bezeichnet, oberhalb deren keine lichtelektrische Wirksamkeit mehr nachweisbar ist.

Die Einführung der entsprechenden Grenzwellenlänge λ_0 liefert den Ausdruck

$$V_{wa} = a_w \frac{h c_0}{e} \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 \cdot \lambda} \quad \text{oder} \quad V_{wa}^{\text{Volt}} = a_w \cdot 12{,}375 \times 10^{-5} \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 \cdot \lambda}$$

(c_0 = Lichtgeschwindigkeit, λ_0 und λ in cm gemessen).

---

1) P. Debye u. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 41. S. 911. 1913.

3. *Abtrennungs- und Austrittsarbeit.* — Wenn die Lichtwirkung in der Abspaltung von Elektronen aus den Atomen der Materie besteht, so kommt dem aus der Grenzwellenlänge ermittelbaren Wert von Π die Bedeutung der vollständigen *Abtrennungsarbeit* zu, in der die Austrittsarbeit, die beim Überschreiten der Materialgrenze zu leisten ist, inbegriffen ist.

Aus der Verschiedenheit der beobachtbaren Grenzwellenlängen bei verschiedenen Substanzen ist zu entnehmen, daß offenbar jeder Atomsorte eine bestimmte Abtrennungsarbeit zugehört. Einer eindeutigen Zuordnung beider steht allerdings in manchen Fällen der Umstand entgegen, daß die Grenzwellenlänge sich für ein bestimmtes Metall nicht konstant, sondern abhängig erweist von der besonderen nicht immer scharf präzisierbaren physikalischen Beschaffenheit desselben, wobei es dann unbestimmt bleibt, wie weit ein Schluß auf die Abtrennungsarbeit zulässig ist.[1])

Immerhin kann die letztere für eine Reihe von Metallen soweit als festgestellt gelten, daß zum mindesten ihre Größenordnung — einige Volt — als gesichert zu betrachten ist.

Legt man der Berechnung einige Feststellungen der Herren Richardson u. Compton zugrunde, so erhält man beispielsweise[2])

für	Na	Sn	Cu	Pt
λ_0	5,83	3,62	3,00	$2{,}88 \cdot 10^{-5}$ cm
Π	2,12	3,42	4,13	4,30 Volt

Vergleicht man damit den erheblich geringeren Wert von Π, zu dem die Betrachtung der beobachtbaren Geschwindigkeitsverteilung geführt hat, so ist folgendes zu bemerken:

Wenn dieser Wert von Π die Bedeutung einer Austrittsarbeit, d. h. derjenigen Energiedifferenz haben sollte, um die sich die bereits befreiten inneren und die äußeren Elektronen voneinander unterscheiden, so wäre diese also als sehr geringfügig anzusprechen, während der eigentlichen Abtrennung eines Elektrons von seinem Mutteratom eine erheblich größere Arbeitsleistung zukäme. Diese müßte sich aber dann, entgegen der

1) Vgl. R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15. S. 637. 1913.

2) Nach Einführung der Werte der Konstanten wird

$$\Pi^{\text{Volt}} = \frac{12{,}38 \times 10^{-5}}{\lambda_0 \text{ cm}}.$$

Deutung der Beobachtung, in all den (offenbar relativ zahlreichen) Fällen zu erkennen geben, in denen das Mutteratom unmittelbar an der Oberfläche liegt, so daß Austritts- und Abtrennungsarbeit identisch werden.

Die Diskrepanz wächst, wenn man die Erfahrungen vom Glüheffekt hinzunimmt. Dort liefert die Beobachtung für die aus dem Temperaturgang der emittierten Elektronenmenge ermittelbare Arbeitsgröße Werte, welche mit den im Vorstehenden als Abtrennungsarbeit angesprochenen nahe übereinstimmen und vielfach sogar etwas größer sind, während sie nach Hrn. Richardsons Theorie als reine *Austrittsarbeit* erscheinen.

Zur Beseitigung der Schwierigkeit dürfte es zunächst unentschieden bleiben können, ob es sich bei dem in den beiden Fällen nachgewiesenen hohen Π-Wert um eine Abtrennungs- oder Austrittsarbeit handelt und welche numerische Verschiedenheit zwischen diesen beiden besteht, wenn man sich zu der Auffassung bekennt, daß dem aus der lichtelektrischen Geschwindigkeitsverteilung gefolgerten niedrigen Π-Wert mit großer Wahrscheinlichkeit überhaupt nicht die Bedeutung einer gesichert festgestellten Austrittsarbeit zukommt. Wie die früheren Betrachtungen bereits erkennen ließen, hängt nämlich die Größe dieses Π-Wertes wesentlich von der Form der Verteilungsfunktion ab, welche für die inneren Geschwindigkeiten festgelegt wird. So würde man unter Zugrundelegung der Debye-Sommerfeldschen Verteilungskurve schon mit erheblich geringeren Π-Werten eine angenäherte Wiedergabe der Beobachtung erreichen[1]), und im Falle des Glüheffekts hat sich gezeigt, daß die äußere Verteilung vom Einfluß der Austrittsarbeit vollständig frei ist. Würde tatsächlich die Form der wahren Verteilungskurve von Π merklich beeinflußt, so würde auch andrerseits der in der Erfahrung erfolgreiche Versuch, die bei erheblich verschiedenen erregenden Wellenlängen beobachtbaren Kurven zu einer gemeinsamen Grundkurve zu vereinen, notwendig zu deutlichen Unstimmigkeiten führen müssen.

Wenn wir aus diesen und später aus der weiteren Betrachtung des Elektronenaustritts hinzukommenden Gründen (vgl. insbesondere B, II, 3) uns auf den Standpunkt stellen, daß *aus der gesamten bisherigen lichtelektrischen Untersuchung der Geschwindig-*

1) A. Becker, a. a. O. S. 460.

keitsverteilung der austretenden Elektronen ein sicherer Schluß auf die Abtrennungs- oder Austrittsarbeit überhaupt nicht gezogen werden kann[1]), so geben wir damit gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit zu, daß wir *in der Annahme Maxwellscher Verteilung der inneren Voltgeschwindigkeiten zwar eine zur Darstellung der Erfahrung in erster Näherung geeignete, aber offenbar noch nicht die wahre Verteilungsfunktion* gefunden haben. Es ist auch in der Tat trotz der mathematischen Einfachheit der Formulierung bis jetzt nicht ersichtlich, welcher einfache Mechanismus ihr entsprechen könnte. (Vgl. hierzu auch C.)

4. *Menge der emittierten Elektronen.* — Wie zuerst Hr. Lenard[2]) nachgewiesen und eine Reihe späterer Beobachtungen in weitesten Grenzen bestätigt hat, ist die Anzahl der in der Zeiteinheit emittierten Elektronen in allen Fällen der wirksamen *Lichtintensität* proportional.

Die Abhängigkeit von der *Schwingungszahl* bzw. *Wellenlänge* des Lichts besteht bei allen untersuchten Metallen, auf die sich die gegenwärtige Betrachtung beschränken kann, in einem bei der Grenzwellenlänge beginnenden, mit abnehmender Wellenlänge erst langsam und dann beschleunigt wachsenden Anstieg der lichtelektrischen Wirkung. Wie weit dieser Anstieg noch im Gebiet kürzester Wellenlängen erhalten bleibt, kommt für unseren jetzigen Zweck nicht in Betracht.

Nach den Messungen von Hrn. Werner[3]) erweist sich dieser, an dünnsten Schichten beobachtete Gang mit der Wellenlänge, jeweils bezogen auf die gleiche absorbierte Lichtenergie, für verschiedene Metalle in Annäherung als gleiche Funktion der Wellenlänge.[4]) Dieselbe kann, wie sich empirisch ergibt, in der Form

---

1) Daß insbesondere auch der von Hrn. Ramsauer aus seiner Untersuchung der Abhängigkeit der lichtelektrischen Geschwindigkeitsverteilung von der Emissionsrichtung gezogene Schluß auf kleine Austrittsarbeit nicht beweisend ist, wurde bereits an früherer Stelle (A. Becker, a. a. O. S. 430) gezeigt.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. S. 154. 1902.

3) S. Werner, Uppsala Univ. Årsskrift 1913/14.

4) Die verschiedenen optischen Eigenschaften der einzelnen Metalle und etwaige verschiedene Elektronenabsorptionen in den tieferen Schichten scheinen danach den Gang nicht erkennbar zu beeinflussen. Daß sich diese Faktoren ebensowenig bei der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen bemerkbar machen, geht aus der Möglichkeit hervor, die verschiedenen Verteilungskurven in einer gemeinsamen Grundkurve zu vereinigen.

$$n = \text{const.} \times \left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right\}^2$$

dargestellt werden, wenn n die pro Einheit absorbierter Lichtenergie emittierte Elektronenzahl und λ_0 die Grenzwellenlänge ist.

In Tab. 1 gibt die 2. Kolonne die Beobachtungen von Hrn. Werner für Platin, während die 3. Kolonne den entsprechenden berechneten Gang wiedergibt.

Tabelle 1.

Platin. $\lambda_0 = 2{,}88 \cdot 10^{-5}$ cm.

λ cm	n beobachtet	n berechnet
$2{,}8 \cdot 10^{-5}$	0,026	0,046
2,65	0,30	0,33
2,54	0,72	0,72
2,48	1,00	1,00
2,38	1,54	1,55
2,30	2,11	2,07
2,19	2,91	2,98
2,15	3,20	3,31

Was den *Absolutwert* der emittierten Menge betrifft, so kann dieser, wie bereits erwähnt, sehr wesentlich von sekundären Einflüssen mitbestimmt werden. In dickeren Schichten wird die Behinderung des Elektronenaustritts eine besonders verminderte lichtelektrische Wirkung verursachen, die, wie bekannt, durch möglichst streifende Inzidenz des Lichtes gesteigert werden kann. Aber auch in Fällen, in denen die lichtelektrische Elektronenabtrennung sich an dünnsten Schichten abspielt, findet man nur einen sehr geringen Bruchteil der absorbierten Lichtenergie (der verbrauchten Lichtquanten) für lichtelektrische Wirkung ausgenützt. Nur im Falle der Phosphore, wo es sich um selektive Wirkung handelt, konnte bisher von Hrn. Lenard[1]) für je ein Lichtquant die Emission eines Elektrons festgestellt werden.

II. Erregung mit weißem Licht.

1. *Gesamtmenge der emittierten Elektronen.* — Als erregende Strahlung möge diejenige des schwarzen Körpers der absoluten

1) P. Lenard, Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 13. 1914. Neuerdings (5. Tätigkeitsbericht des Radiol. Instit. Heidelb., Elektrot. Zeitschr. 40. S. 103. 1919) glaubt Hr. Lenard dieselbe volle Ausnutzung der Lichtenergie auch bei der Leitfähigkeitserregung in Gasen annehmen zu können.

Temperatur Θ gegeben sein. Dann ist die in der Zeiteinheit emittierte Elektronenmenge n einerseits proportional der in der Zeiteinheit von der Flächeneinheit aufgenommenen Strahlungsenergie, andrerseits proportional derjenigen Elektronenzahl, welche von den einzelnen engbegrenzten Wellengebieten pro Energieeinheit ausgelöst wird. Ist die Absorption des erregten Metalls in dem für die Erregung praktisch in Betracht kommenden Wellengebiet, wie der Einfachheit halber vorausgesetzt sei, nicht wesentlich selektiv[1]), so wird also, wenn das Plancksche Gesetz, was streng zulässig ist, in der vereinfachten Wienschen Form eingeführt wird,

$$n = \text{const.} \int_0^{\lambda_0} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 \cdot \lambda^{-5} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda\Theta}} \, d\lambda .$$

Die Integration liefert

$$n = \text{const.} \times \frac{\Theta}{c_2} \left\{ 6 \frac{\Theta^3}{c_2^3} + 2 \frac{\Theta^2}{c_2^2} \frac{1}{\lambda_0} \right\} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda_0 \Theta}}.$$

Man erkennt, daß dieser mit dem von Hrn. Wilson[2]) gegebenen verwandte Ausdruck[3]) formale Ähnlichkeit hat mit der bekannten Richardsonschen Gleichung für den Glüheffekt durch das Auftreten der Exponentialfunktion mit der absoluten Temperatur im Nenner des Exponenten. Es handelt sich in diesem Falle indes nicht nur um eine formale, sondern um eine volle inhaltliche Übereinstimmung. Setzt man nämlich[4]) für $c_2 = c_0 h/k$, wo c_0 die Lichtgeschwindigkeit und k, in Volt ausgedrückt, mit V_{wi}^{-1} identisch ist, so folgt

$$\frac{c_2}{\lambda_0 \Theta} = \frac{h \nu_0}{k \Theta} = \frac{\Pi}{V_{wi}^{-1} \Theta} \quad \text{(vgl. A 3e und B I 2).}$$

Die Größe Π wird hier durch die Grenzwellenlänge λ_0 eingeführt, während sie von der Richardsonschen Theorie direkt

1) Diese Voraussetzung trifft beispielsweise nach den Untersuchungen der Herren E. Hagen und H. Rubens (Ann. d. Phys. 8. S. 447. 1902) mit großer Annäherung auf Platin zu.

2) W. Wilson, Ann. d. Phys. 42. S. 1159. 1913.

3) Derselbe würde ohne Einführung der spektralen Empfindlichkeit die einfachere Gestalt

$$n = \text{const.} \times \frac{\Theta}{c_2} \frac{1}{\lambda_0^3} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda_0 \Theta}}$$

annehmen.

4) M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung. 1906. S. 157.

gefordert wird. In dieser hat sie aber die Bedeutung einer Austrittsarbeit, im Obigen dagegen diejenige einer Abtrennungsarbeit.

Da die Erfahrung in beiden Fällen für Π innerhalb der Versuchsgenauigkeit nahe übereinstimmende Werte anzuzeigen scheint, und da der Wert von n durchweg weit überwiegend durch die Exponentialfunktion bestimmt wird, so ist der hier gefundene Gang von n mit Θ jedenfalls mit guter Annäherung dem von der Richardsonschen Gleichung geforderten gleichlaufend.[1])

Es ergibt sich also, daß *der Zusammenhang zwischen der von einem glühenden Metall thermisch ausgelösten Elektronenmenge und dessen Temperatur angenähert derselbe ist wie derjenige zwischen der aus einem Metall lichtelektrisch ausgelösten Elektronenmenge und der Temperatur des belichtenden Körpers.*

Dies Ergebnis findet sich ebenso wie für den schwarzen Körper für jede erregende Lichtquelle ohne ausgesprochene selektive Eigenschaften im wirksamen Wellengebiet.

2. *Geschwindigkeitsverteilung.* — Für den Fall wieder nahe konstanten Absorptionsvermögens sowohl des Strahlers als des lichtelektrisch erregten Körpers findet sich nach Obigem für die *Verteilung der äußeren Voltgeschwindigkeiten in erster Näherung*

$$P(V_a)dV_a = \text{const.} \times \int_0^{\lambda_0} \frac{\lambda_0}{\lambda^2 \cdot (\lambda_0 - \lambda)} \cdot e^{-\frac{c_2}{\lambda\Theta} \cdot V_a^2 \cdot e^{-V_a^2 \left\{\frac{\lambda_0 \lambda}{a \cdot (\lambda_0 - \lambda)}\right\}^2}} \cdot d\lambda \cdot dV_a,$$

worin der konstante Faktor a die Bedeutung des früheren $a_w \cdot 12{,}375 \cdot 10^{-5}$ hat.

Die Näherung besteht darin, daß wir zunächst die durch den strichpunktierten Ast der Kurve 4 (Fig. 1) angezeigte Abweichung der äußeren Verteilung von dem hierfür eingeführten theoretischen Ausdruck unberücksichtigt lassen, indem wir annehmen, daß die Verteilung der inneren und äußeren Voltgeschwindigkeiten formal durch die gleiche, mit der Beobachtung im übrigen ausreichend übereinstimmende Funktion dargestellt werden könne.

Da die Form des Integrals eine allgemeine geschlossene Lösung erschwert[2]), wählen wir im Gegenwärtigen zur Veran-

1) Die vorhandenen Unsicherheiten in der Beobachtung lassen vom empirischen Standpunkt einen erheblichen Spielraum in der Wahl des Temperaturfaktors der Exponentialfunktion.

2) Was bedauerlicherweise auch eine Erschwerung des allgemeinen Überblicks zur Folge hat.

schaulichung seiner Aussagen den Weg spezieller numerischer Auswertung. Als emittierenden Körper wählen wir *Platin* mit Rücksicht darauf, daß sein optisches Absorptionsvermögen im ganzen für die lichtelektrische Wirkung in Betracht kommenden Wellenbereich sehr nahe konstant ist[1]) und daß es die einzige Substanz ist, an der sowohl die lichtelektrische als die thermische Elektronenauslösung in weitem Umfang experimentell untersucht worden ist.

Das Ergebnis der Berechnung des Relativverlaufs von $P(V_a)$ — also des Verlaufs von $P(\overline{\overline{V}}_a)$ — mit Benutzung der Werte $c_2 = 1{,}4594$ abs. und $\lambda_0 = 2,\ 8 \cdot 10^{-5}$ cm (vgl. B I, 3) wird für $\Theta = 2000^0$ durch die mit × bezeichneten Punkte der Fig. 2 wiedergegeben, während die ausgezogene Kurve die beim Glüheffekt vorhandene $P(\overline{\overline{V}}_a)$-Verteilung (Reproduktion der Kurve 1 der Fig. 1) anzeigt.

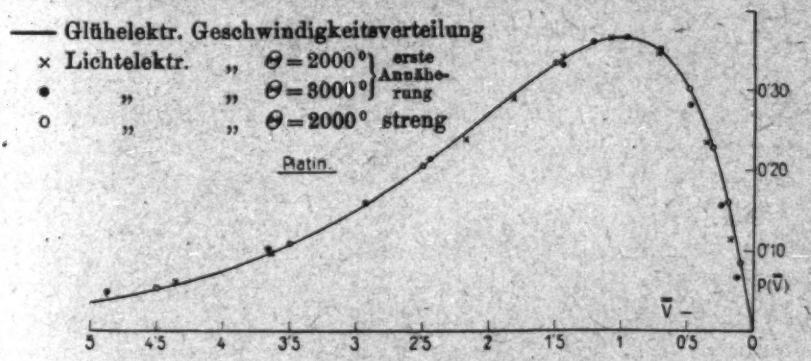


Fig. 2.

Ob für die in der Rechnung eingehende Konstante a_w der Wert 1 oder 0,7 gesetzt wird, ist für den Kurvenverlauf bedeutungslos. Der Verlauf erscheint überdies, soweit geprüft, von der Temperatur der erregenden Lichtquelle unabhängig, wie beispielsweise die Hinzunahme der für $\Theta = 3000^0$ berechneten Werte (mit • bezeichnet) zeigt.

Der Vergleich mit der ausgezogenen Kurve läßt Übereinstimmung erkennen bis auf eine geringe systematische Abweichung beim ersten Anstieg. Um diese zu bewerten, ist zu beachten, daß das mitgeteilte Rechenverfahren, wie oben hervorgehoben, sich nicht streng auf die beobachtete lichtelektrische Verteilungskurve

1) Vgl. die entsprechende Anmerkung unter B II, 1.

stützte, sondern einen Kurvenverlauf zugrunde legte, der gerade beim ersten Anstieg im Sinne zu niedriger Ordinatenwerte vom beobachteten abweicht, was notwendig im Endergebnis in gleichem Sinne sich bemerkbar machen muß. Führt man die Integration mit Rücksicht hierauf (auf graphischem Wege oder mit Benutzung des theoretischen Ausdrucks B I, 1b) mit größerer Strenge durch, so *verschwindet tatsächlich die anfängliche Abweichung* vollständig, und die zunächst nur angenäherte Übereinstimmung der verschiedenen Fälle wird über das ganze Bereich aller Voltgeschwindigkeiten innerhalb der Genauigkeit des Integrationsverfahrens eine vollkommene.

Wir gelangen also zu dem überraschenden Ergebnis, daß *die relative Verteilung der Voltgeschwindigkeiten der aus Platin lichtelektrisch durch Bestrahlung mit weißem Licht ausgelösten Elektronen identisch ist mit derjenigen der thermisch ausgelösten Elektronen.*

Fragen wir zunächst, wie weit dieses Ergebnis an die spezielle Wahl des Platins gebunden oder wie weit es von allgemeinerer Bedeutung sein könnte, so ist hervorzuheben, daß die Natur des erregten Körpers nur insofern eine Rolle spielt, als durch sie der Gang des Absorptionsvermögens mit der Wellenlänge bestimmt wird.[1]) Da praktisch bei den verfügbaren Temperaturen der erregenden Lichtquellen immer nur ein enges wirksames Spektralgebiet[2]) in Betracht kommt, so würde ein individuelles Verhalten nur in dem seltenen Falle zu erwarten sein, daß die bestrahlte Substanz gerade in diesem Gebiet ausgesprochene selektive optische Eigenschaften besitzt. Die für Platin gewonnene Kenntnis wird daher jedenfalls auf eine Reihe anderer Metalle ohne weiteres ausgedehnt werden dürfen. Wichtig wird in diesem Zusammenhang die künftige Untersuchung derjenigen Fälle sein, in denen ein selektiver lichtelektrischer Effekt auftritt.

Daß die Kombination des Strahlungsgesetzes mit den theoretisch noch ungeklärten Verteilungsfunktionen der lichtelektrischen Empfindlichkeit und Austrittsgeschwindigkeit zu einer so einfachen, insbesondere von der Temperatur unabhängigen relativen Gesamtverteilung führt, deutet jedenfalls einen inneren Zusammenhang der einzelnen Faktoren an, und es ist auch von

1) Vgl. die entsprechende Anmerkung unter II, 1.

2) Für Platin vom Schwellenwert $2{,}88 \cdot 10^{-5}$ bis etwa $2{,}0 \cdot 10^{-5}$ cm bei 2000° abs., bis etwa $1{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm bei 3000° abs. reichend.

diesem Standpunkt aus zu vermuten, daß die *wahre*, diesem Zusammenhang entsprechende *Form* des Integranden offenbar einfacherer Art sein müsse als die bis jetzt auf rein empirischer Grundlage gewonnene. Im Gegenwärtigen wird zunächst zu versuchen sein, auf Grund der tatsächlichen Feststellungen zu einem Verständnis des die ermittelten Integralwirkungen bedingenden Mechanismus vorzuschreiten und die besondere Form der Einzelfaktoren vielleicht eher als notwendige Folge denn als Ursache des Gesamtvorgangs aufzufassen.

3. *Absolutwert der wahrscheinlichsten Austrittsgeschwindigkeit.* — Während der relative Gang der Verteilungskurve, wie oben bemerkt, durch den besonderen Wert von a_w nicht merklich beeinflußt wird, ist der Absolutwert der Austrittsgeschwindigkeiten naturgemäß von ihm abhängig. Die für Platin durchgeführte Berechnung liefert die in Tab. 2 mitgeteilten Ergebnisse (Kolonne 2 und 3).

Tabelle 2.

V_{ws} Platin

Θ abs.	V_{ws} Volt		V_{wt} Volt gastheoretisch
	mit $a_w = 1$	mit $a_w = 0{,}7$	
2000°	0,275	0,17	0,172
3000°	0,41	0,26	0,258

Zum Vergleich gibt die 4. Kolonne die wahrscheinlichsten Voltgeschwindigkeiten, welche freien Elektronen nach der kinetischen Gastheorie bei den betreffenden Temperaturen zukommen, und wie sie beim Glüheffekt direkt beobachtbar sind. Man erkennt, daß V_{ws} der absoluten Temperatur proportional ist[1]) und für $a_w = 0{,}7$, dem bereits früher geforderten Wert, mit dem gastheoretischen Wert völlig übereinstimmt. Da sich der letztere nur im Metallinnern herstellen kann, so ist zu schließen, daß bei der lichtelektrischen Wirkung eine Austrittsarbeit, deren Einflußlosigkeit früher bereits (B I, 3) in andrer Hinsicht wahrscheinlich geworden war, auch den Absolutwert der Elektronengeschwindigkeiten nicht beeinflussen kann, wie dies auch für die glühelektrische Wirkung nachgewiesen worden ist.

1) Dieses Anwachsen von V_{ws} mit der Temperatur der erregenden Lichtquelle erscheint beim lichtelektrischen Effekt als Folge der Verschiebung der Strahlungsenergie nach kürzeren wirksamen Wellenlängen hin.

Das vorstehende Ergebnis besagt, daß *der Absolutwert der wahrscheinlichsten und damit aller Austrittsgeschwindigkeiten der aus Platin bei Bestrahlung mit weißem Licht bestimmter Temperatur lichtelektrisch ausgelösten Elektronen identisch ist mit demjenigen der bei derselben Temperatur thermisch ausgelösten Elektronen.*

Nach dem unter 2. Bemerkten wird diese Aussage auf eine Reihe andrer Metalle ohne weiteres übertragen werden können und damit in gewissem Umfang allgemeine Gültigkeit erlangen.[1]) Bei der Bedeutung dieses Ergebnisses für das Verständnis der beiden untersuchten Auslösungsvorgänge bleibt nur zu bedauern, daß sich die Aussagen vorerst noch nicht allgemein analytisch begründen lassen.

C. Folgerungen.

Die vorstehenden Entwicklungen deuten einen so weitgehenden *Parallelismus zwischen lichtelektrischer und glühelektrischer Wirkung* an, daß man sich kaum der Auffassung wird verschließen können, daß beide Wirkungen im wesentlichen als Äußerungen ein und desselben Mechanismus zu bezeichnen sein dürften. Diese Auffassung kann sich naturgemäß nicht in der Erkenntnis erschöpfen, daß beiden Erscheinungen der gemeinsame Vorgang der Transformation einer bestimmten Energieform in potentielle und kinetische Energie ausgelöster Elektronen zugrunde liegt. Sie muß sich vielmehr, um zu einer Deutung der Einzelerscheinungen zu gelangen, auf die Frage nach der besonderen Form der unmittelbar erregenden Energie und nach dem Mechanismus der Umsetzung dieser Energie erstrecken.

Vom gegenwärtigen Standpunkt unsrer Kenntnis bieten sich hier in erster Linie die beiden einfachsten Möglichkeiten, daß man versucht, die thermischen Vorgänge lichtelektrisch oder die lichtelektrischen Vorgänge thermisch zu erklären.

1. *Lichtelektrische Theorie des Glüheffekts.* — Unsre gesamten Feststellungen im Vorhergehenden sind mit der Vorstellung vereinbar, daß die Elektronenemission eines glühenden Metalls die Folge lichtelektrischer Wirkung des Metalls auf sich selbst sei. Hierbei entsteht aber eine Reihe von Schwierigkeiten:

1) Daß dies Ergebnis insbesondere auch nicht merklich von λ_0 beeinflußt ist, erhöht seine Bedeutung im Hinblick darauf, daß die genaue Ermittlung der Grenzwellenlänge mit gewissen Unsicherheiten verbunden ist.

Die einleuchtende Ansicht vom Auftreten gastheoretischer Geschwindigkeiten freier Elektronen wäre ohne Hinzunahme wenig wahrscheinlicher Hilfsannahmen nicht haltbar. Da die lichtelektrische Wirkung notwendig an schwingungsfähigen, also gebundenen Elektronen angreifen muß, wären die Verteilung und Absolutwerte der Austrittsgeschwindigkeiten der beim Glüheffekt als ursprünglich frei angesehenen ausgelösten Elektronen auf einen noch unverstandenen Zwischenmechanismus zurückzuführen. Sie würden andrerseits bei vielen Substanzen je nach ihren optischen Eigenschaften ganz individuell sein müssen.

2. *Glühelektrische Theorie des Photoeffekts.* — Der Inhalt dieser theoretischen Auffassung bestände darin, daß die Lichtwirkung in der Herstellung eines gewissen molekular-lokalen Temperaturzustandes[1]) der vorhandenen Absorptionsstellen (Resonatoren) und entsprechender Einstellung der gastheoretischen Geschwindigkeiten der freien Elektronen dieser Gebiete gesehen würde.[2]) Die Temperatur- bzw. Energiezustände der Stellen der konzentrierten Lichtwirkung müßten dabei identisch werden mit denjenigen der Stellen der Emission des Lichts, was man allerdings noch versuchen müßte, thermodynamisch zu begründen.

Da für die Herstellung der betreffenden Temperaturzustände offenbar nur derjenige Anteil des ganzen Strahlungskomplexes des schwarzen Körpers in Betracht kommt, der nach längeren Wellen durch die Grenzwellenlänge begrenzt ist, dessen Energiequanten also zum mindesten den Betrag einer gewissen Energiegröße (Abtrennungsarbeit) erreichen, so wären diese Zustände nicht unmittelbar an denjenigen Stellen anzunehmen, an denen die Lichtabsorption erfolgt, sondern an denjenigen der durch einen Auslösungs-Zwischenmechanismus beeinflußten Umgebung, von welcher die entweichenden Elektronen entnommen werden.

Wenn sich die glühelektrische Theorie in dieser Hinsicht ebenfalls auf einen an sich noch nicht näher geklärten Vorgang beruft, so dürfte ein Vorzug gegenüber der lichtelektrischen Theorie

---

1) Vgl. den entsprechenden Fall bei Phosphoren; P. Lenard, Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 11. 1918, wo auch frühere Stellen angemerkt sind.

2) Die energieaufnehmenden Elektronen erscheinen hier nicht identisch mit den ausgelösten, was der von Hrn. Lenard an Phosphoren gewonnenen Auffassung entspricht. Siehe Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Heidelberg 1918. S. 188.

nicht nur darin liegen, daß sie den erkannten Parallelismus der beiden Erscheinungsgebiete, insbesondere die Identität der resultierenden Geschwindigkeitsverteilung, in einfacher Weise verständlich macht, sondern daß bei ihr der Haupteinwand gegen die lichtelektrische Theorie des Glüheffekts, daß sie den ersichtlichen *Unterschied in der Größenordnung der Wirkung* bei beiden Vorgängen nicht zu deuten vermöge, wegfällt.

Die Annahme ursprünglich freier Elektronen bringt allerdings eine Schwierigkeit beim Versuch der Deutung derjenigen lichtelektrischen Wirkungen, die sich an isolierenden Körpern, insbesondere an Gasen abspielen. Sie besteht hier indes nur darin, daß die entweichenden Elektronen keine freien sein können[1]), während die Auffassung des rein thermischen Effekts erhalten bleiben könnte.[2]) Es mag in dieser Hinsicht zulässig sein, daß die Geschwindigkeitsverteilung beim Austritt hier vielleicht eine andre ist. Wir sehen in der Tat den Hauptvorteil der Annahme *freier* Elektronen darin, daß durch sie die beobachtete Geschwindigkeitsverteilung am einfachsten eine Erklärung findet. Andernfalls wäre zu fordern, daß die aus den Atomen, sei es durch direkte lichtelektrische Wirkung, sei es durch eine Folgeerscheinung derselben, wie sie die obigen Betrachtungen verlangen, ausgelösten Elektronen sofort mit derjenigen gastheoretischen lebendigen Kraft austreten, die nach der glühelektrischen Theorie durch den Zustand der Zentren der endgültigen Emission bestimmt ist.[3])

Vom Standpunkt der glühelektrischen Auffassung würde auch die nach gegenwärtiger Kenntnis[4]) anzunehmende Unabhängigkeit der Menge und Austrittsgeschwindigkeit der lichtelektrischen Elektronen von der *Lichtrichtung* ohne weiteres verständlich sein.

3. *Abtrennungs- und Austrittsarbeit.* — Es entsteht hier die Frage, wie weit die experimentelle Feststellung der Größe des

1) Es ist dies ebenso eine Schwierigkeit der gewöhnlichen Richardsonschen Theorie des Glüheffekts.

2) Vgl. beispielsweise über die Vorgänge in Flammen P. Lenard, Ann. d. Phys. 40. S. 393. 1913; 41. S. 86. 1913; A. Becker, Flammenleitung, Handbuch der Elektrizität u. des Magnetismus, herausgeg. von L. Graetz (eingereicht 17. März 1919); über thermische Elektronenauslösung in Gasen, O. Devik, Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 24. 1914.

3) Vgl. eine entsprechende Vorstellung bei P. Lenard, Heidelb. Akad. d. Wiss. A. 11. 1918. Anm. 407.

4) Vgl. W. Hallwachs, Die Lichtelektrizität. S. 372.

durch die Verschiedenheit der potentiellen Energie des „inneren" und des „äußeren" Elektrons erforderlichen Anteils an aufgenommener Energie eine Entscheidung über die Beteiligung freier oder gebundener Elektronen treffen könnte. Da im ersteren Fall nur die Arbeit für den Austritt aus der neutralen Materialoberfläche in Betracht käme, von der die zur Abtrennung des Elektrons aus seinem Mutteratom erforderliche Arbeit des zweiten Falls verschieden sein könnte, so wäre eine Entscheidungsmöglichkeit immerhin denkbar. Abgesehen davon aber, daß eine solche Verschiedenheit zwischen Abtrennungs- und Austrittsarbeit aus mehreren hier nicht näher zu betrachtenden Gründen[1]) nicht unbedingt notwendig erscheint, ist unsre frühere Feststellung zu beachten, nach der die bisherige Erfahrung beim Glüheffekt sowohl wie sehr wahrscheinlich — und nach Kenntnis der vorhandenen Verwandtschaft ebenso sicher — auch beim lichtelektrischen Effekt zwischen den beiden Arbeitsbegriffen in keiner Weise zu entscheiden vermag.

4. *Thermische Beeinflussung der lichtelektrischen Wirkung.* — Würde es sich bei der lichtelektrischen Wirkung um einen vollständig im Atominnern ablaufenden Vorgang handeln, so wäre eine Temperaturabhängigkeit nicht zu erwarten. Würde sie aber thermisch deutbar sein, so wäre eine Beeinflussung auch dann nicht zu erwarten, wenn man die Einstellung eines lediglich durch die erregende Strahlung bestimmten Temperaturgleichgewichts zwischen den Zentren der Licht- und der Kathodenstrahlung annehmen würde. Wollte man dagegen eine Überlagerung der äußeren und der durch den Gesamttemperaturzustand des erregten Körpers bedingten Erregung zulassen, so könnte man die Wirkung der letzteren in Annäherung wohl als eine Veränderung der Austrittsarbeit der Elektronen um die wahrscheinlichste, dem mittleren Temperaturzustand des Körpers entsprechende gastheoretische Energie ansehen. Hierdurch wäre vorwiegend merkbar die *Menge* der emittierten Elektronen nach Maßgabe des Faktors $e^{\bar{\Pi}}$, wo $\bar{\Pi}$ diese wahrscheinlichste Energie relativ zu derjenigen der von außen erregten ist, verändert, was sich schon bei relativ geringen Temperaturänderungen um so eher experimentell erkennen ließe, je niedriger die Temperatur oder je länger die Welle des erregenden Lichts wäre.

---

1) Vgl. beispielsweise P. Debye, Ann. d. Phys. **33.** S. 441. 1910.

Eine Deutung des bisherigen durchweg negativen Ausfalls zahlreicher entsprechender Beobachtungen[1]) in bestimmter Richtung würde allerdings gegenwärtig bei der Zahl der noch offenen Möglichkeiten kaum als zuverlässig bezeichnet werden können.

Wir sehen aus diesem Grunde auch die Bedeutung der vorliegenden Mitteilung weniger darin, daß sie zwar versucht, die beiden in Betracht gezogenen Erscheinungsgebiete durch eine bestimmte theoretische Vorstellung zu verbinden, als darin, daß sie dazu anregt, die Zahl der Deutungsmöglichkeiten durch die unmittelbare Erfahrung zu verringern und damit die theoretische Einsicht zu erleichtern.

Wenn es berechtigt ist, für die beobachtbare Endwirkung der Elektronenauslösung aus der Materie wie im Vorstehenden nicht etwa die besondere Form der erregenden Energie sondern einen bestimmten Atommechanismus als maßgebend aufzufassen, so wird man erwarten dürfen, dessen Kenntnis durch die Heranziehung der bekannten sonstigen Formen der erregenden Energie zu vertiefen.

Heidelberg, Radiolog. Institut u. Theoret.-Physik. Apparat.

---

1) Erste Untersuchungen des Temperatureinflusses hat A. Lienhop, Ann. d. Phys. **21**. S. 281. 1906 ausgeführt; eine Übersicht über die weitere hierhergehörige Literatur siehe bei W. Hallwachs, Die Lichtelektrizität. Handbuch der Radiologie. Herausgegeben von E. Marx, Leipzig 1916.

(Eingegangen 25. April 1919.)

3. *Zur Akustik des Knalles*[1]; *von Otto Abraham.*

(Aus dem Psychologischen Institut der Universität Berlin.)

Vor 20 Jahren begann ich meine Arbeiten im Berliner Psychologischen Institut mit einer Untersuchung über die Wahrnehmung kürzester Töne und Geräusche.[2]) Gemeinsam mit Ludwig J. Brühl fand ich, daß für das ganze musikalische Tongebiet zwei Schwingungen zu einer Tonwahrnehmung genügen. Diese Versuche sind verschiedentlich, besonders von physikalischer Seite nachgeprüft und bestätigt worden. Weniger beachtet wurden Nebenbefunde unserer damaligen Untersuchungen, die sich auf die *Eigentümlichkeiten* der kürzesten Töne und Geräusche bezogen.

Wir hatten gefunden, daß von einem bestimmten Dauerminimum an *jeder kurze Ton von einem tiefen, knallartigen Nebengeräusch begleitet* ist, das mit zunehmender Kürze immer deutlicher wird und schließlich eine Oktaventäuschung des Tonurteils bewirkt. Beim Anblasen eines einzigen Sirenenloches hörte man einen Knall von unbestimmbarer Tonhöhe.

Versuch, den Knall als Reflexionsgeräusch zu erklären.

Wir hatten damals angenommen, daß sowohl der Knall des einzelnen Sirenenlochs wie das knallartige Nebengeräusch der kürzesten Töne in der Hauptsache von Reflexionswellen herrühre. Die Höhe des Gesamtknalls wäre somit abhängig

1) Die vorliegende Abhandlung ist ein Beitrag zu der *Festschrift*, die Carl Stumpf zum 70. Geburtstag von einigen seiner Schüler als Ausdruck ihrer Verehrung und Dankbarkeit überreicht worden ist. Alle Versuche, das Sammelwerk als solches erscheinen zu lassen, sind leider an der Ungunst der Verhältnisse im Buchhandel gescheitert und so haben wir uns auf den eigenen Wunsch des Jubilars, der auch hier wieder die Sache vor die Person stellte, endlich entschließen müssen, die Arbeiten einzeln in Zeitschriften zu veröffentlichen.

2) Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinnesorgane 18.

gewesen von der Wellenlänge des Sirenentons und von dem Abstand der Reflexionspunkte im Beobachtungsraum.

Im Verlauf verschiedener Untersuchungen an Sirenentönen glaubte ich die Richtigkeit unserer damaligen Erklärung anzweifeln zu müssen und beschloß, die Natur des Sirenenknalls genauer zu untersuchen. Zunächst wurde nochmals die Tatsache festgestellt, daß ganz kurze Töne im mittleren und höheren Tongebiet, schon von 10 Schwingungen an, sich in bezug auf die Klangfarbe von länger dauernden Tönen ganz wesentlich unterscheiden; sie klingen nicht annähernd so spitz und tönend, sondern mehr wie schwach tonal gefärbte, trockne, kurze Schläge. Bei genauerem Hinhören bemerkt man, daß der kurze Ton aus zwei voneinander anscheinend trennbaren Komponenten besteht, erstens einem Ton, dessen Höhe aus dem Löcherabstand und der Scheibengeschwindigkeit auszurechnen ist, dem „Frequenzton", und zweitens aus einem knallartigen Nebengeräusch, das mindestens eine Oktave tiefer als der Frequenzton zu liegen scheint.

Wenn dieses Nebengeräusch durch Reflexionswellen von den Wänden entsteht, dann muß seine Höhe abhängig sein von der Entfernung der Wände. Ein richtiger *Reflexionston* würde entstehen, wenn außer dem Ohr nur ein einziger Reflexionspunkt im Raum existierte; dann würde nämlich der kurze Ton zwischen diesen beiden Punkten hin und her geworfen werden, und so könnte eine neue Wellenlänge, nämlich der doppelte Abstand der Reflexionspunkte entstehen. Da aber nicht zwei, sondern viele Reflexionspunkte im Raum vorhanden sind, kann durch sie nur ein *Reflexionsgeräusch*, kein Ton entstehen. Immerhin haben auch Geräusche ihre Tonregion, die in diesem Fall von den Entfernungen der Wände abhängig sein müßte.

Selbst wenn das Reflexionsgeräusch von *allen* Wänden und Wandpunkten gebildet wird, müßten die am nächsten gelegenen Wände die stärksten Reflexionen geben und dadurch die tonale Höhe des Geräusches bestimmen.

Ich variierte deshalb die Wandentfernung; ich experimentierte in der Ecke eines Zimmers, einen Meter von den beiden Wandflächen entfernt, dann in der Mitte des Zimmers, die $3^1/_2$ bzw. 2 m von den Wänden abliegt. Der Effekt war,

daß in der tonalen Höhe des Knallgeräusches auch nicht der mindeste Unterschied nachweisbar war; auch in dem großen Saal des psychologischen Instituts, in dem noch weit größere Raumdifferenzen herzustellen sind, waren keine Unterschiede der Geräuschhöhe zu bemerken, falls sonst am Versuch nichts geändert worden war, d. h. wenn die Rotationsgeschwindigkeit, die Lochanzahl und der Lochabstand die gleichen blieben.

Die Annahme, daß Reflexionsgeräusche die Urheber des Knalles sind, kann also aufgegeben werden.

Allerdings ist es sehr schwer, über die Höhe eines Geräusches eine genaue Aussage zu machen, zumal wenn dieses wie hier nicht einmal in Geräuschreinheit dargeboten wird. Man fühlt sich nämlich meist verleitet, das Konglomerat von Ton und Geräusch als eine Einheit zu betrachten, die Tonhöhe dem Frequenzton zuzuschreiben und das Geräusch nur in einer eigenartigen Klangfarbe zu bemerken; daher entstehen auch die *Oktaventäuschungen*, die reine *Urteilstäuschungen* sind. Sobald das Konglomerat von Ton und Geräusch beobachtet wird, erscheint der Frequenzton um eine Oktave vertieft; wird der Frequenzton allein oder das Geräusch allein beachtet, dann erscheint zugleich mit der Zweiheit des akustischen Eindrucks die der Berechnung entsprechende Höhe des Frequenztons und die Oktaventäuschung verschwindet. Von einer bestimmten Kürze des Tons an gelingt allerdings eine solche Analyse nicht mehr, und man kann sich der Oktaventäuschung dann nicht mehr entziehen. — Wenn das knallartige Nebengeräusch der kürzesten Töne nicht durch Reflexionen zu erklären ist, dann muß es in dem Sirenenton selbst begründet sein.

Physiologische Erklärung des Knalles.

Helmholtz und die Anhänger seiner Resonatorentheorie würden den Nebenknall der kürzesten Töne dadurch erklären, daß die ersten Schwingungen eines Tons die ganze Reihe der Cortischen Fasern erregen, und daß erst nach einer größeren Anzahl von Schwingungen, die etwa 10 betragen mag, die scharfe Resonanzauslese getroffen ist. Hiernach scheint unsere akustische Erscheinung ziemlich mühelos erklärt: Man hört einen Ton (Frequenzton), entsprechend den hauptsächlich

schwingenden Fasern, und ein Nebengeräusch als Korrelat der übrigen noch nicht völlig abgeklungenen Fasern. Nach Brücke[1]) müßte sogar jeder plötzlich beginnende Ton im Beginn der Empfindung einen Knall geben.

Weshalb aber ist unser Knall so tief? Auch darauf dürften manche Physiker eine Antwort haben; da die hohen Töne schneller abklängen als tiefe, seien die hohen Nebenfasern schon abgeklungen, die tiefen aber schwängen noch und gäben so den tiefen Nebenknall.

Die Annahme, daß tiefere Töne eine längere Abklingezeit haben als hohe, habe ich in einer früheren Arbeit zu widerlegen versucht.[2])

Marbe hat sich meiner Anschauung, die aus gemeinsam mit Karl L. Schäfer angestellten Versuchen hergeleitet war, angeschlossen, daß nämlich die Abklingezeit für alle Töne annähernd gleich ist. Ist also unsere Ansicht richtig, dann ist die Frage nach der Tiefe des Nebengeräusches noch keineswegs gelöst.

Ein weiterer physiologischer Erklärungsversuch könnte in der Annahme bestehen, daß der Druck der ersten Schwingung auf die dreieckige Basilarmembran mit größerem Effekt auf die Basis als auf die Spitze wirkt und so die tiefen Töne stärker erklingen läßt.

Um eine physiologische oder psychologische Erklärung zu versuchen, muß man erst klar sein über den physikalischen Vorgang. Stumpf sagt in seiner Tonpsychologie im Jahre 1890, daß die Frage nach dem Knall nur gelöst werden kann auf Grund viel eingehenderer Versuche, als sie bis jetzt angestellt sind. Dies besteht auch heute noch zu Recht, denn solche eingehenden Versuche sind in den zwischenliegenden 28 Jahren meines Wissens nicht angestellt worden.

Beobachtungen beim Anhören kürzester Töne.

Zur genaueren Untersuchung des Knalls bediente ich mich einer Metallsirenenscheibe, auf der in konzentrischer Anordnung Reihen gleichgroßer und gleichdistanter Löcher ausgestanzt

1) Brücke, Pflügers Archiv 13. S. 224; vgl. auch C. Stumpf, Tonpsych. 2. p. 500ff.

2) O. Abraham, Zeitschr. f. Psych. 20.

sind, und zwar vom Zentrum zur Peripherie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 10 Löcher; die den einzelnen Reihen entsprechenden Radien waren:

für	die	10.	Löcherreihe	= 18,2 cm
„	„	7.	„	= 15,4 „
„	„	6.	„	= 14,0 „
„	„	5.	„	= 12,2 „
„	„	4.	„	= 11,2 „
„	„	3.	„	= 9,8 „
„	„	2.	„	= 8,3 „
„	„	1.	„	= 7,1 „

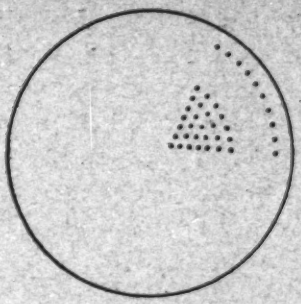


Fig. 1.

Die Schwingungszahlen der einzelnen Reihen erhält man durch folgende Überlegung: Ein voller Löcherkreis gibt einen Ton, dessen Schwingungsanzahl gleich der Anzahl der Löcher ist, multipliziert mit der Umdrehungszahl. Kreissegmente (die aus den Löchern und ihren Zwischenräumen gebildet werden) verhalten sich wie die vollen Lochkreise und bei gleicher Größe und gleichem Abstand der Löcher wie die zu ihnen gehörigen Radien. Die zu erwartenden Schwingungszahlen der obigen Lochreihen sind also durch die Verhältnisse der Radienzahlen ausgedrückt. Die musikalischen Tonnamen sind also einfach zu ermitteln, indem man die Radienzahlen in einer Tontabelle aufsucht und die ihnen zugehörenden Tonnamen, bei denen allerdings +- und —-Zeichen nicht fehlen dürfen, für sie einsetzt. So erhält man die richtigen Intervalle der Sirenentöne. Zum Vergleich der gehörten mit den berechneten Tönen braucht man nur die erste der berechneten Reihen auf die wirklich gehörte absolute Höhe zu bringen und die andern Reihen nach dieser zu transponieren.

Der akustische Eindruck von zwei angeblasenen Sirenenlöchern ist nur sehr wenig verschieden von dem Einlochknall. Bei diesem ist allerdings gar keine genaue Tonhöhe bestimmbar, aber auch bei zwei Löchern ist der Ton so mühevoll zu bestimmen und derart unter dem knallartigen Geräusch versteckt, daß ein wesentlicher qualitativer Unterschied zunächst nicht erkennbar ist. Wenn man von der Zweilochreihe anfangend auf die 3-, 4-, 5-, 6- und 7-Lochreihe weiterbläst, wird das Tonale immer stärker, das knallartige Nebengeräusch immer schwächer.

Vorversuch 1.

Löcher-anzahl	Radius	Berechn. Ton	Gehört. Ton	Nebenbeobachtungen
10	18,2	ais_3	ais_3	Ton hell u. ziemlich geräuschfrei
7	15,4	g_3	g_3	Ton matt mit deutlichem tiefen Knall
6	14,0	f_3 +	fis_3	Ton matt mit deutlichem tiefen Knall
5	12,2	dis_3 +	e_3 −	stärkeres knallartiges Geräusch
4	11,2	cis_3 +	cis_3 +	noch stärkerer Knall außer dem Frequenzton
3	9,8	h_2 +	c_3 −	der Frequenzton kaum heraushörbar, starker Knall
2	8,4	a_2 +	a_2	der Frequenzton fast ganz verdeckt von dem tiefen knallartigen Geräusch
1	7,1	—	tiefer Knall	kein höherer Ton herauszuhören; nur Knall in nicht genau bestimmbarer Höhe, etwa f_0

Vorversuch 2.

Löcher-anzahl	Radius	Berechn. Ton	Gehört. Ton	Nebenbeobachtungen
10	18,2	fis_3	fis_3	deutlich tonal, hell ohne Knall
7	15,4	dis_3	dis_3 +	etwas matter
6	14,0	d_3 −	d_3 −	matt, obertonarm, stark geräuschhaltig
5	12,2	h_2	h_2 +	stärkerer Knall, Ton noch deutlich
4	11,2	a_2 +	a_2 +	Ton heraushörbar. Geräusch stärker
3	9,8	g_2 +	gis_2 −	Ton nur mit Mühe heraushörbar und nur d. Vergleich mit anderen Reihen
2	8,4	f_2	f_2	tonal gefärbter tiefer Knall
1	7,1	dis_2	tiefer als f_0	Ton scheint über Oktave tiefer als in Reihe 2, ist aber nicht deutlich bestimmbar

Da „Knall" ein phänomenologischer, kein physikalischer Begriff ist, kann man ihn auf alle Fälle, in denen eine Knallempfindung eintritt, anwenden. Da wir annehmen, daß durch sieben angeblasene Sirenenlöcher sieben Schwingungen entstehen, scheint es berechtigt zu sein, auch vom Siebenschwingungsknall, ebenso vom Zweischwingungsknall zu sprechen, und, da schon bei zwei Schwingungen ein Ton entsteht, all-

gemein vom *„Tonknall“*. Im Gegensatz dazu soll der durch ein Sirenenloch entstehende Knall als *Einlochknall* bezeichnet werden, bis sich herausstellt, daß dem einen Loch nur eine einzige Schwingung entspricht.

Am besten müßte ja der Knall am Einlochknall zu studieren sein, da bei diesem kein störender Frequenzton vorhanden ist. Dafür ist es aber mißlich, daß man bei der durch ein einziges Sirenenloch hervorgebrachten Schwingung die Wellenlänge nicht kennt, sie also zu Berechnungszwecken nicht verwerten kann. Haben wir aber mehrere Sirenenlöcher, dann ist die Wellenlänge des Frequenztons eine Funktion des Lochabstandes, also leicht zu berechnen; die Beziehungen des Knalls zum Freqenzton lassen sich also zahlenmäßig ausdrücken.

Deshalb versuchte ich zunächst den *Tonknall* genauer zu studieren. Da bei diesem aber der Frequenzton sehr urteilsstörend wirkt, muß man versuchen, ihn fortzuschaffen; dies kann nur durch *Interferenz* geschehen. Wenn es gelingt, den Knall auch nach Ausschaltung des Frequenztons zu erhalten, dann wäre hiermit zugleich die physikalische oder physiologische Existenz des Knalles nachgewiesen, denn dann kann er kein psychisches Korrelat der (fortgenommenen) Tonschwingungen sein.

Aus nachstehenden Versuchen geht also deutlich hervor, daß es gelingt, bei ganz kurzen Tönen den tiefen Knall von dem Frequenzton durch Interferenz zu trennen; sobald der Interferenzapparat auf den Frequenzton und seinen ersten Oberton eingestellt war, ging *der Knall in allen Versuchen ohne den Frequenzton durch den Interferenzapparat hindurch.* Wenn man sonst (längerdauernde) Töne durch den Interferenzapparat schickt, hört man nach Ausschaltung des Grundtons die Obertöne, und nach ihrer Ausschaltung nur hohe Blasegeräusche. Bei der Ausschaltung eines längeren Tons geht nie etwas durchs Interferenzrohr, das tiefer ist als der Grundton des Klanges, weder ein Unterton noch ein Untergeräusch. *Kürzeste Töne unterscheiden sich hierin also qualitativ von länger dauernden.*

Wie aus der Tabelle weiterhin hervorgeht, waren Knalle in den Versuchen 1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12 zu hören; dagegen ergaben die Versuche 2, 3 und 8 nur stoßartige Blasegeräusche, die man nicht mehr als Knall ansprechen konnte. Der Knall läßt sich ungefähr durch ein kurzes blüb oder blib,

Versuche über den Tonknall.

Interferenzausschaltung des Frequenztons.

Vers.-Nr.	Loch-anzahl	Freq.-Ton	Länge der Interfer.-Röhren		Zahl	Zu hören ist
1	7	g_3	5,5	2,75	5	deutlicher tiefer *Knall* ungef. i. d. Gegend von g_0, kein Frequenzton
2	7	b_1	17,5	8,8	5	blasendes Geräusch, ungef. wie fft klingend, kein richtiger Knall, kein Frequenzton
	6	f_2	12,4	6,2	5	stoßartig. Geräusch, kein Knall
4	6	cis_3	7,8	3,9	5	tiefer *Knall* unter c_0
5	5	g_2	11,0	5,5	5	dumpfer schwacher *Knall*, unter c_0
6	5	fis_3	5,8	2,9	5	deutlicher scharfer *Knall*; Gegend g_0—a_0
7	4	as_2	10,4	5,2	5	deutlicher *Knall*, Höhe schwer bestimmbar, etwa d_0
8	4	g_1	22,0	11,0	5	blasendes Geräusch, kein deutlicher Knall
9	3	a_2	9,8	4,9	5	deutlicher scharfer *Knall*; Gegend c_0?
10	3	d_2	14,7	7,4	5	*knall*artiges Geräusch; Gegend unter c_0
11	2	f_1	24,6	12,3	5	tiefer *Knall* unter c_0
12	2	c_2	16,6	8,3	5	scharfer *Knall*; Gegend f_0—c_1

papp oder pipp sprachlich nachahmen, das Stoßgeräusch durch ein kurzes fft. In den analogen ersten vier Versuchspaaren, in denen die Löcheranzahl gleich war, hörte man immer dann einen Knall, wenn der Frequenzton höher, dagegen ein Stoßgeräusch, wenn er tiefer war. (Vgl. die Versuche 1, 4, 6, 7 mit 2, 3, 5, 8.) Je höher bzw. je kürzer der Frequenzton ist, um so deutlicher ist der Knall. In den letzten, den Drei- und Zweilochreihen wurden in den beobachteten Tonhöhen nur Knalle, keine Stoßgeräusche erzielt.

Um zu erkennen, ob die *Kürze* oder die *Höhe* des Frequenztons das Wesentliche für die Knallwahrnehmung ist, muß man zuerst die absolute Dauer der einzelnen Tonstöße berechnen; man erhält sie, indem man die absolute Zahl der vorhandenen Schwingungen dividiert durch die Schwingungszahl pro Sekunde.

So ergeben sich folgende Werte für die obige Tabelle.

		Absol. Dauer		Zu hören war
1.	$\frac{7}{g_3} =$	$\frac{7}{1625} =$	$\frac{1}{232}$	Knall
2.	$\frac{7}{h_1} =$	$\frac{7}{483} =$	$\frac{1}{69}$	Stoßgeräusch
3.	$\frac{6}{f_2} =$	$\frac{6}{683} =$	$\frac{1}{114}$	Stoßgeräusch
4.	$\frac{6}{cis_3} =$	$\frac{6}{1085} =$	$\frac{1}{161}$	Knall
5.	$\frac{5}{g_2} =$	$\frac{5}{767} =$	$\frac{1}{153}$	Knall
6.	$\frac{5}{fis_3} =$	$\frac{5}{1448} =$	$\frac{1}{289}$	Knall
7.	$\frac{4}{as_2} =$	$\frac{4}{861} =$	$\frac{1}{215}$	Knall
8.	$\frac{4}{g_1} =$	$\frac{4}{384} =$	$\frac{1}{96}$	Stoßgeräusch
9.	$\frac{3}{a_2} =$	$\frac{3}{861} =$	$\frac{1}{287}$	Knall
10.	$\frac{3}{d_2} =$	$\frac{3}{574} =$	$\frac{1}{191}$	Knall
11.	$\frac{2}{f_1} =$	$\frac{2}{342} =$	$\frac{1}{171}$	Knall
12.	$\frac{2}{c_2} =$	$\frac{2}{512} =$	$\frac{1}{206}$	Knall

Wir bekommen also Stoßgeräusche bei einer Tondauer von $\frac{1}{69}$, $\frac{1}{114}$, $\frac{1}{96}$ Sekunde, dagegen deutliche Knalle bei allen Tönen, die kürzer als $\frac{1}{150}$ Sekunde sind. Die Differenz dieser absoluten Ziffern mit den von mir vor 20 Jahren gefundenen ist durch die jetzt besseren Versuchsanordnungen, besonders durch die Ausschaltung des Frequenztons zu erklären.

Nicht die Höhe des Frequenztons ist also das Wesentliche für die Knallwahrnehmung; denn in den Versuchen 2 und 12, 3 und 10 haben wir gleiche Tonregionen des Frequenztones, hören aber in dem einen Fall einen deutlichen Knall, im anderen ein Stoßgeräusch; maßgebend für die Knallwahrnehmung ist vielmehr die *absolute Kürze des Frequenztons*, und es ergibt sich als allgemeines Resultat, daß der *Sirenenknall eine Dauerschwelle von ca.* $\frac{1}{150}$ *Sekunden hat.* Die Intensität des An-

blasens ist hierbei ohne Bedeutung; es zeigt sich nur, daß zu starkes Anblasen die Blasegeräusche vermehrt, zu schwaches Blasen die Intensität des Knalles in toto abschwächt. Die Übung, mit optimaler Intensität anzublasen, bekommt man übrigens sehr leicht.

Mit der Feststellung, daß ein Knall auch nach Ausschaltung des Frequenztons durch das Interferenzrohr geht, ist noch keine Klarheit gewonnen, ob der Knall erst physiologisch entsteht oder ob er schon physikalisch begründet ist. Denn die Annahme, daß die erste Welle des Frequenztons den Knall hervorbringt, der bei kürzesten Tönen hörbar, von längeren Tönen aber verschluckt würde (eine Ansicht, die der Brückeschen Anschauung (s. o.) nahe käme), ist auch für unsere Versuchsresultate noch möglich. Die erste Welle eines Tons muß ja, zum Teil wenigstens, *jedes* Interferenzrohr passieren, da ja erst nach ihrer Reflexion die Interferenz beginnen kann. Es ist also immerhin denkbar, daß durch den Impuls der ersten Frequenztonwelle der ganze Cortische Faserapparat angeregt wird und den Knall hervorbringt. Die gefundene Dauerschwelle für die Knallwahrnehmung wäre in ihrer Bedeutung dann allerdings nicht erklärt. Zur Untersuchung der Frage, ob die *erste Welle* des Frequenztons imstande sei, den Knall zu erzeugen, stellte ich einige Versuche an, die das Ziel hatten, die erste Schwingung des Frequenztons zu variieren.

Versuche über die Bedeutung der ersten Frequenztonschwingung für den Knall.

Ich verglich folgende Anordnungen der Sirenenlöcher:

1) ●●●● Der Ton beginnt und schließt stark.
2) ••●●•• Der Ton beginnt und schließt schwach.
3) ●●•• Beginn stark, Schluß schwach.
4) ••●● Beginn schwach, Schluß stark.

Fig. 2.

Das Resultat war, daß bei genügender Kürze des Frequenztons *jede* der angeblasenen Reihen einen Knall gab; nur die Stärke war in den einzelnen Reihen verschieden; bei weitem den stärksten Knall gab die Reihe 1; ihr folgte Reihe 3,

während die Reihen 2 und 4 schwächere Knalle zeigten. Gegen die Annahme, daß die erste Schwingung den Knall erzeugt, spricht, daß Reihe 1 einen stärkeren Knall gibt als Reihe 3, die beide die gleiche Größe des ersten Sirenenlochs haben, also auch dieselbe Intensität haben müßten. Es scheint vielmehr, daß hier die Gesamtintensität des ganzen Frequenztons für die Knallintensität in Betracht kommt. Der, allerdings geringe, Unterschied der Intensitäten in den Reihen 3 und 4 läßt dagegen wieder vermuten, daß die erste Schwingung doch von Wichtigkeit für die Knallentstehung ist. Aus Intensitätsunterschieden, zumal so geringfügigen aber, eine Theorie aufzubauen, ist eine mißliche Sache. Man muß also nach weiteren Beziehungen zwischen Frequenzton und Knall suchen, um die Ursache des Knalles zu eruieren.

Ich stellte deshalb Versuche an, ob überhaupt kurze *Töne*, d. h. regelmäßige Schwingungen für eine Knallempfindung erforderlich sind, oder ob man den Frequenzton etwa durch ein kurzes „*Frequenzgeräusch*" ersetzen kann. Geräusche sind auf der Sirenenscheibe dadurch hervorzubringen, daß man die Löcher in unregelmäßigen Abständen aufeinander folgen läßt. Bläst man eine solche Reihe an, dann erhält man ein Geräusch, in dem kein einzelner Ton bestimmbar ist, wohl aber eine gewisse Geräuschregion, die sich entsprechend der Rotation erhöht oder vertieft. Diesen Tonbezirk eines Geräusches kann man mit dem Ohr und mit akustischen Apparaten bestimmen und durch Interferenz ausschalten. Auch hierbei muß wieder der Bezirk der höheren Oktave der Geräuschregion durch Interferenz mitbeseitigt werden, weil diese sonst durch das Interferenzrohr hindurchgeht.

Versuche über den Geräuschknall.

Diese Versuche zeigen, daß es für eine Knallempfindung keinen Unterschied macht, ob ein ganz kurzer Ton oder ob ein kurzes Geräusch erklingt. Ist das Geräusch nur genügend kurz, dann nehmen wir einen deutlichen Knall wahr (papp, pipp), ist das Geräusch längerdauernd, dann erscheint ein Stoßgeräusch, einem fft vergleichbar.

Interferenzausschaltung des Frequenzgeräusches.

Vers.-Nr.	Lochanzahl	Tonbezirk	Ausschaltung durch 10 Röhren cm	Ausschaltung durch 5 Röhren cm	Akustischer Eindruck
1	8	d_2—g_2	zw. 14 u. 10	7 u. 5	Stoßgeräusch, kein deutlich. Knall
2	5	f_2—a_2	13 „ 9	7 „ $4^1/_2$	deutlicher Knall
3	5	b_1—dis_2	19 „ 14	10 „ 7	weiches Stoßgeräusch
4	5	g_2—h_2	12 „ 8	6 „ 4	deutlicher Knall
5	5	g_1—h_1	24 „ 16	12 „ 8	Stoßgeräusch
6	5	c_2—a_2	14 „ 9	7 „ $4^1/_2$	deutlicher Knall

Der „Geräuschknall" entspricht also phänomenologisch genau dem „Tonknall". Die absolute Zeitdauer der dargebotenen Geräusche erhält man wieder durch die Division der Löcheranzahl durch die Höhe des Geräuschbezirkes in Schwingungszahlen.

1. $= \frac{8}{581—775}$ Sekunden $= \frac{1}{85}$ (Stoßgeräusch)
2. $= \frac{5}{691—870}$ „ $= \frac{1}{156}$ (Knall)
3. $= \frac{5}{461—615}$ „ $= \frac{1}{107}$ (Stoßgeräusch)
4. $= \frac{5}{775—977}$ „ $= \frac{1}{175}$ (Knall)
5. $= \frac{5}{388—488}$ „ $= \frac{1}{88}$ (Stoßgeräusch)
6. $= \frac{5}{652—870}$ „ $= \frac{1}{152}$ (Knall)

Diese Berechnung zeigt, daß ein Stoßgeräusch noch bis $\frac{1}{85}$, $\frac{1}{107}$ und $\frac{1}{88}$ Sekunden hörbar war, während in den Versuchen 2, 4 und 6 bei $\frac{1}{156}$, $\frac{1}{175}$, $\frac{1}{152}$ Sekunden schon eine deutliche Knallwahrnehmung eintrat. *Der Knall hat also nach diesen Versuchen, gleichgültig, ob das akustisch Dargebotene ein Ton oder ein Geräusch war, eine Schwelle von ungefähr* $\frac{1}{150}$ *Sekunden.*

Diese Versuche machen es sehr unwahrscheinlich, daß die Knallempfindung der ersten Welle des Frequenztons bzw. des

Geräusches zuzuschreiben ist; denn die sonderbare Tatsache, daß für Ton und Geräusch eine und zwar dieselbe Dauerschwelle besteht, wäre durch diese Hypothese nicht erklärt.

Ein Experimentum crucis für die physikalische Natur des Knalles wäre der Versuch, den Knall durch Interferenz auszuschalten, den Frequenzton aber zu erhalten. Denn, was durch Interferenz auszuschalten ist, muß in der Luft vorhanden gewesen und kann nicht erst im Ohr entstanden sein. Um den Knall auszulöschen, ist es zweckmäßig, anstatt die ganze Tonreihe durch Interferenz durchzuprobieren, zuerst die ungefähre Tonhöhe des Knallbezirks durchs Gehör festzustellen. Da der Frequenzton hierbei stört, muß er provisorisch ausgeschaltet werden.

Versuche zur Höhenbestimmung des Knalles, d. h. der tiefen Knallkomponente im Tonknall.

1. Versuch.

Lochanzahl	Frequenzton	Übrig bleibt
4	gis_2	Knall in der
	Ausgeschaltet durch Interf.-	Gegend f_0
	Röhren 10,4 und 5,2	

Die berechnete absolute Zeit des Knalles $\frac{4}{gis_2} = \frac{4}{821} = \frac{1}{205} - gis_0$.

Nach Bestimmung der ungefähren Knallhöhe wird der Frequenzton wieder eingeschaltet, dagegen die Gegend um f_0 durch 10 Interferenzröhren von 55 bis 40 ausgeschaltet, um den Knall, wenn möglich, zu eliminieren.

Das Resultat war:

1. der *Frequenzton* war kaum hörbar, wahrscheinlich weil er als gis_2 der fünfte Oberton zu dem mitausgeschalteten e_0 war,

2. der *Knall* erschien etwa eine Oktave höher, wohl infolge von Obertönen. Deshalb wurde auch die f_1-Gegend ausgeschaltet. Nun blieb wieder ein tiefer Knall in der f_0- und noch tiefer gelegenen Tongegend zurück. Dieser war nicht völlig durch Interferenz zu beseitigen. Auch serienweise Einschaltungen kleiner Interferenzbezirke der Oktave F bis f_0 gaben keine merkliche Veränderung des akustischen Eindrucks.

2. Versuch.

Lochanzahl	Frequenzton	Übrig bleibt
6	cis_2	Knall in Höhe
	Ausgeschaltet durch	von c_0
	7,8 und 3,9	

Die absolute Zeit des Knalles $\frac{6}{1096} = \frac{1}{183} = fis_0$.

Wenn die Gegend um c_0 mit 70—50 cm großen Interferenzröhren ausgelöscht wurde, war auch, wie im vorigen Versuch, der Frequenzton als Oberton beseitigt; der Knall schien oktavenerhöht. Nach Auslöschung auch dieser Gegend blieb noch ein tiefer Knall in der c_0-Gegend zurück, der *nicht* durch serienweise Interferenzausschaltung zu beseitigen war. Die Knallhöhe ist allerdings sehr schwer zu bestimmen, da die Sirenentöne selbst sehr schwach sind und durch die lange Röhrendeckung noch erheblich geschwächt werden.

3. Versuch.

Lochanzahl	Frequenzton	Übrig bleibt
5	h_2	Knallhöhe
	Ausgeschaltet durch 10 Röhren	Gegend dis_0
	5 à 8,8 5 à 4,4	

Die absolute Zeit des Knalles $\frac{5}{977} = \frac{1}{195} = g_0$.

Wurde die Gegend dis_0 mit Röhren von 50—60 cm ausgeschaltet, dann schien wieder zuerst der Knall um eine Oktave erhöht. Nach Ausschaltung auch dieser Region blieb ein leiser tiefer Knall unter c_0 zurück. Dieser ist *nicht* durch serienweise Ausschaltungen fortzubringen.

4. Versuch.

Lochanzahl	Frequenzton	Übrig bleibt
2	g_2	Knallgegend
	Ausgeschaltet durch 10 Röhren	f_0—a_0
	5 à 11,0 5 à 5,5	

Die absolute Zeit des Knalles $\frac{2}{775} = \frac{1}{387} = g_1$.

a_0 wurde ausgeschaltet; darauf wurde ein höherer Knall in Gegend f_1 gehört. Nachdem auch diese Region ausgeschaltet war, blieb ein tiefer Knall in der Gegend d_0—f_0 zu

hören. Dieser ist durch serienweise Ausschaltungen der Gegend c_0—g_0 *nicht* zu beseitigen.

Wichtig für die Höhenbestimmung des Knalles ist auch folgender Versuch: Man *variiere* die Scheibengeschwindigkeit, nachdem man bei einer bestimmten Rotation den Frequenzton und die angrenzende Tongegend ausgeschaltet hat. Dann bemerkt man, daß der *Knall deutlich höher wird bei Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit*, tiefer bei Verlangsamung der Scheibe. Diese Höhenvariierung des Knalles ist nicht etwa den Frequenztönen zuzuschreiben, denn diese sind ja ausgeschaltet.

Wenn man diese Versuche zusammenfaßt, dann kommt man zu folgenden Ergebnissen:

a) Die Knallhöhe ist (auch nach Ausschaltung des Frequenztons) abhängig von der Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe.

b) Die Knallhöhe ist abhängig von der absoluten Dauer des Frequenztons. (Absolute Zahl der Schwingungen, dividiert durch die Schwingungsanzahl pro Sekunde.) Wie die Berechnungen ergeben, ist die Knallhöhe nicht gleich dem dieser Zahl entsprechenden Ton, sondern tiefer. Auch die in den ersten Versuchen (p. 62) ermittelten Knallhöhen ergeben genau dasselbe Resultat.

c) Der Knall ist durch Interferenz abzuschwächen; seine völlige Auslöschung gelingt jedoch nicht, denn zuweilen wird mit dem Knall auch der Frequenzton als Oberton ausgelöscht; doch auch bei Vermeidung des Obertonverhältnisses bleibt ein tiefer Knall zurück, der trotz serienweiser Interferenzeinschaltungen nicht zu beseitigen ist.

d) Der tiefe Knall ist obertonhaltig, denn nach Interferenzeinschaltung der schätzungsweise bestimmten Höhe wird das Knallgeräusch etwa eine Oktave höher.

Hiernach ist erwiesen, daß die *Knallhöhe abhängig ist von der Gesamtdauer des Frequenztons* oder des Frequenzgeräusches, gleichgültig, ob dieser aus zwei oder sechs Schwingungen besteht. Der *Knall ist ferner objektiv* vorhanden, denn er hat nachweisbare Merkmale eines physikalischen Luftschwingungsvorgangs.

Wie die physiologische Erklärung des Knalles ist, steht noch dahin; jedenfalls aber muß die Annahme, daß die erste

Welle des Frequenztons den Knall hervorbringt, nunmehr aufgegeben werden.

Versuche über den Einlochknall.

Wenn man ein einzelnes Sirenenloch bei ziemlich großer Scheibengeschwindigkeit anbläst, dann hört man einen trockenen, dumpfen Knall, der auffallend tief erscheint. Vermindert man die Rotationsgeschwindigkeit allmählich, dann wird der Knall zuerst deutlich tiefer; er verliert bei weiterer Vertiefung das spezifisch Festumrissene des Knalles (papp, pipp) und wird zum Stoßgeräusch (fft). Bei weiterer Verminderung der Drehgeschwindigkeit hört auch dieses Stoßgeräusch auf und dafür beginnt plötzlich ein Blasegeräusch, das mehrere Oktaven höher erscheint als vorher der Knall. Dieses Blasegeräusch wird bei stärkerer Verlangsamung der Scheibe tiefer, blasender und immer tonloser. Steigert man die Scheibengeschwindigkeit wieder, dann gelangt man über „Blasegeräusch“ und „Stoßgeräusch“ wieder zum Knall, der an Höhe immer mehr zunimmt. Beim kontinuierlichen Anblasen der schnell rotierenden Scheibe wiederholt sich natürlich der Knallvorgang mehrfach; um jedoch den Knall zu erzeugen, ist nur ein einmaliges Anblasen des Sirenenlochs erforderlich; *jede weitere Wiederholung ist unnötig.* Diese Tatsache ist wichtig für die spätere Erklärung.

Bläst man zwei gleich große Löcher an, von denen eins nahe der Peripherie, das andere nahe dem Zentrum liegt, so ergibt das *zentrale Loch jedesmal einen tieferen Knall als das periphere.* Bei mäßiger Rotationsgeschwindigkeit gibt das periphere Loch einen Knall, das zentrale ein Stoßgeräusch, bei ganz langsamer Rotation das periphere Loch ein Stoßgeräusch, das zentrale ein Blasegeräusch.

Blasegeräusch, Stoßgeräusch und Knall gehen also bei Variierung der Drehgeschwindigkeit der Scheibe ineinander über.

Zur genaueren Ermittlung der Höhe des Einlochknalles wurden noch einige Versuche angestellt. Zwei in verschiedener Entfernung vom Zentrum gelegene Löcher wurden zum Vergleich angeblasen. Die Geschwindigkeit der Scheibe war in jedem Versuch eine andere, aber konstant. Der Tonbezirk des Knalles wurde nach dem Gehör zu bestimmen versucht;

hierbei zeigte es sich, daß es viel leichter ist, die Tonhöhenregion zweier verschieden hoher Knalle zu ermitteln, als die eines einzelnen Knalles. Durch die Vergleichung beider drängt sich das Tonale wesentlich stärker auf.[1])

Höhenbestimmung des Einlochkanals.

Versuch	Kontr. Knall	Periph. Knall	Zentr. Knall	K : P	K : Z	P : Z
1	$a_2 = 860$	ca. $f_1 = 340$	ca. $f_0 = 170$	2,5	5,1	2,0
2	$c_2 = 512$	„ $c_1 = 256$	„ H = 121	2,0	4,2	2,1
3	$f_2 = 683$	„ $d_1 = 287$	„ $c_0 = 128$	2,4	5,3	2,2
4	$a_2 = 860$	„ $g_1 = 383$	„ $d_0 = 143$	2,2	6,0	2,7
5	$g_2 = 767$	„ $e_1 = 322$	„ $e_0 = 161$	2,4	4,8	2,0
6	$a_1 = 430$	tiefer Knall Höhe?	Stoßgeräusch	Durchschnitt		
7	$e_1 = 322$	Stoßgeräusch	Blasegeräusch	2,3	5,1	2,2
8	$g_1 = 383$	tiefer Knall Höhe?	Stoßgeräusch			

Man ersieht aus den ersten fünf Versuchen, daß das periphere Loch stets höhere Knalle ergab als das zentrale. Das Intervall der beiden geschätzten Höhenregionen P : Z betrug zweimal eine Oktave (Versuch 1, 5), zweimal eine None (Versuch 2 und 3), einmal (Versuch 4) eine Undezime. Im Durchschnitt ergab sich das Verhältnis von P : Z = 2,2 : 1. In den letzten Versuchen war die Knallhöhe nicht bestimmbar, weil der Vergleichsknall fehlte und weil die Knallregion sehr tief lag.

Woher stammt die Höhe des Einlochknalles? Man könnte zunächst vermuten, daß sie der Anzahl der Scheibenumläufe pro Sekunde entspricht, daß nämlich die Wellenlänge der Zeit vom Passieren eines Loches bis zum nächsten entspricht; dies wäre ein voller Umlauf. Diese Erklärung ist aber unmöglich, denn

1. ist die Umlaufszahl viel zu gering (4 bis 6 in der Sekunde), um einen hörbaren Ton zu bilden. Selbst eventuelle Obertöne eines solchen Tons würden zum großen Teil unter die Hörgrenze fallen. Der wirklich gehörte Knall läge etwa in der Gegend des 70. bis 80. Obertons;

1) Vgl. C. Stumpf, Tonpsych. 2. S. 501.

2. kann man die Knallhöhe erkennen, wenn man nur ein einziges Sirenenloch ohne Wiederholung anbläst. Der Abstand bis zum zweiten kommt also gar nicht in Betracht;

3. müßte, wenn der Scheibenumlauf maßgebend wäre, das zentrale Loch immer dieselbe Tonhöhe haben, wie das periphere Loch, denn die Umlaufszeit ist ja in beiden Fällen gleich groß; in den obigen Versuchen wurde aber gerade ermittelt, daß ausnahmslos das periphere Loch einen höheren Knall gab als das zentrale.

Die Zahl der Scheibenumläufe ist also für die Erklärung nicht zu verwenden.

Die Knallhöhe hängt vielmehr, wie aus den Versuchen unzweideutig hervorgeht, von der *absoluten Dauer des Knalles* ab; diese muß auch bei dem gleichgroßen zentralen Loch größer sein als bei dem peripheren. Das zentrale Loch war 7,1 cm, das periphere 15,4 cm vom Scheibenmittelpunkt entfernt; da sich nun die Umlaufszeiten wie die Radien verhalten, müssen auch die (gleichgroßen) Löcher, die ja gleichen Segmenten entsprechen, sich wie die Radien, in unserem Falle wie 15,4 : 7,1 oder wie 2,17 : 1 verhalten. Diese Zahlen stimmen wundervoll mit den oben gefundenen Intervallen der Knalle überein (vgl. Tabelle); P : Z war im Durchschnitt = 2,2 : 1.

Aus unserer Tabelle kann man auch ersehen, wie groß etwa die Wellenlänge des Knalles sein muß. Bei gewöhnlichen Sirenentönen (Frequenztönen) dauert jede Welle die Zeit, in der ein Loch + Abstand bis zum nächsten Loch vom Anblasestrom passiert ist. Beim Einzelloch fehlt diese Berechnung; man muß deshalb mit einer Kontrollreihe vergleichen. Angenommen, anstatt der Einzellöcher beständen zwei volle Reihen P und Z mit derselben Lochgröße und demselben Lochabstand wie in der Kontrollreihe K, dann verhielten sich die Tonhöhen wie die Radien. Wir hätten also: K : P : Z = 18,2 : 15,4 : 7,1. In Wirklichkeit haben wir aber für die Einlochknalle gefunden: K : P : Z = 18,2 : 8,2 : 3,6, d. h. wir haben für P und Z die *doppelt so großen* Wellenlängen gefunden, als wenn wir Reihen mit gleicher Lochgröße und gleichem Abstand gehabt hätten. Die Form der Welle würde demnach etwa so aussehen:

beim gewöhnlichen Sirenenton, wenn Lochgröße und Lochabstand gleich ist,

bei unserem Knall.

Um festzustellen, ob es sich hierbei um physikalische oder physiologische erst entstehende Eigentümlichkeiten handelt, versuchte ich wieder, den Knall durch Interferenz auszulöschen.

Leider gelang es nicht, hier völlige Klarheit zu erzielen. Wenn die gehörte Region ausgeschaltet wurde, schien zwar ein wesentlich höherer Knall durchs Interferenzrohr hindurchzugehen (Obertonregion); doch war dieser zu schwach, um in seiner Höhe bestimmt werden zu können.

Wenn aber der vermeintliche Grundton und sein Oberton mit je 10 Röhren ausgeschaltet wurde, verschwand zwar der Knall, aber er verschwand auch bei anderer Interferenzeinstellung, so daß nicht die Interferenz, sondern die Abschwächung durch die lange Röhrenleitung schuld an der Knallauslöschung war. Man durfte also nur wenige Interferenzröhren, etwa vier bis fünf anwenden. Mit dieser Anzahl wurde das ganze tiefe und mittlere Tongebiet durchprobiert, *ohne daß der Knall beseitigt* oder irgendwie abgeschwächt wurde.

Wie in den Versuchen über den Tonknall erwies sich auch hier, daß ein bestimmbares Dauermaximum für die Knallwahrnehmung besteht. Wird dies überschritten, dann haben wir keinen Knall mehr, sondern ein Stoßgeräusch und bei noch langsamerer Rotation ein Blasegeräusch.

Das Dauermaximum des Einschwingungsknalles kann wieder mit Hilfe der Kontrollreihe ausgerechnet werden, nachdem bekannt ist, daß das Durchschnittsverhältnis von P : K — (1 : 2,3) und Z : K (1 : 5,1) ist.

Im Versuch 6 war bei der Dauer des peripheren Knalles $\frac{2,3}{430} = \frac{1}{187}$ Sekunden noch ein Knall hörbar, während das zentrale Loch mit der Dauer von $\frac{5,1}{430} = \frac{1}{84}$ Sekunden ein Stoßgeräusch ergab. Im Versuch 7 zeigte schon das periphere Loch mit einer Geräuschdauer von $\frac{2,3}{322} = \frac{1}{140}$ Sekunden ein Stoßgeräusch. Im Versuch 8 war noch ein peripherer Knall hör-

bar bei einer Dauer von $\frac{2,3}{383} = \frac{1}{166}$, während am zentralen Loch bei $\frac{1}{75}$ Sekunden nur ein Stoßgeräusch entstand. Somit liegt die Dauerschwelle des Knalles zwischen $\frac{1}{84}$, $\frac{1}{140}$ und $\frac{1}{75}$ einerseits und $\frac{1}{187}$ und $\frac{1}{166}$ andererseits. Also auch für den Einlochknall ist die Dauerschwelle ungefähr $\frac{1}{150}$ Sekunden.

Alle drei Knallarten, auf die sich meine Versuche bezogen, der Tonknall, der Geräuschknall und der Einlochknall, verhalten sich also völlig gleichartig: alle drei Knallarten sind objektiv und physikalisch nachweisbar. Ihre Tonhöhe hängt ab von der absoluten Dauer der Lufterschütterung, ob diese nun durch einen Ton oder durch ein Geräusch oder durch eine einzige Schwingung ausgefüllt ist.

Für alle drei Knallarten besteht dasselbe Dauermaximum von ungefähr $\frac{1}{150}$ Sekunden.

Hiermit scheint mir die Akustik des Knalles klar zu sein: Bei ganz kurzen Tönen von wenigen (z. B. sechs) Schwingungen entsteht außer dem Frequenzton, der dem Abstand der Sirenenlöcher entspricht, ein Knall dadurch, daß die (sechs) Schwingungen zusammen als eine einheitliche Gleichgewichtsstörung der Luft wirken; die Knallhöhe hat nichts mehr mit der Höhe des Frequenztones zu tun, sondern nur mit dessen absoluter Dauer. Diese neue Einheit ist also als eine einzige Tonwelle aufzufassen. *Trotz der Mehrfachheit der Frequenztonschwingung ist also die Knallwelle eine einzige größere Welle.* Ebenso verhält es sich bei ganz kurzen Geräuschen; auch die wenigen Geräuschschwingungen werden als eine einzige Welle zusammengefaßt. Der Knall eines Einzellochs ist, da er sich in allem analog den erwähnten Knallarten verhält, ebenfalls als Einschwingungsknall aufzufassen, was im übrigen von vornherein wahrscheinlich war.

Mit dieser Anschauung (Fig. 3) würde sehr gut übereinstimmen, daß der Knall nicht völlig durch Interferenz auszulöschen ist; denn eine einzige Schwingung kann nie völlig durch Interferenz ausgetilgt werden.

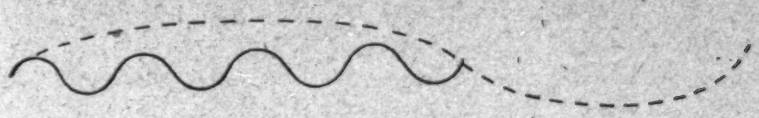


Fig. 3.

Daß eine geringe Anzahl von Schwingungen sich schon physikalisch zu einer Einheit zusammenfaßt, sieht man auch an den sogenannten Unterbrechungstönen. Diese kommen bekanntlich dadurch zustande, daß höhere Töne in irgendwelchem regelmäßigen Rhythmus durch Pausen unterbrochen werden. Karl L. Schäfer und ich haben gefunden[1]), daß die Unterbrechungstöne, deren Höhen der Anzahl der Unterbrechungen pro Sekunde entsprechen, objektiv sind, wie durch Resonatoren nachweisbar war.

Ich habe jetzt versucht, noch die Unterbrechungstöne rein herzustellen, indem ich die Primärtöne auslöschte. Dies gelingt ohne Schwierigkeit; sobald der Frequenzton (*A B*) ausgeschaltet ist, geht der Unterbrechungston (*A C*) kräftig durchs

Fig. 4.

Interferenzrohr. Nach meiner jetzigen Anschauung kann der physikalische Vorgang der Unterbrechungstöne nur der sein, daß auch hier der kurze Frequenzton (*A D*) als Einheit (Wellenberg) wirkt, dem sich dann die Pause (*D C*) (Wellental) anschließt. — Der Einzelimpuls der Unterbrechungstöne ist wieder ein Knall, der sich in keiner Weise von den untersuchten Knallarten unterscheidet. Läßt man den Knall etwa 10 bis 15 mal in der Sekunde aufeinanderfolgen, so entsteht ein Knarren, ähnlich dem Geräusch einer Weihnachtsknarre. *Knarren* ist also eine schnelle Folge von Knallen.

Es scheint mir selbstverständlich, daß der physikalische Vorgang der Zusammenfassung nicht an eine bestimmte Kürze eines Tons gebunden ist, sondern daß ganz allgemein eine

1) K. L. Schäfer u. O. Abraham, Pflügers Archiv 83. S. 207 ff., S. 536 ff.

Gruppe von Schwingungen eine große positive Welle (Wellenberg) hervorruft. Ob dieser Vorgang mit dem *Schalldruck* etwas zu tun hat, wage ich nicht zu entscheiden. Wenn die Größenordnung des Schalldruckes nicht eine ganz andere ist, könnte ich mir vorstellen, daß der konstante positive Druck eines Tons mit der darauffolgenden Pause zusammen bei häufiger Wiederholung einen Unterbrechungston, bei einmaligem Auftreten einen Knall hervorbringt.

Daß wir aber nur bei ganz kurzen Tönen die Einheitswelle wahrnehmen, muß in der Physiologie unseres Ohres begründet sein. Ebenso wie unsere Hörfähigkeit für diese Töne, d. h. für eine Anzahl großer Wellenlängen eine Grenze hat, besitzt sie eine solche für eine einzige Wellenlänge.

Mit der *Resonanztheorie des Hörens* können meine Versuche leicht in Einklang gebracht werden: die Wahrnehmung eines Tonknalles entsteht, indem außer den Fasern, die dem Frequenzton entsprechen, noch ein oder mehrere dem tiefen Knall zugehörende Fasern erregt werden. Analog erklärt sich die Wahrnehmung des Geräuschknalles und des Einschwingungsknalles. Einen besonderen Apparat für Knallwahrnehmung brauchen wir nach meinen Versuchen durchaus nicht anzunehmen.

Die vorliegenden Versuche beziehen sich nur auf den Sirenenknall. Es dürfte sich lohnen, sie an andersartigem Knallmaterial mit größerer Tonintensität nachzuprüfen; nur dürfte es schwierig sein, eine abgegrenzte Anzahl von Schwingungen so leicht wie bei der Sirene hervorzubringen.

(Eingegangen 7. Mai 1919.)

4. *Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen. II;* von *Reinhold Fürth.*

(Aus dem Physikalischen Institut der Deutschen Universität Prag.)

§ 1.

Eine unter dem gleichen Titel kürzlich veröffentlichte Arbeit des Verfassers[1]) beschäftigte sich mit folgendem, schon früher gestelltem Problem[2]): Ein in einer Flüssigkeit suspendiertes Einzelteilchen sinke unter dem Einflusse der Schwere herab und befinde sich gleichzeitig in Brownscher Bewegung. Mißt man diese durch die Abweichungen von der gleichmäßigen Fallbewegung durch Markieren der Passagezeiten des Teilchens durch die Horizontalstriche eines Rasters im Okular des Beobachtungsmikroskops, wie es zum ersten Male von E. Weiß[3]) bei der Beobachtung von Partikeln in Gasen durchgeführt wurde, so ergeben sich für die Beweglichkeit Werte, die mit den aus der mittleren Fallgeschwindigkeit nach der Stokesschen Formel, sowie aus der Brownschen Bewegung in horizontaler Richtung folgenden nicht übereinstimmen, und zwar immer zu kleine Werte. Der Grund für diese Abweichung wurde in der oben zitierten Arbeit schließlich darin gefunden, daß die Anwendung der entsprechenden Formel auf die naturgemäß bloß endliche Statistik einen systematischen Fehler im erwähnten Sinne hervorbringt.

Bevor ich jedoch diese Möglichkeit ins Auge faßte, schien es mir nicht ausgeschlossen, daß eine wirklich physikalische Ursache hinter dieser Anomalie stecke. Die beschriebene Methode nämlich beruht auf der Voraussetzung, daß die Brownsche Bewegung sich der gleichförmigen Fallbewegung einfach super-

1) R. Fürth, Ann. d. Phys. 59. S. 409. 1919.
2) R. Fürth, Ann. d. Phys. 53. S. 177. 1911.
3) E. Weiß, Wiener Ber. 120. (2a). S. 1021. 1911.

poniert. Wäre dies jedoch nicht der Fall, dann könnte die in vertikaler Richtung gemessene Brownsche Bewegung zu falschen Resultaten führen. Die Entscheidung darüber ließe sich nun am einfachsten so fällen, wenn es gelänge, ein und dasselbe Teilchen durch Veränderung der Feldkräfte mit verschiedenen mittleren Geschwindigkeiten fallen zu lassen und jedesmal die Brownsche Bewegung aus den Abweichungen von den gleichen Fallzeiten zu messen. Das kann z. B. so geschehen, daß das Teilchen mit einer elektrischen Ladung versehen und in ein homogenes vertikales elektrisches Feld mit veränderlicher Feldstärke gebracht wird. In Flüssigkeiten wäre eine solche Anordnung wohl mit Schwierigkeiten verbunden, leicht jedoch läßt sie sich in Gasen realisieren, wie es bei der bekannten Ehrenhaftschen Anordnung zur Messung der Ladung kleiner Einzelpartikel geschieht.

Mit einer solchen Anordnung wurden nun in der Tat Messungen dieser Art ausgeführt und ergaben, wie im folgenden gezeigt wird, das durchaus negative Resultat, daß ein systematischer Einfluß der mittleren Fallgeschwindigkeit auf die Brownsche Bewegung, soferne er nicht durch die Versuchsfehler überdeckt würde, nicht konstatiert werden kann. Wenn nun auch in meiner ersten Mitteilung der wahre Grund der Anomalie aufgefunden wurde, also obiges Resultat für dieses Problem nicht mehr sonderlich ins Gewicht fällt, sollen doch im folgenden die Ergebnisse dieser meiner Untersuchungen, sowie der einiger anderer Autoren näher diskutiert werden, in dem Sinne nämlich, ob sich überhaupt aus der Messung der Brownschen Bewegung kleiner Partikel in einem Gase etwas über die Größe dieser Partikel und daher auch ihrer Ladung aussagen, speziell ob sich daraus auf die Existenz und die Größe eines elektrischen Elementarquantums schließen läßt.

§ 2.

Die experimentelle Anordnung war der von Ehrenhaft verwendeten im Prinzip nachgebildet. Sie ist im Grundrisse in nachfolgender Figur in den Hauptbestandteilen maßgetreu, in den Nebenbestandteilen bloß schematisch dargestellt. Auf der optischen Bank von Zeiß befindet sich links die mit 120 Volt Gleichstrom gespeiste Bogenlampe *B*, mit vorgesteckter Blende *Bl.* Das Licht wird durch die beiden achromatischen Linsen

L_1 und L_2 des Zeißschen Spaltultramikroskops und schließlich durch das Mikroskopobjekt L_3 (Zeiß *AA*) in einem engen, nahezu parallelen Strahlenbündel konzentriert, nachdem es die beiden Wasserkühlungen W_1 und W_2 durchlaufen hat. Hier gelangt es in den Kondensator *K*, der an dem mit mikrometrischer Höhenverstellung versehenen Stativ *St* befestigt ist. Der Kondensator war dem von E. Weiß verwendeten und l. c. p. 1055 beschriebenen ähnlich gebaut. Der Abstand seiner genau horizontal gestellten Platten betrug 2,22 mm. Es wurde durch Justierung des Strahles darauf Rücksicht genommen, daß er, ohne zu streifen, zwischen den Kondensatorplatten hindurchgehen konnte. Durch das Glasrohr *G* mit Hahn konnten die Partikel

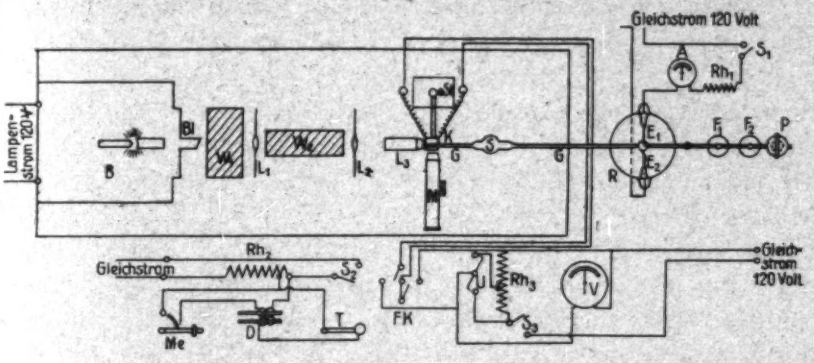


Fig. 1.

in den Kondensator eingeleitet werden, wenn ein an der entgegengesetzten Seite einmündendes kurzes Rohrstück mit Hahn geöffnet war. Die Beobachtung geschah mit dem horizontal gestellten Beobachtungsmikroskop *M* mit Objektiv *AA* und Okular 4 (Zeiß). Dieses war mit einem Reichertschen Okularraster mit quadratischer Teilung in 15 × 15 Intervalle zur Messung der Passagezeiten versehen. Durch Vergleich mit dem Zeißschen Objektmikrometer wurde ein Teil des Mikrometers zu $88 \cdot 10^{-4}$ cm festgestellt.

Zur Beobachtung gelangten zunächst Au- und Ag-Teilchen, die durch Zerstäubung im Gleichstromlichtbogen zwischen den Elektroden E_1, E_2 in dem Ehrenhaftschen Rezipienten *R* in trockener atmosphärischer Luft hergestellt waren. Sie wurden mittels der kleinen Druckpumpe *P* durch die mit H_2SO_4 gefüllten Waschflaschen F_1 und F_2 aus dem Rezipienten in den

Kondensator hinübergeblasen. Später wurden Hg und Paraffinölpartikel zur Beobachtung verwendet, die durch Verdampfen und Wiederkondensieren in dem kugeligen Hartglasrohr S durch Erwärmung mit einem Bunsenbrenner erzeugt und ebenfalls mittels der Pumpe P in den Kondensator geleitet wurden, nachdem die Luft in S sich abgekühlt hatte.

Die variable Spannung konnte dem Kondensator zwischen 0 und 120 Volt durch einen mit dem Ruhstratwiderstand Rh von einer Akkumulatorenbatterie hergestellten Nebenschluß zugeführt und mit dem Siemens-Halskeschen Präzisionsvoltmeter V gemessen werden. Durch Umlegen des Umschalters U konnte entweder die variable oder die volle Spannung von 120 Volt nach Belieben angelegt werden. Durch den mit einem Pedal betätigten Kommutator FK konnte das Feld am Kondensator momentan umgekehrt werden, bzw. in der Ruhestellung durch Kurzschluß der Kondensatorplatten zum Verschwinden gebracht werden.

Die Passagezeiten wurden vermittelst des Siemensschen elektromagnetischen Doppelstiftschreibers D registriert, dessen erster Hebel durch ein sekundenschlagendes Metronom, mit Hg-Kontakt, dessen zweiter Hebel durch den Morsetaster T vom Beobachter betätigt wurde. Die Passagezeiten konnten so auf 0,1 Sek. genau bestimmt werden.

Die durch Zerstäubung im elektrischen Lichtbogen hergestellten Teilchen erwiesen sich immer als geladen; ebenso die durch Verdampfen und Wiederkondensieren hergestellten Hg-Teilchen. Die Ölpartikel dagegen mußten durch Bestrahlen mit einem Radiumpräparat geladen werden.[1])

Obzwar mit Dunkelfeldbeleuchtung beobachtet wurde, verwendete ich doch nur Teilchen mit Radien in der Größenordnung 10^{-4} cm, also noch im mikroskopischen Gebiet, um nicht die Fallbewegung gegen die Brownsche zu stark zurücktreten zu lassen. Auch verband ich damit den Vorteil, über die Gestalt der Teilchen völlig sicher zu sein. Obzwar bei den zur Messung allein verwendeten Hg- und Öltröpfchen von vornherein eine andere als die Kugelgestalt nicht zu erwarten war,

---

1) Für ihre freundliche Mithilfe beim Aufbau der Versuchsanordnung bin ich Frl. phil. S. Ramler zu Danke verpflichtet.

wurde doch eine mikroskopische Auflösung der durch Verdampfen hergestellten Hg- und Ölpartikel vorgenommen. Jene wurden auf einem Objektträger niedergeschlagen und mit dem Achromaten 1/7″ N. A. 0,9 homogene Immersion, Zeiß und Okular 4 aufgelöst. Sie erschienen als vollständig kugelig mit metallischer Oberfläche in allen Größen zwischen 10^{-5} und $2{,}10^{-4}$ cm Radius. Diese, ebenso auf einem Objektträger niedergeschlagen, löste ich mit einer Wasserimmersion D^* N. A. 0,75 Zeiß, Okular 4 auf, wobei sie sich ebenfalls als völlig kugelig erwiesen. Ihre Radien schwankten zwischen 0,4 und $9 \cdot 10^{-4}$ cm.

Die Beobachtungen wurden in der Regel so vorgenommen, daß ein geeignetes Teilchen durch vorsichtiges Öffnen der Hähne in die Mitte des Gesichtsfeldes gebracht und durch Umlegen des Pedals im elektrischen Felde mit einer bestimmten Spannung abwechselnd durch das ganze Gesichtsfeld gehoben und gesenkt wurde, wobei jeder Durchgang durch einen Horizontalstrich des Rasters mittels des Morseschreibers markiert wurde. Dann wurde die Spannung geändert und das Verfahren wiederholt. Es gelang so mitunter, an einem Teilchen bis zu 12 verschiedene Steig- und Fallgeschwindigkeiten zu messen. Im allgemeinen war die gesamte Beobachtungszeit für ein Einzelteilchen beschränkt durch den Umstand, daß die Teilchen eine langsame Konvektion in horizontaler Richtung im Sinne der Lichtstrahlen aufwiesen[1]) und daher aus dem Gesichtsfelde entschwanden. Durch Erzeugung eines kleinen Überdrucks im Rezipienten und vorsichtiges Öffnen der Hähne konnte das Teilchen meist wieder in die Mitte des Feldes gebracht werden.[2])

§ 3.

Im folgenden gebe ich das gesamte, aus den Meßprotokollen sich ergebende Beobachtungsmaterial in den Tabb. 1 und 2 wieder und zwar enthält Tab. 1 die Beobachtungen an Hg-Teilchen und Tab. 2 die an Ölteilchen, wie es im vorhergehenden Paragraphen eingehend beschrieben wurde. Die Diffusionskoeffizienten wurden nach der Schrödinger-

1) Doch dürfte es sich nicht um eine Lichtdruckwirkung handeln, da alle Teilchen verschiedener Größe gleich schnell wanderten.

2) Vgl. auch E. Weiß, l. c. S. 1027.

Smoluchowskischen Formel[1]) für die mittlere einseitige Erstpassagezeit aus den gemessenen Passagezeiten berechnet:

$$2D = b^2 \left\{ \left(\frac{\overline{1}}{t}\right) - \frac{1}{\bar{t}} \right\}, \tag{1}$$

in der b die Länge eines Intervalles, t die Passagezeiten, und die Querstriche Mittelwerte über viele Zeiten bedeuten. Es ist vielleicht nicht überflüssig, hier nochmals zu erwähnen, daß die zum erstenmal von E. Weiß, l. c. p. 1029 angegebene Formel für die Größe $2D$ (bei Weiß $\overline{\lambda^2}$ genannt) aus der obigen Formel durch eine einfache Umformung hervorgeht. Jedoch ist, abgesehen von der bedeutend einfacheren Berechnung nach Formel (1), im Gegensatze zu der von Weiß bei der bekannten Empfindlichkeit derartiger numerischer Rechnungen die Anwendung der direkt aus der Differentialgleichung der Brownschen Bewegung folgenden Formel (1) prinzipiell allein einwandfrei.[2]) Es wäre daher zu wünschen, daß bei derartigen Berechnungen ein für allemal diese Formel Verwendung finden würde.

Als Längeneinheit ist im folgenden der Einfachheit halber ein Rasterintervall zugrunde gelegt. Die Tabellen enthalten in der ersten Spalte die Protokollnummer[3]), in der zweiten die mittlere Passagezeit $\bar{t}$, für die jeweils angelegte Spannung, mit dem Vorzeichen + bzw. −, wenn die Bewegung nach abwärts oder nach aufwärts erfolgte, in der dritten Kolonne die nach Formel (1) berechneten $2D$, die für die Brownsche Bewegung charakteristisch sind, in der vierten die Anzahl zu der betreffenden Serie gehörigen einzelnen t-Werte. Innerhalb jeder Protokollnummer sind die Beobachtungen nach wachsender Fallzeit geordnet.

Aus dem mitgeteilten Material geht wohl mit Deutlichkeit hervor, daß ein systematischer Einfluß der mittleren Fall- bzw. Steiggeschwindigkeit auf die Brownsche Bewegung nicht konstatiert werden kann, sofern er nicht etwa durch die nicht unbeträchtlichen Versuchsfehler, die in der Natur der Sache liegen,

---

1) E. Schrödinger, Phys. Zeitschr. 16. S. 289. 1915. M. v. Smoluchowski, Phys. Zeitschr. 16. S. 319. 1915.

2) Vgl. auch E. Schrödinger, a. a. O. S. 295.

3) Jede Nummer bezieht sich auf Beobachtungen an einem individuellen Teilchen.

Tabelle 1. Hg.[1])

Nr.	$\bar{t}$	$2D$	n
1	− 3,25	0,025	35
	− 0,95	0,032	30
	+ 0,816	0,027	19
	+ 2,052	0,018	31
	+10,900	0,013	9
2	− 2,972	0,061	32
	− 1,511	0,047	36
	− 1,057	0,069	37
	+ 0,906	0,028	33
	+ 1,222	0,030	32
	+ 2,112	0,048	32
3	− 7,180	0,0017	41
	− 2.875	0,0046	40
	− 1,485	0,0040	39
	+ 1,278	0,0156	36
	+ 2,085	0,0071	39
	+ 3,687	0,0080	40
	+17,765	0,0070	17
4	− 6,926	0,048	31
	− 2,837	0,010	33
	− 1,162	0,027	42
	+ 1,032	0,019	41
	+ 2,412	0,025	33
	+ 5,355	0,015	20
5	− 2,440	0,0095	40
	+ 1,715	0,0154	41
	+12,967	0,0066	6
6	− 3,546	0,0087	17
	+ 2,350	0,0078	38
7	− 5,992	0,025	12
	− 1,557	0,017	35
	+ 1,355	0,016	36
	+ 4,488	0,020	13
8	− 2,741	0,039	17
	− 1,385	0,023	33
	+ 1,270	0,013	33
	+ 2,353	0,028	15
12	− 1,535	0,072	37
	+ 1,482	0,053	39

Tabelle 2. Paraffinöl.[1])

Nr.	$\bar{t}$	$2D$	n
18	− 6,900	0,011	27
	− 5,850	0,019	38
	− 2,562	0,012	42
	− 0,924	0,036	37
	− 0,581	0,029	42
	+ 0,495	0,062	41
	+ 0,759	0,028	41
	+ 1,210	0,006	41
	+ 2,023	0,012	35
	+ 2,669	0,011	32
	+ 5,021	0,013	42
19	− 5,708	0,018	12
	− 3,374	0,021	35
	− 1,227	0,017	41
	+ 0,985	0,019	40
	+ 2,157	0,014	35
	+ 3,521	0,027	14
20	− 4,484	0,018	32
	+ 2,641	0,022	32
	+ 4,442	0,015	40
	+ 5,060	0,026	10
21	− 2,400	0,020	12
	− 1,200	0,045	31
	+ 1,173	0,071	33
	+ 1,833	0,061	21
	+ 8,929	0,030	31
22	− 4,280	0,014	25
	− 3,142	0,016	38
	+ 1,274	0,019	41
	+ 1,837	0,014	35
23	− 0,921	0,023	48
	+ 0,738	0,028	52
	+ 7,570	0,018	33
24	− 2,276	0,025	49
	+ 1,056	0,009	53
	+ 3,971	0,008	21
25	− 6,400	0,023	31
	− 1,583	0,016	12
	+ 0,952	0,012	31
	+ 1,361	0,015	33
26	− 8,380	0,006	5
	− 3,876	0,022	33
	+ 1,791	0,017	34
	+ 2,629	0,021	7
27	− 1,468	0,038	37
	+ 1,311	0,053	36
28	− 1,621	0,039	14
	+ 0,973	0,031	44
	+ 0,919	0,028	43
	+ 1,500	0,035	14
30	− 1,518	0,025	34
	+ 1,155	0,027	40

1) Die Serien 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 29, die weniger als 60 Einzelbeobachtungen enthalten, wurden zur Berechnung der Brownschen Bewegung wegen zu geringer Statistik nicht verwendet.

verdeckt wird. Man überzeugt sich leicht, daß eine bessere Übereinstimmung zwischen den zu einem Einzelteilchen gehörigen verschiedenen D-Werte mit der erreichten Zahl von Beobachtungen nicht zu erzielen ist, wenn man das von E. Schrödinger, a. a. O. S. 295 entwickelte Präzisionsmaß anlegt. Es soll der mittlere Fehler des Diffusionskoeffizienten ungefähr $\sqrt{2/n}$ betragen, wenn n die Anzahl der Beobachtungen einer Serie bedeutet. Daraus folgt für unseren Fall im Mittel etwa 25 Proz. mittlerer Fehler.

Auch der Sinn der Bewegung (nach oben oder nach unten) hat, wie ersichtlich, auf die Größe D keinen systematischen Einfluß.

§ 4.

Um die Resultate des vorigen Paragraphen zu bekräftigen, habe ich noch außer meinen eigenen Beobachtungen die zweier anderer Autoren einer Durchsicht unterzogen, die mit derselben Versuchsanordnung, aber anderem Teilchenmaterial gearbeitet haben.

Es mögen zunächst die Resultate dieser Berechnungen an den Versuchsergebnissen von E. Weiß mitgeteilt werden, die in der bereits wiederholt zitierten Arbeit enthalten sind. Von den veröffentlichten Meßprotokollnummern wählte ich aus Tabb. 2 und 4 diejenigen Serien aus, die mehr als 30 Einzelbeobachtungen enthalten und rechnete für jede die Größe $2D$ (bei Weiß $\overline{\lambda^2}$ genannt), einmal aus den Fallzeiten (F), einmal aus den Steigzeiten (S) nach Formel (1) aus. In der zitierten Arbeit sind immer nur die Fallzeiten zur Berechnung der D verwendet worden. Die folgende Tab. 3 enthält die Resultate dieser Berechnung. Das Material der Teilchen war Silber mit Radien in der Größenordnung 10^{-5} cm, durch Zerstäuben im elektrischen Gleichstromlichtbogen in trockener Luft (Tab. 2 von Weiß) oder reinem Stickstoff mit nachheriger Überschmelzung im elektrischen Ofen (Tab. 4 von Weiß) hergestellt. Die erste Spalte der folgenden Tabelle enthält die bei Weiß angegebene Protokollnummer, die zweite und dritte Spalte die mittlere Fall- bzw. Steigzeit, die vierte und fünfte die aus den Fall- bzw. Steigzeiten errechneten Diffusionskoeffizienten, die sechste und siebente Spalte die jeweilige Anzahl der Beobachtungen. Als

Längeneinheit ist wiederum ein Teil des dortselbst verwendeten Okularmaßstabes zugrunde gelegt. Die Serien sind nach steigenden Fallzeiten geordnet.

Tabelle 3.

Nr.	$\bar{t}_F$	$\bar{t}_S$	$2D_F$	$2D_S$	n_F	n_S
18 II	7,27	1,51	0,0024	0,0033	30	32
48 II	7,86	1,506	0,0012	0,0039	36	36
20 IV	8,09	5,00	0,0011	0,0020	89	88
52 II	8,37	2,46	0,0014	0,0015	63	64
53 II	8,80	5,60	0,0019	0,0016	42	51
19 IV	9,08	5,49	0,0011	0,0021	36	37
14 IV	10,01	4,40	0,0020	0,0027	39	39
21 IV	10,29	3,39	0,0023	0,0018	34	40
8 IV	10,58	4,53	0,0027	0,0025	52	50
12 II	12,90	2,54	0,0023	0,0056	44	44
17 IV	13,11	6,10	0,0065	0,0021	52	52
1 IV	13,62	3,86	0,0028	0,0020	37	38
3 IV	13,64	3,52	0,0028	0,0027	58	55
6 IV	13,72	3,80	0,0027	0,0027	84	72
2 IV	13,88	5,21	0,0031	0,0023	38	38
23 IV	15,79	3,57	0,0018	0,0027	32	30

Auch hier kann wohl, wie man aus der Tabelle ersieht, von einem systematischen Einfluß der mittleren Fallzeit oder des Sinnes der Bewegung nicht geredet werden. Die Differenzen zwischen D_F und D_S sind in acht Fällen negativ, in sieben Fällen positiv und in einem gleich Null. Gleichzeitig fällt auch hier sofort die große Unsicherheit bei der Bestimmung von D auf, die sich in den im allgemeinen beträchtlichen Unterschieden zwischen D_F und D_S zeigt, eine Tatsache, die, wie aus einer Bemerkung auf p. 1038 der Weißschen Arbeit hervorgeht, scheinbar vom Verfasser übersehen worden ist. Die Wichtigkeit, die man aber gerade diesem Umstande bei der Anwendung dieser Berechnungen auf die Ermittlung der Existenz einer Atomistik der Elektrizität zusprechen muß, soll im folgenden noch näher beleuchtet werden.

§ 5.

Dieselben Resultate lassen sich aus den Beobachtungen von Frl. M. Vogl entnehmen, die mit der gleichen Versuchsanordnung Goldteilchen in Luft beobachtete. In dieser Arbeit wird von der Verfasserin ebenfalls festgestellt, daß die aus den Fall- und Steigzeiten berechnete Brownsche Beweglichkeit im

allgemeinen verschieden ausfällt, der Grund dafür wird aber einer Abweichung der Teilchenform von der Kugelgestalt zugeschrieben, der sicherlich nicht stichhaltig ist. Wie ich mich selbst gelegentlich durch mikroskopische Auflösung solcher Au-Partikel überzeugte, und wie es aus den Arbeiten von F. Ehrenhaft hervorgeht, sind solche Au-Partikel durchwegs metallische Kugeln.

Die Beobachtungen sind in zwei Tabellen mitgeteilt, von denen die erste durch Beobachtungen über das ganze Gesichtsfeld des Mikroskops, die zweite durch solche in der Mitte des Gesichtsfeldes gebildet werden. In der ersten sind die Beweglichkeiten B, die mit den D durch die Einsteinsche Relation

$$D = \frac{RT}{N} \cdot B \tag{2}$$

zusammenhängen, in der Mehrzahl der Fälle aus den Steigzeiten berechnet größer als aus den Fallzeiten, in der zweiten ist es umgekehrt. Der Grund hierfür wird von der Verfasserin in der zu großen Nähe der Kondensatorplatten im ersten Falle vermutet. Dieser Ansicht kann ich mich nicht anschließen, da aus meinen eigenen in § 3 wiedergegebenen Messungen die im allgemeinen weit mehr Beobachtungen enthalten, ein solcher systematischer Einfluß nicht hervorgeht, obzwar auch hier über das ganze Gesichtsfeld beobachtet wurde. Mir scheint vielmehr eine durch die geringe Anzahl von Beobachtungen in jeder einzelnen Serie und die geringe Anzahl der Serien überhaupt sehr leicht entstanden zu denkende Zufälligkeit vorzuliegen. Fassen wir die Resultate sämtlicher von Frl. Vogl[1]) berechneten Serien zusammen, die mehr als 15 Einzelbeobachtungen enthalten, und legen sie in folgender Tab. 4 nieder, die genau so gebaut ist, wie Tab. 3, mit dem Unterschied, daß sie nicht die Größen $2D$, sondern B im absoluten Maß enthalten, so können wir auch hier weder einen systematischen Einfluß der Größe der mittleren Geschwindigkeit noch ihres Sinnes auf die Beweglichkeit konstatieren, wohl aber auch hier wiederum ein beträchtliches Fehlerintervall.

---

1) M. Vogl, Wien. Ber. 122. (2a). S. 1885 ff. 1913.

Tabelle 4.

Nr.	$\bar{i}_F$	$\bar{i}_S$	$B_F \cdot 10^{-7}$	$B_S \cdot 10^{-7}$	n_F	n_S
32	2,47	5,81	0,79	0,68	19	17
23	2,05	3,89	1,80	1,52	20	20
8	4,09	4,52	0,88	0,69	21	23
13	4,64	5,48	1,06	1,26	43	42
15	5,88	6,31	0,99	1,92	16	18
29	6,38	6,89	1,07	0,80	73	67
27	6,92	4,34	1,89	1,68	40	42
31	7,17	3,25	1,25	0,77	23	24
14	7,95	3,46	1,54	1,87	21	24
20	9,35	2,98	0,92	1,28	18	20
2	16,53	5,68	1,03	1,48	19	19
7	17,64	3,19	0,60	1,00	17	16

§ 6.

Durch die Erörterungen der vorhergehenden Paragraphen ist die spezielle Aufgabe, die zur Anstellung der Beobachtungen Anlaß gab, erledigt. Im folgenden soll nun aber noch das Material zur Bestimmung der Absolutwerte der Beweglichkeit und der Ladung der Teilchen ausgenützt werden.

Aus den in den Tabb. 1 und 2 mitgeteilten Werten für die Diffusionskoeffizienten lassen sich vermittelst Formel (2) die Beweglichkeiten B der Teilchen im absoluten Maß bestimmen. Um eine Kontrolle über ihre Richtigkeit zu erhalten, vergleichen wir sie mit denjenigen, die sich aus der gleichförmigen Fall- bzw. Steiggeschwindigkeit vermittelst der Stokesschen Formel einerseits, mit der von Cunningham korrigierten Formel anderseits berechnen lassen (die letztere für den Spezialfall $f = 0$), wobei im Auge behalten werden möge, daß hiermit keineswegs beabsichtigt ist, eine Entscheidung zwischen diesen beiden Formeln herbeizuführen.

Kombinieren wir das Stokessche Gesetz

$$B = \frac{1}{6\pi a \zeta}, \tag{3}$$

worin a den Radius des kugeligen Partikels und ζ den Reibungskoeffizienten des Gases bedeuten, mit den die Beweglichkeit definierenden Gleichungen

$v = Bmg$ (m: Masse des Partikels, g: Schwerebeschleunigung)

und

$$m = \frac{4\pi a^3 \sigma}{3} \quad (\sigma: \text{Dichte des Partikels}$$

so ergibt sich

$$B = \frac{1}{\sqrt{A}\cdot(6\pi\zeta)^{3/2}}, \tag{4}$$

worin

$$A = \frac{3v}{4\pi\sigma g}$$

bedeutet.

Unter Verwendung der Cunninghamschen Korrektur verwandelt sich (3) in

$$B = \frac{1}{6\pi a\zeta}\left(1 + 0{,}815\,\frac{l}{a}\right) \tag{3'}$$

(l: mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle)

und aus (4) wird

$$B = \frac{1}{(12\pi\zeta^3 A^2)}\{0{,}815\,l + \sqrt{(0{,}815\,l)^2 + 24\pi\zeta A}\}^3 \tag{4'}$$

die für verschwindendes l in (4) übergeht.

Durch die Formeln (4) bzw. (4') erscheint B als Funktion von v dargestellt bei bekanntem Material der Teilchen und des umgebenden Gases. Direkt wurde jedoch v, die mittlere Fallgeschwindigkeit im Schwerefelde allein, nur bei einigen Teilchen gemessen, dagegen ergab sie sich indirekt aus den stets gemessenen Fall- und Steigzeiten in elektrischen Feldern, die dem Schwerefelde einmal in gleicher und einmal in entgegengesetzter Richtung, aber beidemal mit gleicher Intensität superponiert waren.

Nennen wir diese v_f und v_s, so ergibt sich

$$v_f = B(eE + mg), \qquad v_s = B(eE - mg),$$

wobei e die Ladung des Teilchens und E das konstante elektrische Potentialgefälle bedeuten.

Aus dieser Gleichung folgt einerseits

$$v_f - v_s = 2Bmg = 2v, \tag{5}$$

anderseits die später zu verwendende Gleichung

$$v_f + v_s = 2BeE \tag{6}$$

zur Bestimmung von e.

Vermittelst der Formel (4) oder (4') und (5) wurde nun für die Teilchen der Tabb. 1 und 2 einerseits die Beweglichkeit B_{St} und B_C, anderseits aus Formel (2) die Beweglichkeit B_{fr}

berechnet und in den folgenden Tabb. 5 für Hg und 6 für Öl niedergelegt. Dabei wurden für die Konstanten folgende Werte zugrunde gelegt:

$l = 95 \cdot 10^{-7}$, $\xi = 19 \cdot 10^{-5}$, $R = 8{,}315 \cdot 10^{7}$, $N = 60{,}5 \cdot 10^{22}$,
$T = 291$, $\sigma_{Hg} = 13{,}55$, $\sigma_{Öl} = 0{,}867$ (vgl. Teil I).

Tabelle 5.

Nr.	$v \cdot 10^4$	$B_C \cdot 10^{-8}$	$B_{Br} \cdot 10^{-8}$	$B_{St} \cdot 10^{-8}$
12	1,02	39,0	0,510 bis 0,691	1,090
8	2,80	7,50	0,122 „ 0,371	0,658
4	3,34	5,98	0,096 „ 0,464	0,603
7	3,87	4,81	0,154 „ 0,236	0,560
3	5,47	2,97	0,019 „ 0,145	0,471
6	6,42	2,41	0,075 „ 0,084	0,434
2	6,60	2,34	0,270 „ 0,589	0,429
5	7,59	1,96	0,064 „ 0,148	0,400
1	7,74	1,92	0,125 „ 0,308	0,396

Tabelle 6.

Nr.	$v \cdot 10^4$	$B_C \cdot 10^{-8}$	$B_{Br} \cdot 10^{-8}$	$B_{St} \cdot 10^{-8}$
28	2,67 bis 2,20	3,40 bis 4,00	2,69 bis 3,74	1,695 bis 1,868
21	0,85 „ 5,70	8,90 „ 1,88	6,90 „ 1,96	3,005 „ 1,160
27	3,58	2,70	5,15 „ 1,61	1,464
19	8,80 bis 4,80	1,37 bis 2,15	1,39 „ 2,64	0,934 bis 1,263
30	9,10	1,34	2,42 „ 2,64	0,919
23	11,80	1,12	1,73 „ 2,67	0,807
26	13,2 bis 11,5	1,04 bis 1,14	0,56 „ 2,12	0,763 bis 0,818
20	19,81 „ 6,85	0,80 „ 1,64	1,400 „ 2,14	0,623 „ 1,059
18	19,2 „ 10,11	0,82 „ 1,20	0,531 „ 5,94	0,633 „ 0,872
22	20,5 „ 13,67	0,78 „ 1,02	1,33 „ 1,86	0,602 „ 0,750
25	25,4 „ 18,4	0,65 „ 0,85	1,12 „ 2,25	0,550 „ 0,646
24	22,30	0,73	0,74 „ 2,40	0,587

Für die Hg-Partikel zeigt sich nun zunächst die auffallende und von verschiedenen Autoren bereits hervorgehobene Tatsache[1]), daß die aus den Fallgesetzen berechneten Beweglichkeiten größer sind als die Brownsche Beweglichkeit (im Falle des Cunninghamschen Gesetzes sogar um eine ganze Größenordnung). Der Grund hierfür muß notwendigerweise in der

1) Vgl. u. a. E. Weiß, a. a. O., D. Konstantinowsky: Wien. Ber. 123. (2a). S. 1697 ff. 1914.

Unrichtigkeit mindestens eines der drei zugrunde gelegten Gesetze beruhen; zu einer Entscheidung hierüber ist jedoch das Beobachtungsmaterial dieser Arbeit nicht geeignet.[1]) Nur folgende zwei Tatsachen mögen hervorgehoben werden.

1. Aus den Untersuchungen des ersten Teiles dieser Arbeit geht hervor, daß die nach Formel (1) berechneten Beweglichkeiten B_{Br} systematisch zu klein herauskommen müssen, infolge der Begrenztheit der Beobachtungsreihen; wenn man nicht eine dort selbst abgeleitete Korrekturformel zur Berechnung heranzieht. Der mühsamen Arbeit der Auswertung der Beobachtungen nach dieser Formel habe ich mich nicht unterzogen, um mich aber über die Größenordnung der eventuellen Korrektur zu informieren, habe ich für eine beliebig herausgegriffene Serie und zwar für die erste Serie der Prot. Nr. 1 den korrigierten Wert des Diffusionskoeffizienten berechnet. Er ergibt sich danach etwa 30 bis 40 Proz. höher als nach Formel (1). Nehmen wir an, daß auch für die anderen Serien die Korrektur diese Größenordnung besitzt, so wären also die Werte der vierten Spalte der Tabb. 5 und 6 etwa um diesen Betrag zu erhöhen. Damit würde sich Übereinstimmung zwischen B_{Br} und B_{St} ergeben, während B_C immer noch beträchtlich größer als diese herauskommt.

2. Bei Partikeln derselben Größenordnung und dem gleichen Material in Flüssigkeiten hat sich das Gesetz (2) der Brownschen Bewegung in Verbindung mit dem Stokesschen Gesetz als richtig erwiesen, insofern sich aus ihm die Loschmidtsche Zahl in bester Übereinstimmung mit anderweitigen Bestimmungen ergab.

Bei den Ölpartikeln der Tab. 4 findet man wieder beim Vergleich der drei Beweglichkeiten eine systematische Abweichung der B_{Br} von den beiden anderen, jedoch diesmal im entgegengesetzten Sinne als vorhin, wenn auch nicht so ausgeprägt. Auch diese Tatsache ist schon von einigen Autoren festgestellt worden.[2]) Die Diskrepanz wird hier jedoch durch

---

1) Eine ausführliche Erörterung über diese und ähnliche Fragen findet man bei F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 56. S. 1 ff. 1918.

2) Vgl. u. a. F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 56. S. 40. 1918.

Anbringung unserer Korrektur noch größer. Nun ist aber hier zu berücksichtigen, daß sich die Fallgeschwindigkeit eines individuellen Partikels während der Dauer der Beobachtung als nicht konstant erwies, sondern allmählich abnahm, derart, daß die zeitlich späteren Reihen auch die kleinere Geschwindigkeit ergaben. Dies zeigte sich bei fast allen beobachteten Ölpartikeln, bei denen eine längere Beobachtungszeit vorliegt und ist in Tab. 6 durch Angabe der äußersten Grenzen der beobachteten Fallgeschwindigkeiten zum Ausdruck gebracht. Dieses Verhalten dürfte am einfachsten einem langsamen Verdampfen und daher Kleinerwerden der Teilchen zuzuschreiben sein. Da nun daraus geschlossen werden muß, daß auch innerhalb jeder Serie die Fallgeschwindigkeit allmählich abnimmt, so ergibt dies bei Anwendung der Formel (1) zur Berechnung von B_{Br} eine systematische Vergrößerung, die also hier der obigen Korrektur entgegenarbeitet.[1])

Unter diesen Umständen scheint es zweifelhaft, ob die mehrfach beobachteten zu großen Werte der Brownschen Bewegung bei Ölpartikeln eine reelle Bedeutung haben. Im großen und ganzen sind alle drei Beweglichkeiten immerhin in derselben Größenordnung, da bei dieser Radiengröße die Cunninghamsche Korrektur keine wesentliche Rolle spielt. Von einer Entscheidung über die Richtigkeit der einen oder anderen Formel kann also hier erst recht nicht die Rede sein, aber auch nicht von einer Unrichtigkeit der Formel (2) der Brownschen Bewegung.

§ 7.

Die Gleichung (6) des vorigen Paragraphen gestattet, aus den gemessenen Steig- und Fallgeschwindigkeiten im elektrischen Feld, sowie aus den am Voltmeter abgelesenen Spannungen bei bekannter Beweglichkeit B die Ladung der Teilchen zu bestimmen. Dies wurde für alle Teilchen durchgeführt, für welche gemessene Werte des Potentialgefälles E vorlagen, so zwar, daß bei solchen Teilchen, die unter mehreren Spannungen untersucht worden waren, aus den auf diese Weise errechneten, im allgemeinen wenig voneinander verschiedenen Werten für

1) Bei den Hg-Partikeln trat eine solche Erscheinung nicht auf, wie noch ausdrücklich festgestellt sein mag.

die Ladung das Mittel genommen wurde, unter Einführung der Zahl der Beobachtungen als Gewicht. In den Tabb. 7 und 8 sind die Resultate enthalten, geordnet nach steigenden Fallgeschwindigkeiten, also steigenden Radiengrößen, unter der Bezeichnung e_C, e_{St}, e_{Br}, je nachdem, welche von den drei Beweglichkeiten B_C, B_{St}, B_{Br} in Formel (6) eingesetzt wurde. Für e_{Br} sind jedesmal die extremen Werte der Ladung angegeben, wie sie sich aus den verschiedenen Beobachtungsserien an einem Teilchen ableiten lassen.

Tabelle 7.

Nr.	$v \cdot 10^4$	$e_C \cdot 10^{10}$	$e_{St} \cdot 10^{10}$	$e_{Br} \cdot 10^{10}$
9	0,45	0,016	1,39	
12	1,02	0,091	3,25	6,93 bis 5,10
16	2,65	0,380	4,62	
8	2,80	0,339	3,87	20,8 „ 6,83
4	3,34	0,385	3,81	24,0 „ 4,97
7	3,87	0,385	3,32	12,04 „ 7,86
3	5,47	0,144	0,905	22,5 „ 2,94
14	5,60	0,949	5,85	
6	6,42	0,210	1,17	6,75 „ 6,02
10	6,73	0,552	2,97	
5	7,59	0,395	1,94	12,1 „ 5,23
15	10,03	0,700	2,88	
11	17,41	1,020	3,04	
13	18,2	7,30	21,0	
17	25,4	5,01	11,78	

Tabelle 8.

Nr.	$v \cdot 10^4$	$e_C \cdot 10^{10}$	$e_{St} \cdot 10^{10}$	$e_{Br} \cdot 10^{10}$
28	2,67 bis 2,20	8,38	17,04	9,19 bis 10,50
21	0,85 „ 5,70	6,21	13,7	3,40 „ 11,49
29	3,28	6,71	12,61	7,00 „ 9,05
27	3,58	6,70	12,36	3,51 „ 4,97
19	8,80 bis 4,80	8,07	12,22	4,42 „ 9,91
30	9,10	47,6	69,5	24,2 „ 26,4
23	11,80	6,34	8,80	2,65 „ 4,10
26	13,2 bis 11,5	9,71	13,26	4,68 „ 21,7
20	19,81 „ 6,85	13,75	21,3	10,52 „ 13,20
18	19,2 „ 10,11	37,7	51,1	7,37 „ 56,0
22	20,5 „ 13,62	10,15	13,30	4,25 „ 7,80
25	25,4 „ 18,4	16,25	19,90	5,05 „ 11,0
24	22,30	5,31	6,60	1,62 „ 5,21

Außer der aus den früheren Erörterungen bereits evidenten Tatsache, daß die aus den verschiedenen B berechneten e verschieden herauskommen, und in welchem Sinne diese Abweichungen liegen, können wir aus den Tabb. 7 und 8 folgende Schlüsse ziehen:

1. Im allgemeinen zeigen die Teilchen mit kleinster Fallgeschwindigkeit, also kleinstem Radius auch die kleinste Ladung, die größten Partikel die größte Ladung, wie auch nicht anders zu erwarten.

2. Sowohl aus dem Cunninghamschen, als auch aus dem Stokesschen Gesetz ergeben sich an den Hg-Partikeln Ladungen, die kleiner sind, als das aus der Elektrolyse hergenommene Elementarquantum der Elektrizität $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ e. st. E, in Übereinstimmung der Beobachtungen der Ehrenhaftschen Schule, den Beobachtungen von E. Weiß und anderer Autoren. Die Ölpartikel weisen infolge der größeren Radien der verwendeten Kugeln im allgemeinen auch größere Ladungen auf, jedenfalls keine kleineren als das Elementarquantum.

3. Die aus der Brownschen Bewegung erschlossenen Ladungswerte ergeben in Übereinstimmung mit E. Weiß bei Hg-Partikeln keine Unterschreitungen des Elementarquantums; wenn man aber die im vorigen Paragraphen erwähnten Korrekturen an den so berechneten Beweglichkeiten anbringt, kommt man in ungefähre Übereinstimmung mit e_{St} und damit auch hier zu kleineren Ladungen, als dem postulierten Quant entsprechen würde.

4. Die an den verschiedenen Teilchen gemessenen Ladungen lassen keinerlei Schlüsse darüber zu, ob die Ladungen der Partikel sich überhaupt als Vielfache eines Elementarquantums ansehen lassen. Die Zahlen erwecken vielmehr den Eindruck, als ob tatsächlich jede beliebige Ladung an den Teilchen auftreten könnte.

5. Infolge der in der Natur der Sache begründeten großen Ungenauigkeit der Brownschen Beweglichkeitsbestimmung auf diesem Wege, selbst bei einer verhältnismäßig sehr großen Zahl von Beobachtungen an einem Teilchen, läßt es völlig unstatthaft erscheinen, aus solchen Messungen auf eine quantenhafte Verteilung der elektrischen Ladungen kleiner Partikel in irgendeiner Größenordnung zu schließen.

Zusammenfassung.

1. Mit der Ehrenhaftschen Versuchsanordnung werden kleine elektrisch geladene Hg- und Öltröpfchen mit verschiedenen mittleren Geschwindigkeiten im elektrischen Felde hin und her geführt und jedesmal die Beweglichkeit aus der Brownschen Bewegung nach der Weißschen Methode bestimmt. Die verschiedenen für ein und dasselbe Partikel gefundenen Werte weichen stark voneinander ab, jedoch läßt sich ein systematischer Einfluß der mittleren Geschwindigkeit auf die Brownsche Bewegung nicht konstatieren.

2. Es werden die Beobachtungen von E. Weiß und M. Vogl mit derselben Versuchsanordnung an Ag- bzw. Au-Teilchen diskutiert und bei ihnen das gleiche Verhalten nachgewiesen.

3. Die so bestimmten Beweglichkeiten werden mit den aus den Fallgesetzen von Stokes einerseits und von Cunningham anderseits folgenden verglichen und bei den Hg-Partikeln kleiner, bei den Ölpartikeln größer als die letzteren befunden. Unter Berücksichtigung einer in Teil I dieser Arbeit abgeleiteten Korrektur läßt sich bei den Hg-Partikeln Übereinstimmung der Brownschen mit der Stokesschen Beweglichkeit erzielen. Die Resultate an Ölpartikeln scheinen durch allmähliches Verdampfen der letzteren verfälscht.

4. Es werden die Ladungen der Partikel nach bekannter Methode berechnet; sie ergeben sich in zahlreichen Fällen kleiner als das sogenannte Elementarquantum der Elektrizität. Auf eine quantenhafte Struktur in irgendeiner Größenordnung ergibt sich kein Hinweis. Aus der Brownschen Bewegung kann nach der Weißschen Methode infolge zu großer Ungenauigkeit auf eine solche jedenfalls überhaupt nicht geschlossen werden.

Prag, April 1919.

(Eingegangen 6. Mai 1919.)

5. *Die kathodischen Vorgänge im Bogenstrome; von Ernst Bräuer.*

Das Ausgehen von Elektronen von der heißen Kathode ist das Grundphänomen des Bogenstromes; denn weder an der Anode, die bald heiß, bald kalt ist und deren Einfluß auf den Bogen durchaus als sekundär erscheint, noch im Gase ist nach unseren sonstigen Kenntnissen die Entstehungsmöglichkeit primärer Ionen gegeben.

Drei mögliche Ursachen für das Entstehen von Elektronen an der Kathode sind uns bekannt; die glühelektrische Erzeugung[1 u. 2]), die Auslösung durch aufprallende positive Teilchen und die photoelektrische Erzeugung.

Wäre einer dieser Vorgänge die alleinige Elektronenquelle, so würde im ersten Falle der Kathodenfall im wesentlichen die Bedeutung haben, die für die Erhaltung der hohen Temperatur nötige Energie zu liefern, im zweiten Falle wäre seine Hauptaufgabe die Erzeugung der positiven Teilchen durch Stoßionisation im Gase, im dritten würde er einer noch unbekannten Eigenschaft der elektrischen Lichtwirkung entsprechen oder auch eine sekundäre, das Grundphänomen nicht berührende Bedeutung haben oder er würde möglicherweise auch die nach der Quantenbedingung erforderliche Energie für die Erzeugung der wirksamen Strahlung liefern.

In Wirklichkeit dürften alle drei Ursachen gleichzeitig wirksam sein. Die meisten Autoren[1 u. 2]) neigen dazu, den glühelektrischen Effekt für den wichtigsten zu halten. Im folgenden soll gezeigt werden, daß das nicht der Fall ist, daß vielmehr die Erzeugung der Elektronen durch aufprallende positive Ionen bei weitem überwiegt. Den Photostrom lassen wir außer Betracht.

1) J. J. Thomson, Cond. Electr. thr. Gases, London.
2) J. Stark, Ann. d. Phys. 7. S. 420. 1902.

Wenn wir aus der Richardsonschen Gleichung für die glühelektrische Elektronenstromdichte

$$(1) \qquad J_1 = a\sqrt{T}\,e^{-\frac{b}{T}}$$

mit Hilfe der Langmuirschen Werte für $T = 2000°$:

	J	b
Wolfram	$3 \cdot 10^{-3}$ Amp./qcm	$55 \cdot 10^3$
Kohle	$1 \cdot 10^{-3}$ „	$32 \cdot 10^3$

J_1 berechnen, so ergibt sich für Wolfram bei der Temperatur $T = 3000°$, die ungefähr den Verhältnissen im Lichtbogen entsprechen dürfte, jedenfalls sicher nicht zu niedrig gegriffen ist, die glühelektrische Stromdichte zu 10 Amp./qcm. Aus den Angaben von Mackay und Ferguson[1]) für den Wolframbogen in Wasserstoff: Durchmesser 0,5 mm bei 25 Amp. Stromstärke, folgt eine Gesamtstromdichte $J =$ etwa 3200 Amp./qcm. Dann würde also auf den glühelektrischen Strom nur ein Drittel Prozent.

Für Kohleelektroden beträgt die glühelektrische Stromdichte bei $T = 3500°$ etwa 1,2 Amp./qcm bei $T = 3600°$ etwa 4,7 Amp./qcm. Aus den Werten von Granqvist ergibt sich eine Gesamtstromdichte J von etwa 250 Amp./qcm. Der glühelektrische Anteil ergäbe sich also nach der Richardsonformel zwischen $^1/_2$ und 2 Proz.

Es wurde nun der Anteil des glühelektrischen Stromes *experimentell* bestimmt und zwar in folgender Weise: Der Lichtbogen wurde durch Einschalten eines Nebenschlusses zum Erlöschen gebracht; der Nebenschluß besaß einen solchen Widerstand, daß an seinen Enden, und damit auch an den Bogenelektroden, der hindurchfließende Strom eine Spannung erzeugte, welche die nach dem Erlöschen noch erzeugten Ionen als Strom überführte. Diese Spannung war so gewählt, daß sie zwar Sättigungsstrom erzeugte, Stoßionisation aber nicht merklich war (s. u.). Der Stromverlauf wurde oszillographisch aufgenommen. Es ergab sich folgendes: Im Momente des Abreißens fällt der Strom in unmeßbar kurzer Zeit auf einen

1) G. M. J. Mackay u. C. V. Ferguson, E. T. Z. 1917; Journ. Franklin Inst. und Electrician 77. S. 254.

2) Granqvist, Phys. Zeitschr. 4. S. 587. 1903.

bestimmten Wert, und von diesem Werte ab, sehr langsam, mit einer mindestens 10^3 mal größeren Abklingzeit auf Null. Das berechtigt zu dem Schlusse, daß der zuerst angenommene Wert dem glühelektrischen Strome entspricht.

Fig. 1 gibt eine solche Aufnahme des Stromverlaufes wieder. Die im ersten Moment auftretenden Schwingungen der Oszillographenschleife stören nicht, denn sie gestatten mit der gleichen Sicherheit wie die Kurve in ihrem weiteren Verlaufe die Nullinie zu bestimmen, um die sie gedämpft pendeln.

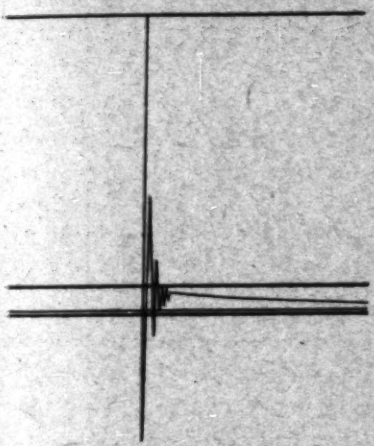
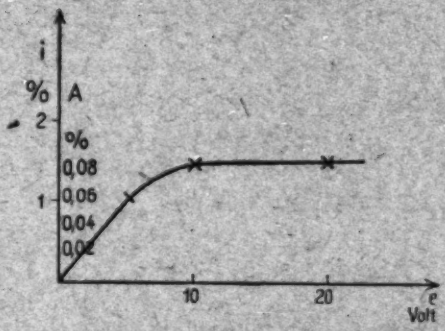


Fig. 1.



Glühelektrischer Strom i in Abhängigkeit von der angelegten Spannung e (Hg-Bogen 6,0 Amp., 53 Volt).

Fig. 2.

Der Betrag dieses Glühstromwertes wurde stets für mehrere Spannungen ermittelt und bei 10 Volt und Bogenlängen bei 1 mm mit Sicherheit genügende, z. T. sehr gute Annäherung an die Sättigung des Stromes festgestellt, wie z. B. aus der Fig. 2 hervorgeht.

Die gefundenen Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Ihr wahrscheinlicher Fehler wächst von einigen Prozenten bei den größten auf 30 bis 40 Proz. bei den kleinsten Werten. Relativ sind die Fehler viel kleiner.

Aus den Werten ergibt sich: Der glühelektrische Stromanteil ist höher bei höherem Strome, bei geringerer Wärmeableitung (geringerem Elektrodenquerschnitte) und bei zischendem Bogen, kurz in den Fällen, in denen man eine höhere Temperatur der Kathode annehmen muß. Beim Zischbogen wird sie durch die stärkere Verdampfung der Anode geheizt.

Der Glühelektronenstrom ist in den beobachteten Grenzen unabhängig von der Bogenlänge, woraus sich auch auf genügende Sättigung des Überführungsstromes schließen läßt.

	Elektrodendurchmesser +	Elektrodendurchmesser −	Bogenlänge	Strom Amp.	Spannung Volt	Glühelektr. Strom in % des Gesamtstrom.
Reinkohlebogen in Luft . . .	1,0	0,8	0,4	2,6	68	1,0
„ „ „ . . .	1,0	0,8	0,55	4,5	71	1,2
„ „ „ . . .	1,0	0,8	0,25	5,0	55	1,5
„ „ „ . . .	0,8	0,6	0,4	5,8	55	2,5
„ „ „ . . .	0,8	0,6	—	4,0	—	2,2
„ zischend . . .	1,0	0,8	0,05	7,2	28	3,5
Dochtkohlenbogen in Luft .	0,8	0,6	—	2,5	—	5,0
„ „ „ .	0,8	0,6	—	4,0	—	4,0
Effektkohlenbogen in Luft .	0,9	0,8	0,10	6,0	29	12,0
„ „ „ .	0,9	0,8	0,15	5,8	28	12,5
„ „ „ .	0,9	0,8	0,15	6,0	28	8,0
„ „ „ .	0,9	0,8	0,4	6,0	31	9,0
„ „ „ .	0,9	0,8	0,7	6,0	36	9,0
Quarzquecksilberlampe, kurz nach Zündung				6,0	58	1,5
Quarzquecksilberlampe, eingebrannt				5,0	110	1,8

Er ist bei Dochtkohlen (deren Docht geringe Salzmengen und Oxyde enthält) größer als bei Reinkohlen und erreicht noch viel höhere Beträge bei Salzkohlen, die mit CaF_2 getränkt waren.

Sehr interessant ist die Beobachtung, daß ein „glühelektrischer“ Strom in gleicher Größenordnung und von ähnlicher Abklingzeit wie bei dem Reinkohlenbogen auch bei der Quarzquecksilberlampe besteht. Hier ist der Nachweis der Sättigung des Stromes besonders wichtig, da er ausschließt, daß der Reststrom durch die Leitfähigkeit des warmen Quarzes vorgetäuscht ist. Er ergibt sich aus dem Diagramm 2.

Durch diese Beobachtungen ist der Nachweis erbracht, daß der Anteil der Glühelektronen am Bogenstrome gering ist.

Wir nehmen deshalb für den Bogenstrom die gleiche Theorie wie für den Glimmstrom an, nämlich, daß positive, überwiegend in der Kathodennähe in einer dem Glimmlicht entsprechenden Zone durch Stoß erzeugte Ionen bei ihrem

Aufprall auf die Kathodenoberfläche aus dieser Elektronen auslösen und machen dabei die Hypothese, daß das Herauslösen durch erhöhte Temperatur der Kathode erleichtert werde. Diese Möglichkeit ist schon verschiedentlich erwähnt worden, insbesondere von C. D. Child[1]) auf Grund seiner Versuche über das Entladungspotential einer selbständigen Entladung an glühenden CaO-Elektroden. Eine solche Entladung führt[2]) eine mehrhundertmal größere als die glühelektrische Stromdichte der spontan ausgesandten Elektronen bei einem Entladungspotential, das viel niedriger ist als das des normalen Glimmstromes an kalter Kathode. Child hat auch Versuche über die Auslösung von Elektronen aus der glühenden Oxydfläche durch aufprallende Kanalstrahlen gemacht. J. J. Thomson[3]) hat für diese Erscheinungen eine Theorie aufgestellt nach der eine Stoßionisation auch durch wiederholten Aufprall mit an sich zu kleiner Energie zustande kommen soll und A. Wehnelt (l. c.) nimmt eine Herabsetzung der statischen Raumladung, die den Kathodenfall erzeugt, durch die glühelektrischen Elektronen an.

Nach unserer Auffassung ist die Aufgabe des Kathodenfalles eine dreifache: Er muß die Elektronen zur Stoßionisation, also Erzeugung von positiven Ionen, befähigen, er muß den positiven Teilchen die Auslösungsenergie erteilen und er muß auch die Heizenergie für die Kathode liefern.

Von der Kathode ausgehende Elektronen erlangen im Crookesschen Dunkelraum oder dem ihm entsprechenden Teile des Bogens durch den kathodischen Potentialfall die Energie, die sie befähigt, im Glimmlichte oder dem entsprechenden Bogengebiete, Gasmoleküle durch Stoß zu ionisieren — wobei wir zunächst ganz offen lassen, wie diese Ionisierung vor sich geht. Die positiven so erzeugten Ionen wandern zur Kathode zurück, wobei sie viel öfter auf Gasmoleküle stoßen als die Elektronen und dabei ihre Geschwindigkeit verlieren. Nur der Bruchteil $e^{-\frac{A}{\lambda}}$ von ihnen (A = Abstand des Glimm-

1) C. D. Child, Phys. Rev. 32. S. 492. 1911.

2) A. Wehnelt, Phys. Zeitschr. 5. S. 425. 1914; 9. S. 134. 1908; Soddy, Nature 71. S. 53. 1907; Phys. Zeitschr. 9. S. 8. 1908 u. a.

3) J. J. Thomson, Cond. Electr. Gases. 1906. S. 478.

lichtes von der Kathode, λ mittlere freie Weglänge der positiven Teilchen) gelangt ohne Stoß zur Kathode und ihm proportional ist auch der Bruchteil der Kationen, die unter geometrisch ähnlichen Verhältnissen mit einer beliebigen gleichen Energie aufprallen.

Der Kathodenfall als solcher wird erzeugt durch die Raumladung, welche die positiven trägen Teilchen bewirken. Ihre Masse ist 10^3 bis 10^5 mal größer als die der Elektronen, ihre Geschwindigkeit ist etwa 30 bis 450 mal kleiner, die erzeugte Raumladung 30 bis 450 mal größer als bei der gleichen Anzahl Elektronen, ein Verhältnis, das bei Berücksichtigung des Unterschiedes der freien Weglängen noch extremer wird. Wir vernachlässigen deshalb zunächst die Raumladung der Elektronen.

Wenn wir annehmen, daß der Strom sich dadurch, daß er die Kathode auf höhere Temperatur bringt, die zu überwindende Kathodenraumspannung selbst herabsetzt, so liegt die Annahme nahe, daß diese Herabsetzung des Kathodenfalles v_k, wenn sie überhaupt eintritt, sofort unter Erhöhung der Stromdichte J (also Erhaltung und Vergrößerung des Energieproduktes Jv_k) und Verkürzung des geladenen Dunkelraumes (wodurch der Verlust an auslösungsfähigen, positiven Ionen durch Zusammenstöße mit Gasmolekülen verkleinert wird) bis zu einem Betrage fortschreitet, wo durch ein drittes, bis jetzt nicht in Betracht gezogenes Element Halt geboten wird. Und dieses fremde Element kann nach unserer Kenntnis von den Gasentladungen nur der Betrag der Mindestspannung sein, welche zur Erzeugung von Ionen durch Stoß erforderlich ist, denn dieser darf ja nicht vom Kathodenfalle unterschritten werden, wenn der alte Mechanismus der Entladung weiterbestehen soll. Wir nehmen also die Hypothese an, *daß im Bogen der Kathodenfall gleich dieser Mindestspannung v_m in dem betreffenden Gase ist.* Diese Mindestspannung ist und kann nicht identisch sein, wie wir sehen werden, mit dem eigentlichen Ionisierungspotentiale des Elektrons, wie Stark[1]) annahm.

Da der Kathodenfall v_k mit der Stromdichte J und dem (für den Gesamtbetrag der Raumladung wesentlichen) Abstande A des Ionisierungsgebietes von der Kathode allgemein

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 7. S. 420. 1902; Phys. Zeitschr. 5. S. 56. 1903.

durch eine Beziehung $v_k = f(J, A)$ verbunden ist, so muß sich der Glimmlichtabstand so einstellen, daß das Produkt aus der Ionisierungsspannung und der Stromdichte ausreicht, um die Kathode auf einer so hohen Temperatur zu halten, daß die Auslösungsenergie weit genug vermindert ist, um von einem so kleinen Kathodenfalle geliefert werden zu können. Es findet zwischen Kathode und Ionisationsschicht auch keine Stoßionisation statt, sondern diese ist auf die Ionisationsschicht („Glimmlicht") beschränkt.

Wir nehmen nun weiter den Fall an, daß das Gas ein Metalldampf oder ein Edelgas sei oder sich bei der hohen Temperatur wie ein solches verhält, d. h. wir schließen Anlagerung von Elektronen an schwere Teilchen aus.

Wir wollen unter der einen Voraussetzung, daß die Ionisierung nur im Glimmlicht erfolgt, die Verhältnisse näher durchsprechen.

Die Poissonsche Gleichung setzen wir für den Fall paralleler Stromlinien an:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi\varrho. \tag{3}$$

Es sei J_p die Stromdichte des positiven Stromes. Die mittlere Geschwindigkeit eines Teilchens zwischen zwei Stößen mit gleich schweren anderen Teilchen, bei denen es also im Mittel seine gesamte Energie verliert, ist

$$v = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{8\mu}\lambda\frac{dV}{dx}}, \tag{4}$$

wo ε die Elementarladung und μ die Maße der Teilchen bedeutet. J_p ist die sekundlich durch den Querschnitt Eins tretende positive Ladung, ϱ ist also J_p/v. Hieraus folgt

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{4\pi J_p}{\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{8\mu}\lambda\frac{dV}{dx}}} \tag{5}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}\cdot\sqrt{\frac{dV}{dx}} = -B\cdot J_p; \quad B = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{8\mu}\lambda}} \tag{6}$$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^{3/2} = -BJ_p x + C$$

$$= BJ_p(A - x).$$

Da im Glimmlichte ($x = A$) $\frac{dV}{dx}$ = Null wird, so ist

$$V = -(BJ_p)^{2/3}(A - x)^{2/3} + C'$$
$$= v_k - (BJ_p)^{2/3}(A - x)^{2/3}.$$

Für $x = 0$ wird $V = 0$, also

$$v_k = (BJ_p)^{2/3} \cdot A^{2/3}. \tag{7}$$

Ein gegebener Kathodenfall kann sich also bei jeder Stromdichte dadurch einstellen, daß das Glimmlicht die aus Gleichung (7) sich ergebende Lage zur Kathode einnimmt.

Im Glimmstrom, also bei kalter Kathode, beträgt der Kathodenfall ein Vielfaches der Ionisierungsspannung des Elektrons. Augenscheinlich müssen hier die positiven Teilchen mit einer so hohen Energie ausgestattet werden, um eine so große Zahl von Elektronen auslösen zu können, daß eine Stromdichte und mit ihr eine Raumladung [Gleichung (3)] entsteht, die bei dem kleinstmöglichen Abstande A, der etwa durch die freie Weglänge des Elektrons gegeben ist, diesen Kathodenfall aufrecht erhalten kann. Mit anderen Worten: Gegeben ist ein minimaler Abstand A dadurch, daß er in bestimmtem Zusammenhange mit der freien Weglänge des Elektrons steht. Gleichbleibende Verteilung der Geschwindigkeiten vorausgesetzt, ist die Zahl n der von jedem Kation im Durchschnitt ausgelösten Teilchen eine Funktion der Energie dieses Kations, also des Kathodenfalles, die mit wachsendem v_k wächst, also etwa

$$n \sim v_k^m. \tag{8}$$

Die Stromdichte J ist n und der Zahl der stoßfrei durchgelangenden positiven Teilchen proportional

$$\begin{cases} J = Dn \cdot e^{-\frac{A}{\lambda}} \\ \quad = Dv_k^m \cdot e^{-\frac{A}{\lambda}} \end{cases} \tag{9}$$

($D, E, \ldots$ sind Konstante).

Das gibt mit (3)

$$v_k = B^{2/3} D^{2/3} v_k^{2/3 m} e^{-\frac{2A}{3\lambda}} \cdot A^{2/3}$$

$$v_k^{(2/3 m - 1)} = E \cdot e^{\frac{2A}{3\lambda}} A^{2/3}$$

$$v_k = F \cdot \left(e^{\frac{2}{3}\frac{A}{\lambda}} A^{-2/3}\right)^{\frac{1}{2/3 m - 1}} = F e^{\frac{A}{\lambda(m - 2/3)}} \cdot A^{-\frac{5}{2m - 3}}. \tag{10}$$

Die elektrischen Verhältnisse streben nach möglichster Verkleinerung von v_k:

$$\frac{dv_k}{dA} = 0 = H \cdot \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{5}{A}\right); \quad \frac{d^2 v_k}{dA^2} > 0.$$

$$A_1 = \frac{5}{2}\lambda, \tag{11}$$

wäre also der *günstigste* Glimmlicht- bzw. Ionisationsschichtabstand. Dieser ist aber wahrscheinlich kleiner als der tatsächlich beobachtete, der dem *kleinstmöglichen* entsprechen dürfte. Das kommt dadurch zustande, daß in diesem günstigsten Abstande noch lange nicht alle von der Kathode ausgehenden Elektronen überhaupt zu einem Stoße mit einem Molekül kommen, der zur Ionisation führt. Läge selbst das Kathodengefälle auf diesem Abstande, so würden doch so viele positive Ionen erst weiter außen im Gase erzeugt werden, daß eine breite Raumladungsschicht entstände, die das Gesamtgefälle an der Kathode erhöhen würde, und dadurch den „Vorteil" des „günstigsten" Abstandes aufhöbe.

Wir wollen nun untersuchen, welchen Bruchteil der Gesamtstromdichte J die Dichte des positiven Stromes J_p ausmacht. Wäre v_k, der Kathodenfall, gleich der Ionisierungsspannung v_i des Elektrons in dem betreffenden Gase, die — das sei der Deutlichkeit halber nochmals hervorgehoben, mit dem Mindestpotentiale $v_=$ zunächst gar nichts zu tun hat, so müßten wir annehmen, daß ein erheblicher Bruchteil der Elektronen ein neues Ionenpaar, also ein Kation, erzeugte. Ein großer Teil der Elektronen wird freilich ausschließlich unter Erzeugung von Licht bei den Zusammenstößen seine Energie verbrauchen. Der positive Strom würde aber jedenfalls gegen den Gesamtstrom nicht verschwindend klein sein.

Im Glimmstrome liegen die Verhältnisse so. Wenn auch hier infolge der höheren Energie des einzelnen Elektrons aus dem höheren Kathodenfalle stammend, das wahrscheinlich mehrere positive Teilchen erzeugt, ist J_p nicht viel kleiner als J, jedenfalls von gleicher Größenordnung, die Stromdichte J ist 10^3 bis 10^5 mal kleiner als im Bogenstrome. Ziehen wir nun die Gleichung (7) zu Rate, so ergibt sich folgendes: Nehmen wir zunächst an, J_p wäre ebenso wie J im Bogen größer als

im Glimmstrome; nun ist A sicher ebenfalls größer im Bogen, denn infolge der Temperaturerhöhung sind die molekularen Wege eine Größenordnung größer anzunehmen; v_k aber ergibt sich eine Größenordnung kleiner im Bogenstrome als im Glimmstrome.

Das ist eine Diskrepanz, die unsere Voraussetzung als falsch nachweist, nämlich, daß der Kathodenfall gleich dem Betrage der Ionisierungsspannung sein sollte. Tatsächlich ergeben die Messungen für v_k auch einen Wert, der in allen zweifelsfreien Fällen erheblich unter der Ionisierungsspannung liegt.

Im Quecksilberbogen haben Stark, Retschinsky und Schaposchnikoff[1]) im Strombereiche von 2 bis 50 Amp. bis auf Abweichungen von 0,09 Volt den Betrag des Kathodenfalles zu 5,25 Volt gefunden. Das ist fast derselbe Wert (4,9 Volt), den man früher als Ionisierungsspannung des Quecksilbers auffaßte, von dem aber Franck und Hertz[2]) nachwiesen, daß er quantentheoretisch der Anregungsenergie der „Resonanzlinie" 253,6 $\mu\mu$ entspricht. Goucher und Dewis haben dann an der Hand des Bohrschen Atommodells seine Bedeutung weiter dahin geklärt, daß er der Lockerung eines Elektrons und seinem Übergange in die nächstäußere Bahn unter Aufnahme eines Energiequantums entspricht, während zur tatsächlichen Lostrennung, also zur Stoßionisierung eine erheblich größere Energie erforderlich ist. Durch die Energie des Kathodenfalls würde also niemals direkt ein positives Teilchen geschaffen werden können. Andererseits ist aber die Existenz des Kathodenfalles, der ja eben einem Gebiete positiver Raumladung entspricht, der Beweis dafür, daß in einer Ionisierungsschicht an der äußeren Grenze dieses Gebietes gegen das Gas hin positive Ionen entstehen. Das ist nun nur möglich, wie das Franck und Hertz bereits ausgesprochen haben (eine Auffassung, die in der „Mehrfachstoß"-Theorie von J. J. Thomson[3]) einen Vorläufer hat), wenn in diesem ge-

1) J. Stark, T. Retschinsky u. A. Schaposchnikoff, Ann. d. Phys. **18**. S. 213. 1905.

2) J. Franck u. G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**. S. 512. 1914.

3) J. J. Thomson, Cond. Elect. tr. Gases, London 1906.

lockerten Zustande befindliche Moleküle von einem zweiten Elektron erst völlig zertrümmert werden. Dieser Fall ist sicher sehr viel seltener als der Zusammenstoß zwischen Elektron und Molekül überhaupt. Jedenfalls ist durch diese Auffassung eine Möglichkeit gegeben, der Gleichung (7) gerecht zu werden: Trotz des Anwachsens von A ist im Bogenstrome ein so kleiner Kathodenfall möglich, weil eben J_p so extrem klein gegen J ist. Setzen wir nämlich das Verhältnis der Stromdichten im Bogen und im Glimmstrom zu 10^3, daß die Abstände der Ionisationszonen von der Kathode, also A, gleich 70 (entsprechend der durch die auf das Zehnfache erhöhte Temperatur in gleicher Weise erhöhten mittleren Weglänge im Gase) und das der Kathodenfälle gleich $^1/_{10}$, so ergibt die Gleichung:

$$^1/_{10} = x \cdot 10^{^3/_2} \cdot 10^{^3/_2}$$

$$x = \left(\frac{1}{10^3 \cdot 10^{^3/_2}}\right)^{^2/_3} = \left(10^{-\frac{14}{3} \cdot {}^3/_2}\right) = 10^{-7},$$

d. h. der positive Strom betrüge 10^{-7} des Gesamtstromes, und die von ihm erzeugte Raumladung wäre klein gegen die der negativen Teilchen — entgegen der bei Ableitung der Gleichung (7) gemachten Voraussetzung. Dieser errechnete Bruchteil 10^{-7} gibt also nicht den gesamten positiven Strom, sondern nur den Teil von ihm, der einen Überschuß positiver Raumladung über die negative erzeugt. Da ein positives Teilchen die Ladung von $\sim 10^3$ Elektronen ausgleicht, muß tatsächlich der positive Strom J_p gleich $\sim 10^{-3}\, J$, und nur ein winziger Überschuß von $10^{-7}\, J$ vorhanden sein, dessen Betrag aber die gesamte Entladung bestimmt.

Die Gleichung (7), die für den Glimmstrom die Bedeutung hat, die sich aus ihren Voraussetzungen ergibt (da die Vernachlässigung der negativen Raumladung hier sicher zulässig ist), gewinnt für den Bogenstrom einen anderen Sinn: J_p ist hier nicht mehr der ganze positive Stromanteil, sondern der 10^4 mal kleinere „Überschußstrom positiver Teilchen", welcher einen Überschuß positiver Ladung erzeugt, der klein ist gegen die Gesamtladung des positiven und des negativen Stromes. So ergibt sich: In der ungeschichteten positiven Säule halten

sich positive und negative Raumladungen das Gleichgewicht, denn die Potentialkurve ist eine Gerade. Das J_p der Gleichung bedeutet also den kleinen Überschußstrom positiver Ionen, der im Kathodengebiete zu der Stromführung des gesamten Gasraumes hinzutritt und sein Entstehen der Ionisierung der im Kathodenfall, den er selbst wieder erzeugt, beschleunigten Elektronen verdankt.

Man sieht, daß die Gleichung für den Bogenstrom die Folgerung enthält — auch wenn man die Kleinheit von J_p auf irgendwelche andere Weise erklären würde — daß die Energie, die ein positives Teilchen zur Erzeugung von Elektronen aus der Kathodenoberfläche benötigt, bei der hohen Temperatur der Kathode stark vermindert ist.

Stern und Vollmer[1]) errechnen als mittlere Dauer des „gespannten" Zustandes, bei dem ein Elektron infolge eines Elektronenpralles sich auf der nächstäußeren Bahn befindet, 10^{-8} sec. Für den Lichtbogen findet man, daß 10^{-4} bis 10^{-3} aller wirkungsfähigen Stöße der Primärelektronen auf gelockerte Moleküle treffen, was mit dem Werte $10^{-3} J$ für J_p übereinstimmt. Ein Kation muß viele Elektronen auslösen, sehr viel mehr als im Glimmstrom bei kalter Kathode, wo der höhere Kathodenfall es mit viel größerer Geschwindigkeit aufprallen ließ.

Es sei noch auf eine qualitative Bestätigung dieses Ergebnisses durch das Experiment hingewiesen. Lummer[2]) findet, daß die Temperatur der Kathode des Kohlebogens mit der Stromstärke beträchtlich steigt. Granqvist und Reich finden den Radius der kathodischen Strombasis in linearer Abhängigkeit von der Stromstärke, die Stromdichte also mit wachsendem Strome abnehmend. Daraus folgt nach Gleichung (2) bzw. (7), daß A, der Glimmlichtabstand, da ja v_k konstant bleibt, mit wachsendem i, also auch mit wachsender Temperatur, wächst. Bei größerem A gelangen aber weniger Kationen stoßfrei vom Glimmlicht zur Kathode, *die Auslösungsenergie erscheint also bei höherer Temperatur vermindert.* Dadurch hat die Grundannahme der Bogentheorie ihre experimentelle Bestätigung gefunden.

---

1) Vgl. J. Franck u. G. Hertz, Phys. Zeitschr. 20. S. 137. 1919.
2) O. Lummer, Die Verflüssigung der Kohle.

Ganz anders als bei Gleichstrom gestalten sich die kathodischen Vorgänge im Bogen bei rasch veränderlichen Zuständen. Für sehr schnellen Wechsel- oder Wellenstrom kann man die thermischen Zustände als konstant betrachten. Die kathodische Ansatzfläche und ihre Temperatur nehmen konstante Mittelwerte an. Die Stromdichte wird proportional dem Strome i.

Durchschreitet ein Wechselstrom die Nullinie, so ist im ersten Augenblick der Strom gleich dem Thermoionenstrome. Da die Elektrode Kathode ist, die kurz zuvor Anode war, ist dieser Strom nicht unbeträchtlich, er wächst auf 10 bis 20 Proz. des Maximalstromes. Diese Werte wurden nach der oben beschriebenen Methode in der Weise gefunden, daß statt des Kurzschlußwiderstandes eine Akkumulatorenbatterie an die Bogenklemmen gelegt wurde, so daß nach Abreißen eine passende Spannung in umgekehrter Richtung die Thermoelektronen der Anode zur Kathode trieb. Die Höhe der Spannung wurde so gewählt, daß der Strom fast gesättigt war, was bei 15 Volt und 1 bis 2 mm Bogenlänge erreicht wurde

Sobald die Spannung am Bogen die Ionisierungsspannung überschreitet, beginnt der Kathodenfall sich auszubilden unter Ansteigen des Stromes. Da der Abstand der Ionisierungszone nur in geringem Betrage sich ändern kann infolge des raschen Abfallens der Funktion $e^{-\frac{A}{i}}$ bei vergrößertem A einerseits und dem Mangel an zertrümmerbarem Molekülen für die Elektronen bei Verkürzung von A andererseits, wächst v_k gemäß Gleichung (7) angenähert proportional $J^{2/3}$, also auch $i^{2/3}$. Wir haben also eine steigende Charakteristik des kathodischen Teiles des Lichtbogens. Das ist auch das Resultat vieler experimenteller Untersuchungen[1]) für die Gesamtcharakteristik des Bogens bei schnellen Wechselströmen.

Zusammenfassung.

1. Es wurde der experimentelle Nachweis erbracht, daß im Bogenstrome der von Thermoelektronen getragene Stromanteil nur wenige Prozent des Gesamtstromes beträgt und auch

1) U. a. H. Th. Simon, Phys. Zeitschr. 7. S. 433. 1906; D. Roschansky, Phys. Zeitschr. 9. S. 627. 1908.

die von den Thermoelektronen durch Stoß erzeugten Ionenpaare keinen wesentlichen Anteil an der Leitung haben, da der positive Strom ganz allgemein gegen den negativen verschwindend klein ist.

2. Es wurde auch für den Quecksilberdampfbogen eine Art „glühelektrischer" Elektronenerzeugung von ähnlichem Betrage nachgewiesen.

3. Es wurde eine allgemeine Beziehung zwischen dem Kathodenfall, der Dichte des Stromes der im Glimmlicht, bzw. der kathodischen Ionisierungszone des Bogens, erzeugten positiven Teilchen und dem Abstande dieser Ionisierungszone von der Kathode abgeleitet.

4. Es wurden aus dieser Gleichung Schlüsse auf den Betrag des positiven Stromes und auf den Ionisierungsvorgang gezogen.

5. Es wurde aus der Gleichung das Verhalten des Wechselstrombogens bei hoher Frequenz, dessen Charakter sich dabei immer mehr einem Ohmschen Widerstande nähert, für den kathodischen Anteil erklärt.

Siemensstadt, den 15. März 1919,
K-Laboratorium des Wernerwerkes.

(Eingegangen 12. Mai 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

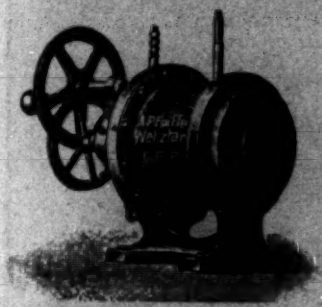
Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

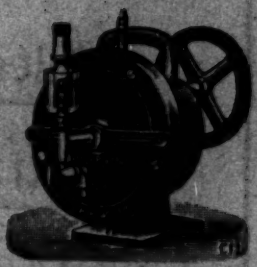
Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P.



System Gaede, D.R.P. angemeldet

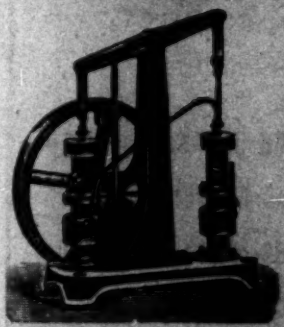


Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.



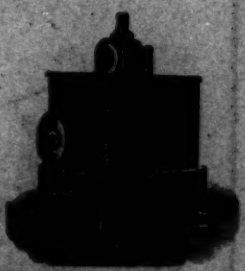
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-luftpumpen,

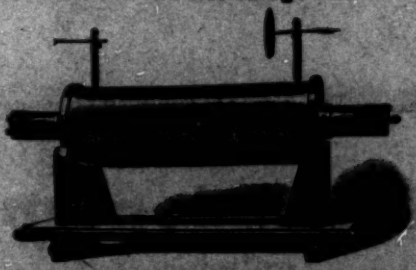
Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. Emil Beck. Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme 109
2. Joseph Würschmidt. Elementare Theorie der terrestrischen Refraktion und der atmosphärischen Spiegelungen 149
3. Robert Fellinger. Über die Dielektrizitätskonstante einiger natürlicher und synthetischer Edelsteine (mit einem Anhang über Bernstein) 181
4. J. Stark. Der spektrale Nachweis elektrischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome 196

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1919. № 18.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. *Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme;* von *Emil Beck.*

Einleitung.

Im Jahre 1915 haben A. Einstein und W. J. de Haas eine Arbeit „Experimenteller Nachweis der Ampèreschen Molekularströme“ [1]) veröffentlicht, in welcher sie mit Hilfe einer sehr eleganten Methode die Hypothese von Ampère über die Natur des Magnetismus experimentell bestätigen.

Nach dieser Hypothese werden die magnetischen Erscheinungen hervorgerufen durch elektrische Ströme, welche die Moleküle der magnetisierbaren Körper umkreisen, indem die Anordnung der Ebenen dieser Strombahnen den Grad der Magnetisierung bestimmt. Ist der Körper in unmagnetischem Zustand, so sind danach jene Strombahnebenen regellos gerichtet, während bei einem bis zur Sättigung magnetisierten Körper alle gleichgerichtet sind, nämlich senkrecht zur Magnetisierungsrichtung. Da nun nach den modernen Anschauungen die um die Moleküle kreisenden elektrischen Teilchen an träge Masse gebunden sind, so kann man jedes Molekül eines magnetisierbaren Körpers als Kreisel auffassen, der die bekannten Kreiseleigenschaften zeigen muß. Das Impulsmoment solch eines Moleküls ist $J = \left(2\,\frac{m}{e}\right) \cdot M = \lambda M$, wenn man annimmt, daß nur *negative* Teilchen, Elektronen, kreisen mit der Ladung e und der Masse m und wenn M das Moment des Molekularmagneten bedeutet. Jede Magnetisierungs*änderung* des Körpers muß, weil sie die Rotationsachsenrichtung der Kreisel und damit das innere Impulsmoment derselben ändert, ein grobmechanisches Impulsmoment am Körper zur Folge haben nach dem Satz von der Erhaltung des Impulsmoments. Das dabei entstehende Drehmoment ist gegeben durch die Vektorgleichung:

1) A. Einstein u. W. J. de Haas, Verh. d. D. Phys. Ges. 17. S. 152—170. 1915.

$$D = \left(2\frac{m}{e}\right)\frac{dI}{dt} = \lambda\frac{dI}{dt}, \tag{1}$$

wo I die Magnetisierungsintensität bedeutet. Nach dem in einer späteren Arbeit von W. J. de Haas gemachten Vorschlage sei der hier auftretende Effekt als „*Einsteineffekt*" bezeichnet. Die Arbeit von Einstein und de Haas, die den Effekt nachgewiesen hat, möge in folgendem zur Abkürzung stets mit *E* bezeichnet werden.

Setzt man speziell ein um seine Längsachse drehbares Eisenstäbchen voraus, das durch ein starkes axial gerichtetes Magnetfeld bis zur Sättigung magnetisiert ist, und ändert man plötzlich die Feldrichtung, so wird während dieser Änderung auf das Stäbchen ein axialer Impuls ausgeübt, der dasselbe in Schwingungen um seine Achse versetzen wird. Nach Gleichung (1) ist dieser Impuls:

$$J = 2\lambda I. \tag{2}$$

In *E* wurde ein an einem Glasfaden aufgehängtes dünnes Eisenstäbchen axial in eine lotrecht gestellte Spule gebracht, die ein starkes Magnetfeld lieferte. Wie die Verfasser berechneten, hätte die plötzliche Richtungsänderung des Gleichstroms, der das Feld erzeugte, eine meßbare Drehbewegung des Stäbchens hervorrufen müssen. Dabei traten aber so große störende Einflüsse auf, daß die zu beobachtende Bewegung ganz verdeckt wurde. Da kamen die Verfasser auf die ausgezeichnete Idee, diese störenden Einflüsse durch Anwendung eines schnell ändernden Feldes, wie es von einem Wechselstrom gewöhnlicher Frequenz geliefert wird, zu beseitigen und den Effekt dadurch zu multiplizieren. Letzteres wurde dadurch erreicht, daß man die Länge des Aufhängefadens des Stäbchens so wählte, daß die Eigenfrequenz des Stäbchens mit der Frequenz des Wechselstroms, also des Wechselfeldes, übereinstimmte. Es trat Resonanz ein, und aus der Resonanzamplitude der erzwungenen Schwinguug ließ sich die Größe des Einsteineffekts berechnen. Zum Verständnis des Spätern ist es notwendig, die Theorie hier kurz zu wiederholen; für die Einzelheiten verweise ich auf *E*.

Der Wechselstrom und damit das Wechselfeld sei gegeben durch:

$$i = A \sin \omega t,$$

dann läßt sich das nach Gleichung (1) bestimmte Drehmoment in eine Fourierreihe entwickeln:

$$D = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \cdot \cos n\omega t,$$

und die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung wird:

$$Q\frac{d^2\alpha}{dt^2} + P\frac{d\alpha}{dt} + \Theta\alpha = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \cdot \cos n\omega t,$$

wo Q das Trägheitsmoment des Stäbchens, P eine Dämpfungskonstante, Θ die Torsionskonstante der Aufhängung und α den Drehwinkel der Schwingung bedeutet. Vom Drehmoment D ist aber bloß das erste Glied $B_1 \cdot \cos \omega t$ in Betracht zu ziehen weil nur der *ihm* entsprechende Effekt durch Resonanz multipliziert wird. Ist nun das Wechselfeld recht stark, so wird das zu untersuchende Stäbchen stark gesättigt und Feldstärke und Drehmoment werden zeitlich sich so ändern, wie Figg. 5 und 6, S. 142 angeben. Für den idealen Fall eines unendlich starken Feldes und der Abwesenheit von Hysteresis, wo also das Drehmoment von 0 verschieden ist nur in den Momenten, da das Feld durch 0 hindurchgeht, wollen wir D mit $\cos \omega t$ multiplizieren und über eine ganze Periode $T = 2\pi/\omega$ integrieren:

$$\int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{+\frac{3\pi}{2\omega}} D \cdot \cos \omega t \cdot dt = \int D \cdot dt = \int B_1 \cos^2 \omega t \cdot dt$$

oder nach (1): $$4\lambda I = \frac{\pi}{\omega} B_1,$$

also: $$B_1 = \frac{4\lambda\omega}{\pi} \cdot I,$$

wo I die der maximalen Feldstärke entsprechende Magnetisierungsintensität bedeutet. Die periodische Lösung der Gleichung

(3) $$Q\frac{d^2\alpha}{dt^2} + P\frac{d\alpha}{dt} + \Theta \cdot \alpha = B_1 \cos \omega t$$

wird nun:

$$\alpha = \frac{B_1}{P \cdot \omega} \cdot \sin \omega t,$$

da es sich hier um sehr kleine Dämpfung handelt. Daraus ergibt sich die Amplitude der Resonanzschwingung zu:

$$\alpha_m = \frac{4\lambda I}{\pi P}$$

und hieraus:

$$\lambda = \frac{\pi \cdot P \cdot a_m}{4\,I} \tag{4}$$

Um eine *direkte* Bestimmung von P zu vermeiden, haben nun die Verfasser folgendes geistreiche Verfahren angewendet. Sie haben nicht nur das Resonanz*maximum* gemessen, sondern die ganze Resonanzkurve aufgenommen, welche die Amplitude der Schwingungen in Funktion der Frequenz des Wechselfeldes darstellt, wenn man diese in nächster Nähe der Eigenfrequenz des Stäbchens variieren läßt — durch kleine Änderungen der Tourenzahl der Wechselstrommaschine. Wie ihre Berechnung zeigt, gestattet dann diese Kurve zunächst eine Prüfung, ob die Größe P wirklich konstant ist, indem nämlich in diesem Falle die Größe

$$\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$$

für alle Punkte der Kurve konstant sein muß, wenn ν die jeweilige Differenz der Feldfrequenz gegenüber der Resonanzfrequenz und $b = a/a_m$, d. h. das Verhältnis der jeweiligen Amplitude zur Resonanzamplitude des Stäbchens bedeutet. Dann aber ergibt sich für die Resonanzamplitude:

$$a_m = \frac{\lambda I}{\pi^2 Q \nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}},$$

oder:

$$\lambda = \frac{\pi^2 Q a_m}{I} \cdot \nu \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}} \tag{5}$$

Bei ihren Messungen finden die Verfasser eine überraschend gute Übereinstimmung mit Formel (5), indem $\lambda = 1{,}11 \cdot 10^{-7}$ wird, während es genau $1{,}13 \cdot 10^{-7}$ sein sollte, wenn man für e/m den zuverlässigsten Wert $1{,}765 \cdot 10^{7}$ elektromagnetische Einheiten nimmt. Wie in E bemerkt wird, beruht die Güte der Übereinstimmung wohl auf Zufall, indem bei der Meßmethode mit einer Unsicherheit von 10% zu rechnen ist; doch stellen die Messungen eine glänzende Bestätigung des vorausgesagten Effekts dar.

Die Arbeit der Verfasser mußte ziemlich plötzlich abgebrochen werden, sodaß auch ein Teil der Untersuchung, der

nicht einwandfrei ausgeführt wurde, nicht mehr richtig gestellt werden konnte, nämlich die Bestimmung des Vorzeichens der kreisenden Elektronen (vgl. dazu die Berichtigung von Einstein).[1]) Nach Ansicht der Verfasser ließe sich die Methode sehr wohl zu einer genauen Bestimmung der wichtigen Größe e/m ausbauen.

Besonders letzterer Umstand veranlaßte mich nun, die Messungen von mir aus nach derselben Methode zu wiederholen, um über den zu erlangenden Grad der Genauigkeit Aufschluß zu erhalten und darauf bedacht zu sein, diesen Genauigkeitsgrad zu erhöhen durch einige Abänderungen in der Ausführung der Messungen. Auch ich wollte mein Hauptaugenmerk auf die Eliminierung der störenden Effekte richten, und dann sollte auch der nicht einwandfreie Teil der Messungen in *E* (Vorzeichenbestimmung) durch andere Messungen richtig ausgeführt werden. Damit ist der Zweck der vorliegenden Arbeit gekennzeichnet.

Abänderungen gegenüber den Meßanordnungen in *E*.

Die Meßanordnungen von *E* setze ich als bekannt voraus und will nun beschreiben, welche Abänderungen ich in der Ausführung der Messungen gegenüber jener Arbeit vorgenommen habe.

Die Aufnahme der Resonanzkurve: So geistreich auch das Verfahren in *E* ist, durch Aufnahme der Resonanzkurve die direkte Bestimmung der Dämpfung *P* überflüssig zu machen, so liegt gerade darin die Hauptschwierigkeit der ganzen Methode, diese Kurve einigermaßen genau zu erhalten. In *E* wurden die Änderungen in der Frequenz hervorgerufen durch Variieren eines parallel zur Erregerwicklung der das Wechselfeld erzeugenden Wechselstrommaschine geschalteten Widerstandes und gemessen an einem in Serie mit jenem Widerstand geschalteten Ampèremeter, das mit einem gewöhnlichen Resonanzfrequenzmesser in bezug auf gewisse exakt zu konstatierende Frequenzwerte (45; 45,5; 46; 46,5; .....; 55) geeicht war, während die übrigen Frequenzwerte dann mit dem Ampèremeter interpoliert wurden. Dabei war natürlich vorausgesetzt,

1) A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 17. S. 203. 1915.

daß während der ganzen Kurvenaufnahme alle übrigen Verhältnisse an der Maschine gleich geblieben waren, daß also keine anderen Frequenzänderungen als die durch die Widerstandsänderungen hervorgerufenen vorkamen. Wenn man nun beachtet (vgl. S. 133), um welch kleine Frequenzänderungen es sich überhaupt innerhalb der Kurve handelt, so wird man in der Unmöglichkeit der genauen Erreichung jener Bedingung eine ziemlich große Fehlerquelle erblicken müssen. Außerdem ist ein gewöhnlicher Frequenzmesser ein viel zu rohes Instrument zur Bestimmung so kleiner Frequenzdifferenzen, wie sie hier vorkamen.

Es war also geboten, die Frequenzdifferenzen genauer zu messen und sich von den willkürlichen Schwankungen der Tourenzahl der Maschine möglichst unabhängig zu machen. Dazu wurde ein neuer *Frequenzmesser* konstruiert, der die kleinen Frequenzänderungen *direkt* zu messen gestattete. Sein Prinzip beruhte darauf, daß das Magnetfeld des das Wechselfeld erzeugenden Wechselstroms an einem ausgespannten Draht Torsionsschwingungen erregte, deren Resonanz mit dem Wechselstrom durch Einstellen auf bestimmte Drahtlänge aufgesucht wurde. Jeder Frequenzänderung des Wechselstroms entsprach eine Änderung der wirksamen Drahtlänge, welche Änderung mit Hilfe einer Mikrometerschraube genau gemessen werden konnte und die Frequenzänderung zu berechnen gestattete. Im folgenden soll der Apparat genau beschrieben werden.

Ein Zylinder aus Knochen wurde auf eine Länge von 32 mm und eine Dicke von 8,1 mm genau abgedreht und in ein in der Mitte desselben senkrecht zur Zylinderachse durchgebohrtes Löchlein von 0,5 mm Weite ein magnetisiertes Stahldrahtstückchen genau eingepaßt. Auf der Mantelfläche wurde in der Zylindermitte ein kleines Planspiegelchen befestigt. An den Enden des Zylinders wurden Neusilberdrähte von 0,19 mm Dicke in Bohrlöcher eingelassen und mit Siegellack befestigt. Diese Einrichtung wurde dann an einem lotrecht gestellten Holzgestell parallel zu diesem montiert, indem das eine Ende des Drahtes mit einer Klemmvorrichtung fest fixiert war, während das andere Ende an einer Messingspiralfeder befestigt war, die den Draht stets gespannt hielt. Auf einem am Holz-

gestell befestigten Schlitten war längs des Drahtes mit Hilfe einer Mikrometerschraube eine Klemmvorrichtung verschiebbar, die den Draht an genau definierter Stelle einklemmen konnte und dadurch die Länge des schwingenden Drahtes bestimmte. Die Klemmvorrichtung bestand aus zwei parallelen Stahllamellen, die auf den einander zugekehrten Seiten an den Enden zwei Elfenbeinbacken trugen, die mit einer Fläche von 4×3 mm durch die federnden Stahllamellen aufeinander gepreßt wurden oder mit Hilfe eines Sperrschräubchens voneinander getrennt werden konnten. Zwischen diesen Backen war der Draht eingeklemmt. In der Höhe des Knochenzylinders war am Holzgestell eine Kupferdrahtwindungsgruppe befestigt, deren Ebene parallel der Richtung des Meßdrahts gestellt wurde und demselben mehr oder weniger genähert werden konnte. Mit Hilfe einer Torsionsschraube am festen Ende des Meßdrahtes konnte das kleine Magnetchen im Knochenzylinder parallel zur Ebene der Windungen gestellt werden. Die Windungsgruppe war in Serie mit den Feldspulen geschaltet, so daß der sie durchfließende Wechselstrom ein senkrecht zur Windungsebene gerichtetes Wechseldrehmoment auf das Magnetchen ausübte und den Meßdraht in Torsionsschwingungen versetzte. Stimmte die Frequenz des Stromes mit der Eigenfrequenz des Meßdrahtes überein, so trat Resonanz ein, und auf das Resonanzmaximum wurde nun bei jeder in Frage kommenden Frequenz des Wechselstroms die Meßdrahtlänge mit Hilfe der Mikrometerschraube eingestellt. Betrug hierbei die Länge des einen Meßdrahtteiles (vom festen Ende bis zum Knochenzylinder) l_1, die des andern (vom Knochenzylinder bis zur Einklemmstelle) l_2, so war die Eigenfrequenz, also auch die Frequenz des Wechsel-

Fig. 1.

stroms und Wechselfeldes, proportional zu $\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}}$ (wie sich ergibt aus den Torsionsgesetzen, aufgestellt für beide Drahtteile), und wenn nun für *eine* Einstellung (l_1, l_2) die Frequenz an einem gewöhnlichen Resonanzfrequenzmesser abgelesen wurde, so konnte sie für jede andere Einstellung l_1', l_2' leicht berechnet werden.

Sollte dieser Apparat zur genauen Messung von Frequenzdifferenzen geeignet sein, so mußten folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Der Meßdraht mußte sehr genau überall gleichen Querschnitt haben. Nachdem zuerst verschiedene andere Drähte in dieser Beziehung untersucht worden waren, die kein günstiges Resultat lieferten, zeigte sich diese Bedingung bei dem benutzten Neusilberdraht ausgezeichnet erfüllt. Er wurde auf seinen elektrischen Widerstand hin untersucht und zeigte von 5 zu 5 cm seiner Länge Unterschiede im Widerstand, die bloß innerhalb der Genauigkeit der angewandten Methode lagen (Messung von Spannung mit Galvanometer). Auch wurde eine Eichung meines Frequenzmessers mit einem gewöhnlichen Resonanzfrequenzmesser ausgeführt, indem z. B. für die beiden an letzterem abgelesenen Frequenzen 50 und 45 die Einstellungen an meinem Apparat gemacht wurden. Hier war dann die Bedingung der Proportionalität mit $\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}}$ ausgezeichnet erfüllt. 2. Es mußte die Einklemmstelle sehr genau definiert sein. Dazu waren die pressenden Flächen der Elfenbeinbacken exakt eben gefeilt, und die Begrenzungskanten paßten genau aufeinander. Auch änderten Manipulationen am Sperrschräubchen gar nichts an der Stabilität der ganzen Einrichtung. Elfenbein wurde für die Backen benutzt, weil dies ein recht weiches und elastisches Material ist und den Torsionsdraht in keiner Weise beschädigen konnte. 3. Es mußte der Resonanzbereich der Torsionsschwingungen des Drahtes möglichst klein und die Resonanzamplitude möglichst groß sein, d. h. der Widerstandskoeffizient der Schwingungen möglichst klein. Das wurde erreicht durch elektrisches Ausglühen des Drahtes, wodurch er ganz weich wurde und schön geradlinig gespannt werden konnte, ferner durch gute Zentrierung

beim Einlassen der Drähte in den Knochenzylinder und endlich durch die Wahl von Neusilber, das sehr kleine innere Reibung hat. Wie gering die Dämpfung war, kann man ersehen aus der Angabe, daß es beim freien Ausschwingenlassen 10 Sek. brauchte, bis die Amplitude auf die Hälfte sich reduzierte.

Das Trägheitsmoment des Knochenzylinders war so gewählt worden, daß bei einer wirksamen Drahtlänge von ca. 50 cm die Eigenfrequenz des Drahtes ca. 50 betrug, also gleich der üblichen Wechselstromfrequenz war.

Das schwingende Stäbchen. Es wurden mit zwei Arten von *Eisen*stäbchen Versuche angestellt und ferner mit einem *Nickel*stäbchen. Zunächst wurde ein aus *einem* Stück weichen Eisens bestehendes Stäbchen von 20 cm Länge und 2 mm Dicke benutzt, das zuerst nochmals stark ausgeglüht und dann möglichst genau geradlinig gerichtet wurde. Ferner ein aus einem Stäbchen*bündel* bestehendes Stäbchen von ungefähr den gleichen Dimensionen. Es war ja nicht ausgeschlossen, daß die durch das Wechselfeld erzeugten Wirbelströme störende Einflüsse auf die Schwingungen des Stäbchens ausüben könnten, und diese sollten durch Benutzung der zweiten Art Stäbchen möglichst ausgeschaltet werden. Sieben weiche Eisendrahtstücke von 20 cm Länge und 0,7 mm Dicke wurden, nachdem sie ausgeglüht und sehr sorgfältig geradlinig gerichtet worden, mit Hilfe von Schellack zu einem Bündel vereinigt, so daß sechs derselben sich im Kreise um das siebente gruppierten und jedes der sechs seine beiden Nachbarn im Kreise und das siebente *berührte.* Die erste Befürchtung, ein solches Bündel könnte wohl nicht genügend genau zentriert hergestellt werden, erfüllte sich dank der überaus sorgfältigen Arbeit des Mechanikers gar nicht. Das 3. Stäbchen, aus Nickel, bestand aus *einem* Stück und hatte die gleichen Dimensionen, wie das aus einem Stück bestehende Eisenstäbchen.

Die *Montierung* der Stäbchen geschah auch auf zwei verschiedene Arten, entweder durch Aufhängung oder durch Einspannung. Im ersten Falle wurde ein Metalldrahtstück von 0,2 mm Stärke (Neusilber oder Kupfer), das vorher durch Ausglühen weich gemacht worden war, — nur dadurch konnte gute axiale Aufhängung erlangt werden — möglichst zentrisch am einen Ende des Stäbchens eingelötet und dieser Aufhänge-

draht mit Hilfe einer Klemme an einem langen Glasstab befestigt, der dann lotrecht in die Achsenrichtung der Feldspulen zu stehen kam. Im andern Falle wurde das Stäbchen längs dieses Glasstabes *eingespannt*, d. h. an *beiden* Enden des Stäbchens wurden Drahtstücke eingelötet, das eine, obere, Stück wie vorhin am Stab eingeklemmt, das andere dagegen an eine federnde Messinglamelle angelötet, die ebenfalls mit einer Klemme am Glasstab befestigt war und das Stäbchen schwach in Spannung hielt. Neusilber wurde für die Aufhängung benutzt, weil dieses besonders kleine innere Reibung hat. In der Mitte des Stäbchens war ein genau planes Spiegelchen zur Beobachtung der Schwingungen befestigt.

Die Einspannung des Stäbchens hatte gegenüber der Aufhängung den Vorteil, daß das ganze System viel stabiler und die Widerstandskonstante der Torsionsschwingungen des Stäbchens kleiner war, weil der Draht durch die Spannung stets ganz geradlinig gehalten wurde. Aus diesen Gründen wurde diese Art Befestigung gewählt. Doch zeigten die Messungen auch einen Nachteil, indem hier der Einfluß des nicht kompensierten Erdfeldes viel größer war als bei aufgehängtem Stäbchen. Vor allem aber wurde die Einspannung deshalb benutzt, um die Dämpfungskonstante P direkt ermitteln zu können.

Die geringe Größe von P im Falle der Einspannung hatte eine recht große Resonanzamplitude des Stäbchens zur Folge, bewirkte aber andererseits, daß der Resonanzbereich recht klein wurde, wodurch die Genauigkeit beeinträchtigt worden wäre. Es wurde daher durch Anbringung von ein oder zwei Papierflügeln am Stäbchen dafür gesorgt, daß zur inneren Reibung des Befestigungsdrahtes ein Luftwiderstand hinzukam. Durch passende Wahl der Flügelgröße konnte dann die gewünschte Amplitudengröße erreicht werden.

Direkte Bestimmung des Dämpfungsfaktors. Neben der Methode, die Resonanzkurve aufzunehmen, wurde die Dämpfung P auch direkt bestimmt, um dann λ nach Formel (4) zu berechnen. Diese Bestimmung beruhte darauf, daß man das Stäbchen nach Ausschaltung des Wechselfeldes ausschwingen ließ und das logarithmische Dekrement der gedämpften Schwingung ermittelte. Dies war nur möglich bei *eingespanntem* Stäbchen,

da hier bei Entfernen des Feldes das Stäbchen keine anderen Bewegungen als Torsionsschwingungen ausführte. Das logarithmische Dekrement wurde bestimmt durch photographische Aufnahme der Schwingungen. Um eine Trommel von 30 cm Durchmesser wurde ein Streifen sehr empfindlichen Films gelegt und die Trommel gegen Lichteinflüsse geschützt durch eine Kartonhülle, die das von einer Halbwattlampe ausgehende, am Spiegel des Stäbchens reflektierte Licht durch einen horizontalen, 1 mm breiten Schlitz auf den Film fallen ließ. Ließ man nun die Trommel *langsam* um eine horizontale Achse rotieren, so bildeten sich auf dem Film die Schwingungen als ganz spitze Sinuskurven ab. Sind α_1 und α_2 irgend zwei direkt aufeinander folgende *gleich*gerichtete Amplituden, u_1 und u_2 die dazu gehörenden Lichtbandbreiten auf dem Film, so ist das logarithmische Dekrement:

$$d = \log \text{nat} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \log \text{nat} \frac{u_1}{u_2}.$$

Aus der Bewegungsgleichung des Stäbchens folgt dann:

$$P = 2\,Q\,d\,n,$$

wo n die Anzahl der großen Schwingungen pro Sekunde bedeutet.

Trotz der für photographische Aufnahmen großen Frequenz der Schwingungen war der Lichteindruck auf dem Film genügend stark, da die 50 Kerzen repräsentierende Lichtquelle auf ein bloß 5 mm langes und 0,2 mm breites Metallspirälchen der Halbwattlampe konzentriert war.

Wenn sich auch die Dämpfung auf diese Weise recht genau bestimmen läßt, so ist zu beachten, daß man hier den Wert von P bei *ausgeschaltetem* Wechselfeld erhält. Wie aber die Resultate zeigen werden, ist das unwesentlich.

Bestimmung des Vorzeichens der kreisenden Elektronen. Diese Bestimmung geschah auf Grund folgender Überlegungen[1]): Ist die Stromstärke, die das Wechselfeld erzeugt, gegeben durch:

$$i = A \cdot \sin \omega t, \tag{6}$$

so ist die Feldstärke mit ihr in gleicher Phase:

$$H = A' \sin \omega t,$$

1) Vgl. die Fassung von E in den Berichten der Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, XVIII S. 696—711. 1915.

also auch die Magnetisierung:

$$I = A' \cdot \sin \omega t,$$

wenn man von der kleinen Phasenverschiebung wegen Hysteresis absieht. Da nun der Einsteineffekt, bestehend in dem durch den Magnetisierungswechsel entstehenden Drehmoment, gegeben ist durch:

$$D = -\lambda \frac{dI}{dt},$$

also im Falle, daß es sich um *negative* Elektronen handelt, durch:

$$D = \lambda \frac{dI}{dt},$$

so wird:

$$D = B_1 \cos \omega t,$$

d. h. das Drehmoment eilt dem Strom um eine Viertelperiode voraus. Für den Winkel α des schwingenden Stäbchens ergibt sich aus der Differentialgleichung (3), in welcher natürlich der Winkel im gleichen Sinne positiv gezählt wird, wie das Drehmoment und wie der Strom in den Feldspulen, als Lösung:

$$\alpha = C \cdot \cos(\omega t - \varphi),$$

wo die Amplitude bestimmt ist nach:

$$C = \frac{B_1}{\sqrt{Q^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + P^2 \omega^2}}$$

und die Phasendifferenz nach:

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{P \cdot \omega}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}, \tag{7}$$

wo ω_0 die Frequenz der Eigenschwingung des Stäbchens ist. Resonanz tritt ein, wenn:

$$Q^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + P^2 \omega^2$$

ein Minimum ist, d. h. wenn:

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{P^2}{2Q^2}.$$

Da nun P eine sehr kleine Größe ist, wird die Resonanzfrequenz fast genau gleich der Eigenfrequenz, $\omega_r = \omega_0$. In diesem Falle wird also:

$$\text{tg}\, \varphi = \infty; \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

also wird bei *Resonanz:*

$$\alpha = C' \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = C' \cdot \sin \omega t. \tag{8}$$

Die Schwingungen haben danach im Falle der Resonanz *dieselbe* Phase wie der Strom — abgesehen von einer kleinen durch Hysteresis verursachten Phasendifferenz.

Würde es sich dagegen um Rotation *positiver* elektrischer Teilchen handeln, so hätte die Amplitude von D das entgegengesetzte Vorzeichen, also auch B_1, und auch C', d. h. zwischen Stäbchenschwingung und Strom würde eine Phasendifferenz von einer halben Periode bestehen.

Aus Gleichung (7) folgt, daß wegen der Kleinheit von P schon bei kleiner Abweichung der aufgezwungenen Frequenz von der Eigenfrequenz $\operatorname{tg}\varphi$ stark abnimmt und recht bald praktisch Null werden kann, also $\varphi = 0$ wird, d. h. zwischen Stäbchenschwingung und Strom würde dann eine Phasendifferenz von einer Viertelperiode bestehen.

Die experimentelle Prüfung dieser theoretischen Überlegung geschah nun in folgender Weise:

Parallel zu einem induktionsfreien Widerstand, der in den das Wechselfeld erzeugenden Stromkreis geschaltet war, wurde eine Oszillographenmeßschleife von Siemens & Halske geschaltet, die lotrecht in ein horizontales Magnetfeld zu stehen kam. Der sie durchfließende Wechselstrom hatte dann die gleiche Phase wie der Wechselstrom in den Feldspulen, weil die Meßschleife als praktisch induktionslos angesehen werden kann. Es wurde nun eine Vorrichtung getroffen, um die Schwingungen des Stäbchens und die der Meßschleife *gleichzeitig* auf *demselben* Film zu photographieren, unmittelbar nachdem die Schwingungen des Stäbchens auf Resonanz eingestellt worden waren. Es geschah dies ganz ähnlich wie bei der Bestimmung des logarithmischen Dekrementes des ausschwingenden Stäbchens (vgl. S. 119) unter Benutzung derselben rotierenden Trommel und derselben Schutzhülle mit dem horizontalen Schlitz. Durch *denselben* Schlitz hindurch bildeten sich beide Schwingungen nebeneinander auf dem Film ab. Der photographischen Aufnahme vorausgehend wurde die Schaltung der Meßschleife so gewählt, daß, wenn der Strom in den Feldspulen von oben betrachtet *mit* dem Uhrzeiger lief, an der Meßschleife ein Drehmoment entstand, das ebenfalls, von oben betrachtet, im Sinne des Uhrzeigers gerichtet war und auf dem Film eine Verschiebung der Lichtflecke nach rechts

bewirkte. Dies konnte leicht mit Gleichstrom ausprobiert werden.

Handelt es sich nun um negative Elektronen, so mußte — nach dem, was über positive Richtung von α und i gesagt worden — die Verdrehung des Eisenstäbchens von oben betrachtet mit dem Uhrzeiger erfolgen und also der Lichtfleck ebenfalls nach rechts verschoben werden, solange der Feldspulenstrom, von oben betrachtet, mit dem Uhrzeiger lief. Auf dem Film müßten also nach Gleichung (6) und (8) beide Schwingungskurven *parallel* zueinander verlaufen. Dies ist nun durch die photographische Aufnahme gefunden worden, und zwar zeigte sich keinerlei Phasenverschiebung zwischen beiden Kurven, die von Hysteresis herrühren könnte. Vielleicht wurde eine solche auch verdeckt durch eine entgegengesetzte Verschiebung, die von nicht ganz zu vermeidenden Selbstinduktionen herrühren konnte.

Die weiteren Versuchsanordnungen.

Es sollen jetzt noch die übrigen Teile der Versuchsanordnung beschrieben werden.

a) *Das Wechselfeld.* Weil auch Versuche mit eingespanntem (nicht bloß aufgehängtem) Stäbchen im Plan der Arbeit waren, mußte das Wechselfeld durch zwei getrennte Spulen hergestellt werden, denn das Planspiegelchen, das zur Beobachtung der Schwingungen diente, mußte am Stäbchen selber angebracht werden können, statt, wie in *E*, an einem Röhrchenansatz. Für die gute Zentrierung war das sowieso viel günstiger. Es wurden zwei genau gleich große Spulen aus Hartholz hergestellt von je 30 cm Länge und auf diese isolierter Kupferdraht von 1,5 mm Dicke in 12 Lagen gewickelt, so daß auf 1 Lage jeder Spule 160 Windungen kamen. Die innerste Lage hatte einen Durchmesser von 5 cm, die äußerste einen von 10 cm. Die Spulen konnten genau coaxial gestellt werden und waren durch 3 gleich dicke Holzklötzchen nur um 1 cm voneinander entfernt; die einander zugekehrten Holzflanschen der Spulen hatten eine Dicke von bloß 5 mm. Die Windungen der Spulen waren hintereinander geschaltet. Die ganze Kombination kam auf eine Unterlage zu stehen, die ihrerseits mit verstellbaren Fußschrauben auf einem Brett ruhte, das mit

Holzrollen auf einem festen Tisch verschiebbar war. Das magnetische Feld, das durch den Wechselstrom in den Spulen erzeugt wurde, war — wie untersucht wurde — natürlich nicht genau homogen, sondern gegen die Lücke zwischen den Spulen hin kleiner als gegen die Mitte jeder einzelnen Spule. Das hat aber wohl nichts zu sagen, da bei unseren Versuchen mit hohen Sättigungsmagnetisierungen gearbeitet wurde. Nach der ballistischen Methode ergab sich im Spulenpaar im Bereich von je 10 cm von der Mitte aus — das entspricht der Stäbchenlänge von 20 cm — eine mittlere Feldstärke von 72 Gauss bei einer Stromstärke von 1 Amp. Die bei den Messungen meistens verwendete Wechselstromstärke betrug ca. 3 A. eff., dies entspricht einer Amplitude von 4,2 A., also einer Feldstärke von der Amplitude 300 Gauss. Ich ging dagegen auch bis zu Stromstärken von 6 A. Amplitude, also einer Feldstärke von 420 Gauss Amplitude, während in *E* maximale Feldstärken von offenbar bloß 260 Gauss benutzt wurden. Da die Theorie der Messungen auf der Annahme beruht, daß die Ummagnetisierung des Stäbchens plötzlich geschehe, waren natürlich hohe Feldstärken sehr erwünscht.

Das S. 117 f. beschriebene Eisenstäbchen und Nickelstäbchen kam an dem die Länge der Spulenkombination überragenden Glasstab axial in das Spulenpaar zu stehen, indem der Glasstab auf dem Unterlagebrett der Spulen ruhte und von oben her durch eine in einem Galgen eingelassene Schraube fest an die Unterlage angedrückt wurde. Durch Bewegung des Galgens war es möglich, kleine Abweichungen in der Richtung des Glasstabes, also auch des Stäbchens hervorzurufen. Das in der Mitte des Stäbchens zur Beobachtung der Schwingungen mit Wachs befestigte Spiegelchen war aus einem dünnen genau planparallelen Galvanometerspiegel herausgeschnitten und hatte die Größe 2×3 mm. Die zuerst verwendeten Spiegel aus Mikroskopdeckgläschen lieferten nicht genügend scharfe Bilder und verzogen sich leicht nur schon durch das Befestigen am Stäbchen.

Als Lichtquelle für die objektive Spiegelablesung der Schwingungen diente eine kleine 50kerzige Halbwattlänge für 6 Volt Spannung, wie S. 119 beschrieben. Das Licht fiel durch eine Linse großer Brennweite durch den Zwischenraum zwischen den Feldspulen hindurch auf das Spiegelchen und wurde auf

eine 143 cm vom Spiegelchen entfernte Millimeterskala reflektiert, wo bei ruhendem Stäbchen ein scharf begrenzter, 1 mm breiter Lichtstreifen entstand.

Zur Erzeugung des Wechselstroms diente zuerst eine Wechselstrommaschine, die von einem Gleichstromnebenschlußmotor mit Riemen oder Gurt angetrieben wurde. Die Riemenübertragung verursachte jedoch zu große willkürliche Schwankungen in der Tourenzahl, die bei den kleinen zu messenden Frequenzdifferenzen zu sehr störend wirkten. Es wurde daher später ein Einankerumformer benutzt mit 110 Volt Gleichstrom- und 64 Volt Wechselstromspannung. Letztere genügte bei der recht großen Selbstinduktion des Spulenpaares nicht zur Erreichung der erforderlichen Wechselstromstärke. Es wurde deshalb der Wechselstrom zuerst in einen Stufentransformator geschickt, um sekundär die nötige Spannung zu erreichen.

Um vom Beobachtungsplatz aus die Tourenzahl der Maschine ändern zu können, wurde die Erregerleitung zum Beobachtungsplatz hingeleitet und dort zur groben Regulierung des Erregerstromes durch einen Gleitwiderstand geschlossen. Parallel zu diesem war ein Regulierwiderstand mit Quecksilberkontakten an amalgamierten Drähten geschaltet, der ein sehr feines Regulieren gestattete, ein viel exakteres als ein gewöhnlicher Gleitwiderstand mit seinen variablen Übergangswiderständen.

Zur Vermeidung willkürlicher Tourenzahlschwankungen war unerläßlich eine sorgfältige Instandhaltung des Gleichstromkollektors der Maschine. Durch häufiges Abschmirgeln wurde er stets ganz blank gehalten und für innigen Kontakt zwischen Kollektor und Bürsten gesorgt. Ferner wurde der Welle der Maschine eine größere Riemenscheibe aufgekeilt, wodurch sich die Trägheit des Ankers wesentlich erhöhte. Der zum Antrieb der Maschine verwendete Gleichstrom wurde stets voll aufgeladenen Batterien entnommen, und zwar Hauptstrom und Erregerstrom aus verschiedenen.

Während sich der Beobachtungsraum im Souterrain des Instituts befand, stand die Maschine im Parterre und war von ihm mehr als 30 m entfernt.

Der zu den Messungen verwendete sekundäre Transformatorstrom war sehr schön *sinusförmig*, wie die Aufnahmen mit dem Oszillographen (Figg. 5 u. 6) zeigen.

b) *Trägheitsmoment des Stäbchens.* Wie in *E* wurde dieses nach der bekannten Methode mit dem Zusatzträgheitsmoment bestimmt. Letzteres wurde geliefert von einem kleinen quaderförmigen Prisma aus Messing, das senkrecht zu seiner Längsachse durchbohrt war, so daß es gerade über das Untersuchungsstäbchen geschoben werden konnte.

c) *Bestimmung der Magnetisierungsintensität der Eisen- und Nickelstäbchen.* Da es sich um Magnetisierung mit Wechselstrom von *kleiner* Frequenz (50 Perioden) handelt, war man sicher, daß diese Magnetisierung gegenüber derjenigen mit Gleichstrom keinen Unterschied zeigt, indem in jeder Periode die der Amplitude des Stromes entsprechende maximale Induktion wirklich erreicht wird. Daher wurde die genaue ballistische Methode mit Gleichstrom angewendet. Ein steifes Papierröhrchen von 2 mm Weite und gleicher Länge wie das Untersuchungsstäbchen wurde über letzteres geschoben und war über die ganze Länge in einer Lage von 322 Windungen mit isoliertem Kupferdraht von 0,35 mm Dicke umwickelt, die als sekundäre Windungen dienten und mit einem Galvanometer verbunden waren. Das Stäbchen mit dem Glasstab kam dann in genau derselben Stellung, wie in den Hauptversuchen, in die Feldspulen zu stehen, in welchen jetzt ein Magnetfeld durch Gleichstrom erzeugt wurde und durch plötzliches Kommutieren in seiner Richtung geändert werden konnte. Die Eichung des Galvanometers geschah mit einer Eichspule bekannter Induktion. Die sehr große Schwingungsdauer des Galvanometers (32 Sekunden für die große Schwingung) ließ trotz der recht erheblichen Selbstinduktion der Feldspulen die Annahme zu, daß der Induktionsstoß beim Stromkommutieren voll und ganz auf das Galvanometer wirkte.

Es wurde so eine Induktionskurve aufgenommen für Stromstärken 1, 2, 3, ... 7 Ampères, die also jetzt die *mittlere* Induktion für die ganze Stäbchenlänge lieferte. Um einen Einblick zu erhalten, wie sich die Induktion von Stelle zu Stelle änderte, wurde eine kurze Probespule von 1,3 cm Länge, die gerade über das Stäbchen geschoben werden konnte, längs desselben verschoben und jeweilen die Induktion für die bei den meisten Versuchen angewandte Feldstärkenamplitude bestimmt. Der Unterschied zwischen größtem und kleinstem Wert betrug ca. 5 Proz.

Der Querschnitt des Untersuchungsstäbchens wurde durch direkte Messung seiner Dicke, bzw. derjenigen der 3 Teilstäbchen bestimmt, sowie auch aus Masse und spezifischem Gewicht.

Die störenden Effekte.

In *B* ist von drei Effekten die Rede, die störend auf die Messungen einwirken könnten.

a) Es könnten Schwingungen um eine Horizontalachse des Untersuchungsstäbchens eintreten, indem die Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft auf die Wechselpole des Stäbchens wirkt. Dieser Effekt konnte nicht konstatiert werden.

b) Es könnten Schwingungen um die Achse des Stäbchens in gleicher Phase mit dem Wechselstrom auftreten, herrührend von der Wirkung einer eventuellen Horizontalkomponente des Wechselfeldes auf eventuell vorhandene Eisenkristalle, deren Magnetisierung durch das Wechselfeld nicht gekippt wird. Dieser Effekt schien auch nicht vorhanden zu sein, denn, wenn die Spulen mit Hilfe der Fußschrauben geneigt wurden oder wenn die Richtung des mit dem *eingespannten* Stäbchen versehenen Glasstabes durch Verstellen des Galgens geändert wurde, so zeigte sich keine Änderung in der Resonanzamplitude des Stäbchens.

c) Schwingungen um die Vertikalachse des Stäbchens könnten hervorgerufen werden dadurch, daß die Horizontalkomponente des Erdfeldes infolge der nicht vollkommenen Zentrierung des Stäbchens auf die Wechselpole des Stäbchens wirkt. Dieser Effekt mußte sorgfältig kompensiert werden, und dies geschah wie in *B*. Eine Gruppe von 10 Kupferdrahtwindungen war auf einen in einem Kreise von 150 cm Durchmesser gebogenen Kartonstreifen gewickelt, der auf einem Holzgestell montiert war. Die Ebene der Spule wurde lotrecht gestellt und senkrecht zur magnetischen Meridianrichtung. In die Spule kam der Tisch mit den Feldspulen zu stehen. Neben den Feldspulen stand auf dem mit Holzrollen versehenen Unterlagebrett ein Erdinduktor. So konnte jederzeit durch Verschieben des Brettes auf dem Tisch entweder das Feldspulenpaar oder der Erdinduktor zur Bestimmung der durch die Kompensationsspule zu schickenden Stromstärke in die Mitte der Kompensationsspule gerollt werden. Der große

Durchmesser der Spule gab Sicherheit, daß die Horizontalkomponente des Erdfeldes über die ganze Länge des Stäbchens hin kompensiert war.

Eine zuerst angebrachte Spule zur Kompensierung der Vertikalkomponente des Erdfeldes erwies sich als überflüssig.

Späterhin geschah die Kompensation des Erdfeldes ohne Benutzung des Erdinduktors, indem man von der Tatsache ausging, daß die Horizontalkomponente immer nur eine *Vergrößerung* und nie eine Verkleinerung der Resonanzamplitude bewirken kann. Es wurde also eine Kurve aufgenommen, die die Resonanzamplitude als Funktion des Kompensationsstromes darstellte, wenn man diesen Werte annehmen ließ über und unter demjenigen der völligen Kompensation. Die vollkommene Symmetrie der Kurve gestattete dann leicht die Bestimmung der Minimalamplitude mit der zugehörigen Kompensationsstromstärke. Wenn die Zentrierung des Stäbchens nicht sehr schlecht war, kam es auf die *ganz genaue* Einhaltung dieser Stromstärke nicht an, da die Kurve beim Minimum sehr flach verläuft. Immerhin wurde die Stromstärke mit einem Siemensinstrument abgelesen.

d) Es könnte endlich auch ein störender Effekt auftreten, herrührend von der gegenseitigen Wirkung eventueller Horizontalkomponenten des Wechselfeldes auf die Wechselpole des Stäbchens. Allerdings ist die Frequenz dieses Effektes doppelt so groß, wie die des Einsteineffekts, so daß er bei Resonanz nicht in Betracht käme. Dies gilt aber nur, wenn der von der Wechselstrommaschine gelieferte Strom genau symmetrisch ist. Schon eine kleine Asymmetrie könnte die Störung hervortreten lassen, da diese dann die Frequenz des Einsteineffekts hätte. Nun wurde im Laufe der Untersuchungen mit vier verschiedenen Wechselstrommaschinen gearbeitet, nämlich zwei durch Gleichstrommotoren angetriebenen und zwei Einankerumformern. In der Größe des Einsteineffekts zeigte sich kein wesentlicher Unterschied, ob man den Strom dieser oder jener Maschine entnahm, und daraus ist wohl zu schließen, daß der obige störende Effekt bei meinen Messungen nicht vorkam, jedenfalls nur in einer Größe, die innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Methode liegt.

Die Messungen.

Es soll jetzt noch näher beschrieben werden, wie bei den Messungen vorgegangen wurde.

Vor Beginn ließ man die Maschine längere Zeit laufen, um möglichst konstante Tourenzahl und stationäre Temperaturverteilung in den Feldspulen zu erzielen. Es wurde stets Wechselstrom von ca. 50 Perioden benutzt. Die Fadenlänge des schwingenden Stäbchens, die dieser Frequenz entsprach, war ziemlich rasch gefunden durch Berechnung und Probieren. Die Stromstärke zur Kompensation des Erdfeldes war auch rasch ermittelt durch Aufsuchen von ein paar Punkten der S. 127 beschriebenen Kurve.

Die Apparate standen im Beobachtungsraum so, daß von dem Platz aus, wo der Erregerstrom der Maschine für die Änderung der Frequenz reguliert wurde, beide Millimeterskalen gleichzeitig überblickt werden konnten, nämlich diejenige, die das Lichtband der Schwingungen des Stäbchens und diejenige, die das Lichtband der Schwingungen des neuen Frequenzmessers zeigte. Bei der Aufnahme der Resonanzkurve wurde dann so vorgegangen:

Man suchte die Einstellung am Frequenzmesser, die der Resonanzfrequenz des Stäbchens möglichst entsprach — ganz genau brauchte man sie nicht zu kennen —, was wieder durch Berechnung und Probieren leicht zu finden war, und las die dieser Einstellung entsprechende Frequenz an einem gewöhnlichen Resonanzfrequenzmesser ab. Dann wurde die Klemmstelle nach beiden Seiten hin mit Hilfe der Mikrometerschraube verschoben, fortschreitend um je 1 mm oder $^1/_2$ mm oder $^1/_4$ mm. Für jede dieser neuen Einstellungen wurde durch Regulierung des Erregerstroms auf Resonanz am neuen Frequenzmesser eingestellt und im Moment, da diese erreicht war, die Amplitude des schwingenden Stäbchens abgelesen. So erhielt man die ganze Resonanzkurve durch Verschieben der Klemmstelle über einen Bereich von 8—10 mm. In unmittelbarer Nähe des Resonanzmaximums des Stäbchens mußten die Verschiebungen bloß um $^1/_2$ oder $^1/_4$ mm geschehen wegen der Steilheit der Kurve. Bei dieser Art des Vorgehens war man unabhängig von den willkürlichen Schwankungen der Tourenzahl der Maschine; diese konnten die Aufnahme der

Kurve bloß verzögern und erforderten ziemlich große Geduld, während die ganze Kurve in wenigen Minuten hätte aufgenommen werden können, wenn auch diese ganz kleinen Schwankungen ausgeblieben wären.

Die Kurven wurden gewöhnlich in beiderlei Richtung aufgenommen, d. h. sowohl von den kleineren zu den größeren, als auch von den größeren zu den kleineren Frequenzen fortschreitend. Es zeigte sich nämlich ein Unterschied in der Konstanten $\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$, der darin begründet sein mag, daß zur Zeit der Messungen doch noch nicht ganz stationärer Temperaturzustand in den Feldspulen erreicht war und daß die Temperaturschwankungen im Beobachtungsraum die Dimensionen des Meßdrahtes am Frequenzmesser etwas änderten.

Neben der Kurvenaufnahme wurden auch sog. „*Dreipunktaufnahmen*“ gemacht. Es zeigte sich nämlich, daß die Werte $\nu\cdot\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ für den in Betracht gezogenen Bereich der Resonanzkurve recht schön konstant waren, so daß außer dem Maximum der Kurve zwei symmetrische, d. h. zur selben Schwingungsamplitude gehörende Punkte der Kurve, zur Berechnung jenes Wertes genügten. Es wurden also drei Einstellungen am Frequenzmesser gemacht, diejenige, die dem Resonanzmaximum des Stäbchens entsprach, und die beiden um je 1 mm (oder $1^1/_2$ mm, oder 2 mm) benachbarten. Die zu letzteren gehörenden Amplituden waren nicht genau gleich, da die Kurve nicht genau symmetrisch ist; zur Berechnung diente dann der Mittelwert. Dem Nachteil der Dreipunktaufnahme, daß nur *ein* Punktepaar der Kurve benutzt wird, steht der Vorteil gegenüber, daß die Messung sehr rasch ausgeführt werden konnte, wodurch die vorhin genannten Temperatureinflüsse fortfielen.

Es wurden im ganzen folgende Versuche ausgeführt:

1. Messungen an einem aus *einem* Stück bestehenden *Eisenstäbchen*, das an einem Metalldraht *aufgehängt* war.

2. Messungen an einem *zusammengesetzten*, an einem Metalldraht *aufgehängten Eisenstäbchen*.

3. Messungen an einem *zusammengesetzten*, von Metalldrähten *eingespannten Eisenstäbchen*.

4. Messungen an einem aus einem Stück bestehenden eingespannten Eisenstäbchen.

Die Bestimmung von λ erfolgte in den drei ersten Fällen sowohl durch Aufnahme der ganzen Resonanzkurve, als auch unter Anwendung der Dreipunktmethode.

Im Falle 3. wurde auch die direkte Bestimmung der Dämpfung P durch Ausschwingenlassen des Stäbchens (vgl. S. 118 f.) ausgeführt, um eine von der Resonanzkurve unabhängige Bestimmung von λ zu haben.

Im Falle 4. wurde nur die Methode der direkten Bestimmung der Dämpfung angewendet.

1. Messungen an dem aus einem Stück bestehenden aufgehängten Eisenstäbchen.

Das zylindrische Eisenstäbchen wurde einem Bündel ganz weichen Eisendrahtes entnommen, wie man solche bei Induktionsspulen verwendet.

Es hatte folgende Dimensionen:

Länge 20,00 cm; Dicke 0,205 cm.

Querschnitt 0,0330 cm²; Volumen 0,660 cm³; Masse 5,125 g. Aus der Masse berechnet sich die Dichte zu 7,77, also eine für Eisen normale Dichte.

Der Aufhängedraht war aus Neusilber, 0,19 mm dick und 16,5 mm lang, und ergab so eine Eigenschwingung mit der Frequenz 49,2.

Das Zusatzträgheitsmoment (Quader aus Messing) ergab sich aus der Masse $M = 20{,}10$ g und den Längen der zur Achse *nicht* parallelen Kanten $2a = 6{,}000$ cm und $2b = 0{,}503$ cm

$$Q' = \frac{M}{3}(a^2 + b^2) = 60{,}72\,,$$

also zusammen mit dem später sich ergebenden Trägheitsmoment des Stäbchens ($Q = 0{,}03$) 60,75.

Da das mit dem Zusatz belastete Stäbchen eine Frequenz von 1,110 zeigte, so wird also das Trägheitsmoment des Stäbchens:

$$Q = 60{,}75\left(\frac{1{,}11}{49{,}2}\right)^2 = \underline{0{,}0309}\,.$$

Weil am Stäbchen Papierflügel angebracht waren, ließ sich dieser Wert nicht genau durch Berechnung kontrollieren.

Bei der Bestimmung der Magnetisierungsintensität des Stäbchens ergab sich folgende Tabelle:

i	H	B	I'	I
1,0	72	16 020	1275	841
2,0	144	17 280	1371	904
3,0	216	18 240	1456	960
4,0	289	19 040	1515	1000
5,0	360	19 800	1559	1029
6,0	432	19 860	1580	1043
7,0	504	20 100	1596	1053

Hierin bedeutet: i den Magnetisierungsgleichstrom in Ampères, H die Feldstärke in Gauss, B die Induktion im Stäbchen (worin der Wert von H nicht enthalten), I' die Magnetisierungsintensität der Volumeneinheit, I die dem Volumen des Stäbchens entsprechende Intensität.

Die Kurve I in Fig. 2 veranschaulicht den Zusammenhang graphisch.

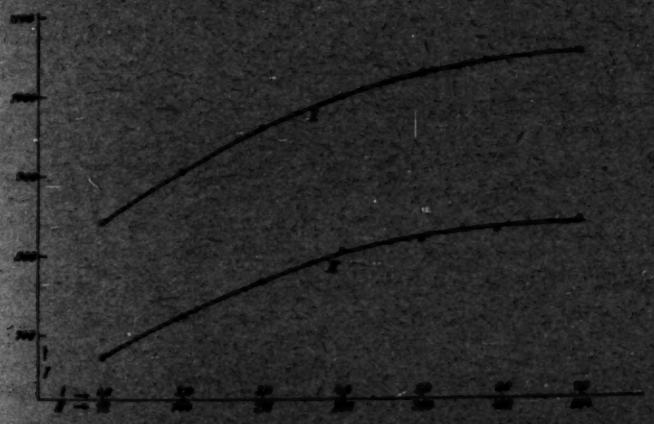


Fig. 2.

Der Einfluß des nicht kompensierten erdmagnetischen Feldes auf die Schwingungen war nicht sehr groß, indem er die Resonanzamplitude etwa verdoppelte.

Es wurde eine ganze Reihe von Resonanzkurven aufgenommen, und zwar jeweilen eine Aufnahme mit ansteigender

und eine mit abnehmenden Periodenzahlen in unmittelbarer Aufeinanderfolge. Solche zwei Aufnahmen wurden zu einer Mittelwertkurve vereinigt.

Ich gebe hier eine solche Messung in extenso wieder:

$i_{eff} = 2{,}56$ A.; $i_m = 3{,}62$ A.; $H_m = 260$; $I = 986$.

Doppelte maximale Resonanzamplitude a_m, an der Millimeterskala abgelesen, $s_m = 30{,}5$ mm, zugehörige Frequenz $n_0 = 49{,}3$.

Bei Aufnahme der Resonanzkurve ergab sich folgende Tabelle, in welcher l_1 und l_2 die Längen der beiden Drahtteile am Frequenzmesser in Zentimetern, n die Frequenz des Wechselstromes (berechnet nach S. 115 f., ausgehend vom Wert 49,2), s die doppelte Amplitude der Schwingungen, abgelesen in Millimetern an der Millimeterskala, bedeutet:

l_1	l_2	n	s
24,400	23,900	49,043	4,3
24,400	23,800	49,095	6,2
24,400	23,700	49,147	8,4
24,400	23,600	49,200	14,1
24,400	23,550	49,226	19,6
24,400	23,500	49,253	29,5
24,400	23,450	49,280	29,5
24,400	23,400	49,307	20,5
24,400	23,667	49,325	17,5
24,400	23,333	49,343	13,7
24,400	23,300	49,361	11,5
24,400	23,200	49,415	7,3
24,400	23,100	49,470	4,9
24,400	23,000	49,525	3,5

Die zugehörige Kurve (Fig. 3) verläuft ziemlich symmetrisch zum Resonanzmaximum, doch absolut symmetrisch soll sie auch nach der Theorie nicht sein.

Es wurden nun jeweilen beide zu gegebener Amplitude gehörenden Werte von n der Kurve entnommen, dann ergab die halbe Differenz derselben den Wert ν. So entstand für den Amplitudenbereich $s = 20$ mm bis 6 mm nachfolgende Tabelle:

s	ν	$\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$
20	0,041	0,0356
18	0,049	0,0358
16	0,059	0,0364
14	0,071	0,0367
12	0,087	0,0372
10	0,107	0,0371
8	0,133	0,0362
6	0,172	0,0345
	Mittel	0,0362

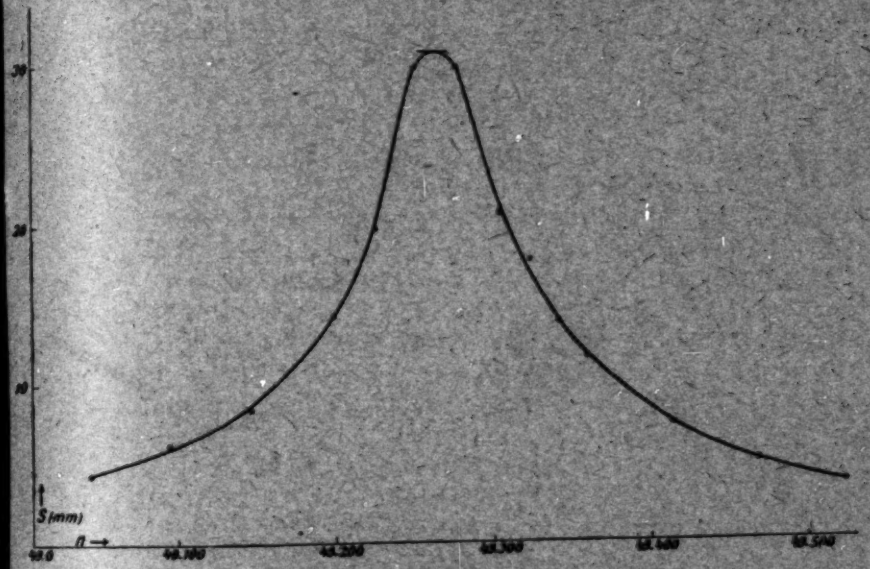


Fig. 3.

Die Werte $\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ zeigen die Tendenz, zuerst zuzunehmen und dann abzunehmen, doch in unbedeutendem Maße. Jedenfalls war die Annahme berechtigt, in Gleichung (3) die Dämpfung durch ein *lineares* Glied zu berücksichtigen. Die gute Konstanz in der Tabelle ist vielleicht gerade durch die nötig gewordene Anbringung von Papierflügeln am Stäbchen erreicht worden.

Mit den gefundenen Werten wird nach Gleichung (5)

$$\lambda = \frac{\pi^2 \times 0{,}0309 \times 0{,}0362}{986} \cdot \frac{3{,}05}{4 \times 143} = 0{,}597 \cdot 10^{-7}.$$

Sogleich im Anschluß an die Messungen wurde die Resonanzamplitude für eine bedeutend größere Feldstärke abgelesen, nämlich wenn $i_m = 5{,}94$ A., $H_m = 427$, $I = 1044$; sie betrug hier $s_m = 3{,}15$ cm.

Unter Benutzung derselben Resonanzkurve von oben wird in diesem Fall:

$$\lambda = 0{,}582 \cdot 10^{-7},$$

und diesem Wert ist insofern größeres Gewicht beizulegen, als dem oberen, als die Magnetisierungswechsel plötzlicher geschehen. Wegen zu starker Erwärmung der Feldspulen konnte die Resonanzkurve unter Anwendung dieser hohen Stromstärke nicht genau aufgenommen werden.

Weitere Aufnahmen von Resonanzkurven ergaben folgende Werte für $\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ und λ, die beliebig herausgegriffen sind:

$\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$		$\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$	
	0,0349		0,0352
	0,0355		0,0354
	0,0355		0,0368
	0,0357		0,0372
	0,0367		0,0379
	0,0368		0,0371
	0,0366		0,0361
			0,0345
Mittel:	0,0359	Mittel:	0,0368

$\lambda = 0{,}573 \cdot 10^{-7} (H_m = 427)$. $\lambda = 0{,}552 \cdot 10^{-7} (H_m = 408)$.

Nach der Dreipunktmethode ergaben sich folgende Werte für λ:

$$\lambda = 0{,}554 \cdot 10^{-7}$$
$$0{,}561 \cdot 10^{-7}$$
$$\text{Mittel: } 0{,}558 \cdot 10^{-7}$$

Als Gesamtmittelwert für λ ergibt sich, wenn man den Einzelresultaten verschiedene Gewichte beilegt,

$$\lambda = 0.57 \cdot 10^{-7},$$

also ein Wert, der sehr genau *die Hälfte des zu erwartenden Wertes* $1{,}13 \cdot 10^{-7}$ ausmacht.

2. Messungen an dem zusammengesetzten aufgehängten Eisenstäbchen.

Die Teildrähte, aus denen das Untersuchungsstäbchen nach S. 117 zusammengesetzt war, wurden durch Ziehen und nachheriges Ausglühen aus unter 1. benutzten Stäbchen hergestellt. Die mechanische Einwirkung durch Ziehen hatte eine Abnahme der Induktion zur Folge.

Das zusammengesetzte Stäbchen war an einem Kupferdraht von 0,2 mm Dicke und 1,90 cm Länge aufgehängt und trug einen Papierflügel (zur Erhöhung der Dämpfung).

Die Dimensionen des Stäbchens waren:

Länge 20,03 cm; mittlere Dicke der 7 Teilstäbchen 0,736 mm.

Daraus: Eisenquerschnitt des ganzen Stäbchens 0,0298 cm^2
Querschnitt aus Masse und Dichte berechnet . 0,0291 cm^2
Benutzter Mittelwert . . . . . 0,0294 cm^2
Volumen . . . . . 0,589 cm^3
Trägheitsmoment (wie früher bestimmt) . . . . 0,0291$_8$

Die Magnetisierungsintensität in Funktion der Stromstärke bzw. Feldstärke zeigt folgende Tabelle:

i	H	B	I'	I
1,0	72	14 350	1142	673
2,0	144	15 460	1230	724
3,0	216	16 310	1298	764
4,0	288	17 160	1365	804
5,0	360	17 490	1392	820
5,9	425	17 740	1412	831
7,0	504	17 990	1432	843

Graphisch ist sie in Kurve II von Fig. 2 dargestellt.

Der Einfluß des erdmagnetischen Feldes war hier sozusagen *gleich Null*, indem eben ganz zufälligerweise das Stäbchen außerordentlich gut zentriert war.

Die Resonanzkurvenaufnahmen ergaben hier im Mittel für λ den Wert:

$$\lambda = 0{,}57 \cdot 10^{-1}$$

bei einer angewandten Maximalfeldstärke von 352 Gauss.

Die Dreipunktaufnahmen gaben die Werte:

$$\lambda = 0{,}587 \cdot 10^{-7}$$
$$0{,}563 \cdot 10^{-7}$$
$$0{,}600 \cdot 10^{-7}$$

Mittel: $0{,}583 \cdot 10^{-7}$

Als Gesamtmittel ergibt sich daraus:

$$\lambda = 0{,}58 \cdot 10^{-7}.$$

Die gute Übereinstimmung der Werte in 1. und 2. zeigt, daß die Wirbelströme im Eisenstäbchen keine merklichen Störungen auf die Messungen ausübten.

Auch hier liegt der Wert von λ in nächster Nähe der Hälfte des theoretisch zu erwartenden Wertes.

3. Messungen am zusammengesetzten eingespannten Eisenstäbchen.

a) Messungen mit Aufnahme der Resonanzkurve.

Es handelt sich um genau dasselbe Stäbchen wie in 2., nur daß es nicht aufgehängt, sondern eingespannt war mit Neusilberdraht von 0,19 mm Dicke und 2 × 3,9 cm Länge. Es wurden *zwei* Papierflügel in symmetrischer Lage am Stäbchen befestigt.

Das Trägheitsmoment betrug

$$Q = 0{,}0310.$$

(Der Unterschied gegenüber 2. rührt vom 2. Flügel her.)

Der Einfluß der erdmagnetischen Kraft war hier viele Male größer als in 2. Es war daher notwendig, den Eliminationsstrom recht genau zu bestimmen, indem, wie S. 127 beschrieben, eine Kurve aufgenommen wurde.

Eine Resonanzkurvenaufnahme sei hier wiedergegeben, und zwar eine Mittelwertkurve (Fig. 4).

Aus ihr ergibt sich folgende Tabelle:

s	v	$v \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$
18	0,032	0,0317
16	0,040	0,0320
14	0,049	0,0320
12	0,060	0,0319
10	0,075	0,0322
8	0,098	0,0326
6	0,134	0,0326
	Mittel:	0,0321

Ferner war: $s_m = 25{,}6$ mm; $i_m = 3{,}56$ A.; H_m 256; $I = 787$.
Dann wird:

$$\lambda = 0{,}559 \cdot 10^{-7}.$$

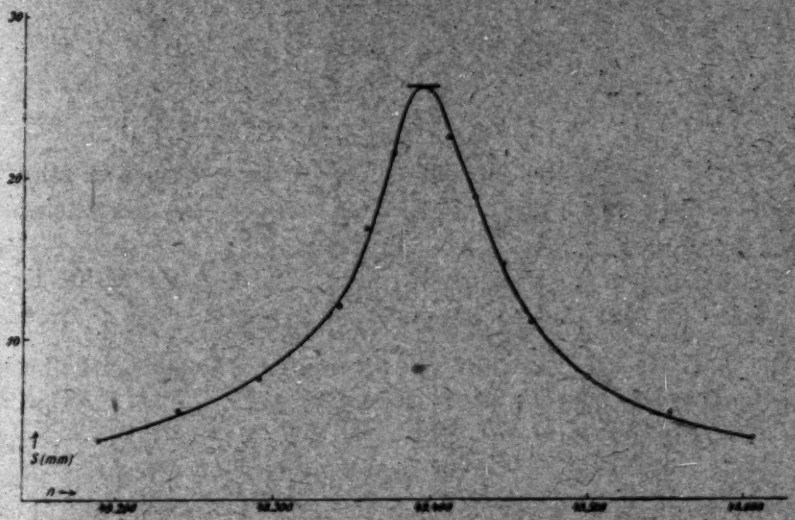


Fig. 4.

Wie die Theorie verlangt, sind die Werte von $\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ sehr konstant. Daß diese Konstanz nicht nur auf Zufall beruht, mögen die folgenden aus anderen Resonanzkurven sich ergebenden Werte von $\nu \cdot \sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$ zeigen, die alle in ungefähr demselben Kurvenbereich liegen:

II.	III.
0,0329	0,0312
0,0310	0,0307
0,0308	0,0313
0,0310	0,0314
0,0315	0,0315
0,0329	0,0320
	0,0326
0,0317	0,0327
	0,0317

Aus den verschiedenen Kurvenaufnahmen ergibt sich als Mittelwert:

$$\lambda = 0{,}56 \cdot 10^{-7}.$$

Die Dreipunktaufnahmen ergaben folgende Werte:

$$\lambda = 0{,}560 \cdot 10^{-7}$$
$$0{,}561 \cdot 10^{-7}$$
$$0{,}592 \cdot 10^{-7}$$
$$\text{Mittel: } 0{,}571 \cdot 10^{-7}$$

Also Gesamtmittel:

$$\lambda = 0{,}57 \cdot 10^{-7},$$

d. h. wieder ein Wert gleich der Hälfte des theoretisch zu erwartenden Wertes.

b) Messungen mit direkter Bestimmung von P.

Es wurde hier dasselbe Stäbchen wie in a) in genau derselben Anordnung gebraucht und das logarithmische Dekrement der Schwingungen nach S. 118f. bestimmt. Nachdem nämlich s_m abgelesen worden, wurde durch Annähern eines Magneten an das Stäbchen die Amplitude vergrößert, dann der Wechselstrom ausgeschaltet und die photographische Aufnahme der Schwingungen gemacht.

Bei einer solchen Messung war:

$i_m = 4{,}33$ A.; $H_m = 312$; $I = 809$; $s_m = 2{,}60$ cm; $n = 49{,}5$.

u_{cm}	$\log u$	$\log u_0 - \log u_{100}$	u_{cm}	$\log u$	$\log u_0 - \log u_{100}$
4,97	0,6964		2,19	0,3404	0,1781
4,77	0,6785		2,10	0,3222	0,1761
4,57	0,6599		2,02	0,3054	0,1789
4,38	0,6415		1,95	0,2900	0,1739
4,28	0,6263		1,85	0,2672	0,1830
4,09	0,6117		1,78	0,2504	0,1889
3,85	0,5855		1,71	0,2330	0,1836
3,71	0,5694		1,66	0,2201	0,1778
3,55	0,5502		1,57	0,1959	0,1825
3,44	0,5366		1,51	0,1790	0,1827
3,30	0,5185	0,1779	1,48	0,1708	0,1701
3,15	0,4983	0,1802	1,42	0,1525	0,1699
3,05	0,4843	0,1756	1,33	0,1239	0,1815
2,91	0,4639	0,1776	1,30	0,1139	0,1761
2,82	0,4502	0,1761	1,26	0,1004	0,1668
2,75	0,4393	0,1724	1,20	0,0792	0,1712
2,61	0,4166	0,1689	1,18	0,0531	0,1799
2,50	0,3979	0,1715	1,10	0,0414	0,1787
2,39	0,3784	0,1718	1,07	0,0294	0,1665
2,30	0,3617	0,1749	1,01	0,0043	0,1747
				Mittel:	0,1763

$$\log \text{nat } u_0 - \log \text{nat } u_{100} = 0{,}4060.$$

Entnimmt man der photographischen Aufnahme je die 10. Lichtbandbreite, u_0, u_{10}, u_{20}, u_{30} ..., definiert nach S. 119, so erhält man vorstehende Tabelle.

Wie die Tabelle zeigt, wurde zur Bestimmung des Dekrements der Amplitudenbereich von 5 bis 1 cm benutzt, entsprechend der Resonanzamplitude $s_m = 2{,}6$.

Nun ist:

$$d = \frac{\log \text{nat} \frac{u_0}{u_{100}}}{100} = 0{,}00406,$$

$$P = 2\,Q\,d\,n = 2 \times 0{,}0310 \times 0{,}00406 \times 49{,}5 = \underline{0{,}01246}.$$

Mit diesem Wert wird nach Formel (4):

$$\lambda = \frac{\pi \times 0{,}01246}{4 \times 809} \cdot \frac{2{,}60}{4 \times 143},$$

$$\underline{\lambda = 0{,}550 \cdot 10^{-7}}.$$

Eine zweite photographische Aufnahme ergab unter übrigens gleichen Umständen: $d = 0{,}00408$; $P = 0{,}01277$.

$$\underline{\lambda = 0{,}546 \cdot 10^{-7}}.$$

Also auch nach dieser Methode ergeben sich Werte in nächster Nähe der Hälfte des theoretisch erwarteten Wertes.

Weitere Dekrementbestimmungen wurden ausgeführt, wenn die beiden Papierflügel am Stäbchen fehlten und dieses in anderer Art eingespannt war, einfach mit zwei Klemmen, ohne Federzug. Dies war die Einrichtung, bevor man zur anderen, viel besseren, übergegangen war. Dabei ergab sich z. B. folgende Messung:

$i_m = 4{,}80$ A.; $H_m = 345$; $I = 819$; $s_m = 3{,}45$ cm; $u_0 = 50{,}3$;
$Q = 0{,}0273$; $d = 0{,}00366$; $P = 0{,}01006$.

$$\lambda = 0{,}582 \cdot 10^{-7}.$$

Als Gesamtmittel für alle mit *Eisen* angestellte Messungen wird:

$$\underline{\underline{\lambda = 0{,}57 \cdot 10^{-7}}}.$$

4. Messungen an einem eingespannten Nickelstäbchen.

Das Nickel war rein und stammte aus den Rheinischen Nickelwerken in Westfalen.

Da die Magnetisierungsfähigkeit des Nickels im Vergleich zu derjenigen des Eisens bedeutend kleiner ist, mußte dafür

gesorgt werden, daß das schwingende System möglichst kleine Dämpfung habe, so daß hier natürlich die dämpfenden Papierflügel weggelassen wurden und das Stäbchen nur in *eingespannter* (nicht auch aufgehängter) Lage benutzt wurde. Die dadurch erzielte Kleinheit der Dämpfung mag daraus ersehen werden, daß das frei ausschwingende Stäbchen mehr als 9 Sekunden brauchte, bis die Amplitude auf die Hälfte ihres Betrages gesunken war. Die Resonanzkurve würde hier also sehr spitz ausfallen, so daß aus Genauigkeitsgründen von einer Aufnahme derselben ganz abgesehen wurde. Es kam hier also bloß die Methode mit direkter Bestimmung der Dämpfung zur Anwendung.

Das zylindrische Stäbchen hatte folgende Daten:

Länge 19,98 cm; Dicke 0,202 cm;

Querschnitt $0{,}0320_5$ cm^2; Volumen 0,641 cm^3; Masse 5,67 g;

Trägheitsmoment (wie früher bestimmt) 0,0293.

Nach der Formel $Q = \frac{1}{2} M r^2$ berechnet, würde sich für Q ergeben 0,0289, also in sehr guter Übereinstimmung mit dem beobachteten Wert, was auf sehr gute Zentrierung des Stäbchens schließen läßt.

Die Magnetisierungsintensität in Funktion der Stromstärke bzw. Feldstärke — wie früher bestimmt — zeigt folgende Tabelle:

i	H	B	I'	I
1,20 A.	86	4722	375,7	240,8
2,04 „	146	5374	427,6	274,0
3,10 „	223	5721	455,2	291,8
4,00 „	288	5845	465,0	298,1
5,00 „	360	5942	472,7	303,0
6,23 „	450	5992	476,8	305,6

Die aus mehreren Ausschwingungsbeobachtungen berechnete Größe der Dämpfung wurde im Mittel gefunden zu:

$$P = 0{,}00473_4$$

für den Amplitudenbereich, der in Betracht kam. Es zeigte sich hier — wo keine Papierflügeldämpfung angewendet wurde — ein mit der Amplitude langsam abnehmendes logarithmisches Dekrement.

Die Lichtbandbreite der Resonanzamplitude betrug:

bei $i_m = 4{,}24$ A., also $H_m = 305$ Gauß und $I = 300 : s_m = 2{,}7$ cm

„ $i_m = 5{,}7$, „ „ $H_m = 410$ „ „ $I = 304 : s_m = 2{,}7$ „

Danach ergeben sich folgende zwei Werte:

$$\lambda = \frac{\pi \cdot P a_m}{4 I_r} = \frac{\pi \times 0{,}00473_4 \times 2{,}7}{4 \times 300 \times 4 \times 143} = \underline{0{,}585 \cdot 10^{-7}}$$

$$\underline{\lambda = 0{,}577_4 \cdot 10^{-7}}.$$

Es ergibt sich also auch bei Nickel ein Wert für λ, der recht genau *die Hälfte vom theoretisch zu erwartenden Wert* beträgt.

Bei allen Werten von λ, sowohl für Eisen- als für Nickelstäbchen, sind noch Korrekturen anzubringen, von welchen im nächsten Abschnitt die Rede sein soll.

Erfüllung der Versuchsbedingungen.

Die Berechnung der Meßresultate im letzten Abschnitt erfolgte unter der Annahme, daß die Bedingungen, die der Theorie zugrunde gelegt wurden, streng erfüllt seien. Zu diesen gehört vor allem die Annahme, daß die Ummagnetisierungen des Eisen- bezw. Nickelstäbchens ganz plötzlich geschehen. Wie weit diese Bedingung erfüllt ist, soll nun experimentell untersucht werden.[1]) Dabei kann dann gleichzeitig geprüft werden, wie weit die bei Resonanz auftretende Tatsache zutrifft, daß nämlich die bei den plötzlichen Ummagnetisierungen erfolgenden Impulse eintreten in den Momenten, da das Stäbchen jeweilen durch die Gleichgewichtslage schwingt.

Auf zwei Glasröhrchen wurde Kupferdraht aufgespult, so daß zwei genau gleich große Spulen entstanden mit je 8 mm Durchmesser, 97 mm Länge und 160 Windungen. Die Röhrchen wurden parallel aneinander gelegt, die Windungen in Serie, aber gegeneinander geschaltet, und die Kombination kam in die Mitte der großen Meßspulen zu stehen. Die kleinen Spulen waren durch einen induktionslosen Widerstand von 60 Ohm (Eisenstäbchen) resp. 30 Ohm (Nickelstäbchen) in Serie mit der einen Meßschleife eines Oszillographen von S. & H. geschaltet. Die andere Meßschleife diente zur Aufnahme der Kurve des Wechsel-

1) Vgl. Fußnote S. 119.

feldstromes und war zu diesem Zweck parallel zu einem induktionsfreien Widerstand geschaltet, der sich in jenem Stromkreis befand. Da die kleinen Spulen gegeneinander geschaltet waren, zeigte sich bei vorhandenem Wechselfeld kein induzierter Strom in der ersten Meßschleife, wohl aber, sowie man in eine der kleinen Spulen das Eisen- oder Nickelstäbchen einführte, und zwar mußte dieser Strom proportional der ihn erzeugenden elektromotorischen Kraft und in gleicher Phase mit ihr sein, da die Selbstinduktion des Stromkreises verschwindend klein war gegenüber seinem Widerstand (60—30 Ohm); er mußte also genau den zeitlichen Verlauf von dI/dt wiedergeben und damit auch den zeitlichen Verlauf des Drehmoments D. Fig. 5 gibt die gleichzeitig aufgenommenen Oszillogramme für den Meßspulenstrom in der Stärke $i_{\text{eff}} = 3{,}2$ A. und das Drehmoment im Falle des zusammengesetzten Eisenstäbchens, Fig. 6 die entsprechenden für das Nickelstäbchen.

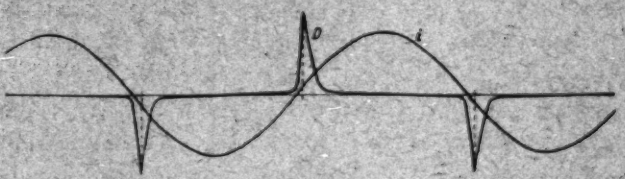


Fig. 5.

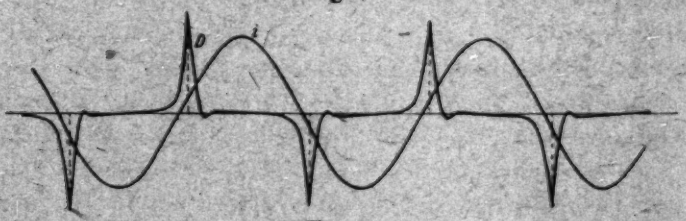


Fig. 6.

Die Zacken der Drehmomentkurve sind um ca. 6° bzw. 10° gegen die Nullstellen der Stromkurve vorgeschoben, womit deutlich die Hysteresis zum Ausdruck kommt.

Nun wurde bei einer früheren Oszillogrammaufnahme (bei Bestimmung des Vorzeichens der Elektronen, S. 122) gefunden, daß Drehmoment und Stäbchenschwingung im Falle der Resonanz genau in der Phase übereinstimmen. Daraus müßte man also schließen, daß die Drehimpulse etwas verspätet erfolgen, nämlich mit einer Phasendifferenz von ca. 6° bzw. 10° gegen

die Stäbchenschwingung. Vielleicht ist übrigens — wie schon S. 122 erwähnt — in Wirklichkeit diese Verschiebung gar nicht vorhanden, sondern wird nur durch nicht ganz zu vermeidende kleine Selbstinduktionen vorgetäuscht, die in den Meßschleifenkreisen vorhanden sein können.

Das Oszillogramm zeigt deutlich in der Breite der Zacken und in dem nicht genau mit der Nullinie zusammenfallenden Verlauf des Drehmoments zwischen den Zacken die Abweichung vom idealen Fall der plötzlichen Ummagnetisierung. In Wirklichkeit werden allerdings die Zacken etwas schmäler sein, da die Meßschleife wegen ziemlich hoher Dämpfung dem Impuls vielleicht nicht unmittelbar folgen konnte. Es war überhaupt nicht leicht, die richtige Dämpfung herauszufinden; war sie zu klein, so kamen wegen der Eigenartigkeit der Kurve sogleich die Eigenschwingungen der Meßschleife zum Ausdruck (wie z. B. bei der Nickelkurve die kleine Zacke auf der Nullinie zeigt); war sie zu groß, so mußte Verzögerung befürchtet werden. Jedenfalls aber muß auf Grund der Kurven an den bei der Berechnung von λ benutzten Werten von I, die den Feldwechselstrom*amplituden* entsprachen, eine Korrektur angebracht werden in verkleinerndem Sinne, entsprechend dem Verhältnis der Zackenlänge, wie sie die Figur gibt, zu derjenigen im idealen Zustande und entsprechend der Zackenbreite. Diese Korrektur läßt sich nicht ganz genau angeben, doch kann man sie immerhin ungefähr berechnen. Dazu benutzt man außer den Figg. 5 u. 6 noch die graphische Darstellung des Verlaufes von I in Funktion des sinusförmigen Wechselfeldes, wie er sich nach Fig. 2 S. 131 ergibt. Auf diese Weise fand ich für Eisen eine Korrektur von 5 Proz., für Nickel eine solche von 10 Proz., welche Werte dann allerdings als Maximalwerte aufzufassen sind.

Die Beobachtung der Oszillogramme bei kleinerem Feldwechselstrom (2,5 A.) ließ kaum eine Änderung in der Drehmomentkurve erkennen, sodaß jene Korrektur, die sich auf 3,2 A. bezieht, als für alle in der Arbeit angewandten Stromstärken gültig betrachtet werden kann.

Bringt man also am Werte von I obige verkleinernde Korrektur an, so werden die S. 139 und S. 141 angegebenen Mittelwerte von λ:

Eisen: $\lambda = 0{,}60 \cdot 10^{-7}$,

Nickel: $\lambda = 0{,}64 \cdot 10^{-7}$,

das sind Werte, die um 47 Proz., resp. um 43 Proz. kleiner sind, als der theoretisch zu erwartende Wert $1{,}13 \cdot 10^{-7}$. *Um so viel Prozent wäre also auch das innere Impulsmoment des magnetischen Eisens und Nickels kleiner, als die Theorie es verlangt.* Da die Korrekturen eher zu hoch bemessen sind, dürften diese Abweichungen als Minimalwerte zu betrachten sein.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wurde die von Einstein und de Haas im Jahre 1915 angewendete Methode zur Bestimmung des inneren Impulsmoments eines magnetisierten Körpers vervollständigt und weiter ausgebaut, um größere Genauigkeit zu erzielen. Auch wurde das Untersuchungsgebiet vergrößert dadurch, daß: 1. drei *verschiedene* magnetische Substanzen, nämlich zwei Eisensorten und eine Nickelsorte, untersucht wurde; 2. die Einsteinsche Methode in zwei voneinander unabhängigen Formen zur Anwendung kam; 3. die Eisen- und Nickelstäbchen in *verschiedenen* Montierungen untersucht wurden.

Durch alle Messungen konnte übereinstimmend der „Einsteineffekt“ nachgewiesen werden, aber in einer Größe, die nicht der zugrunde gelegten Theorie entspricht, nach welcher nur *negative* Elektronen mit dem Wert $m/e = 0{,}565 \cdot 10^{-7}$ in den magnetischen Molekülen kreisen. Während Einstein und de Haas auch quantitativ eine sehr gute Bestätigung der Theorie finden, ergeben meine Messungen einen bei Eisen um 47 Proz., bei Nickel um 43 Proz. zu kleinen Einsteineffekt.

Diskussion.

Die recht erhebliche quantitative Abweichung meiner Resultate von der Theorie und den Ergebnissen von Einstein und de Haas veranlaßte mich natürlich, alle Fehlerquellen eingehend zu untersuchen und besonders die Änderungen und Erweiterungen in meinen Meßanordnungen zu prüfen. Eine persönliche Unterredung mit Prof. Einstein war mir noch ganz besonders wertvoll.

Als wichtigster Teil der Messung ist die Aufnahme der

Resonanzkurve zu nennen. Mit Hilfe meines Frequenzmessers war es natürlich möglich, die Abszissen der Kurve viel genauer zu erhalten als in *E*, wo die Werte sich ganz auf die Eichung mit einem gewöhnlichen Frequenzmesser stützten, während mein Apparat die kleinen Frequenz*differenzen* recht genau bestimmte. Auch konnte ich — wie schon S. 128 bemerkt — allen willkürlichen Schwankungen der Frequenz Rechnung tragen, während man beim Verfahren in *E* ihnen ganz preisgegeben war. Wenn auch die Abszissen der Kurven durch Messung recht *kleiner* Längen an meinem Frequenzmesser bestimmt wurden, so muß die Ungenauigkeit doch wohl auf nur ganz wenige Prozent eingeschätzt werden; dies folgt aus der guten Übereinstimmung der Resultate bei vielfacher Wiederholung der Kurvenaufnahme, auch dann, wenn diese an *verschiedenen* Stellen des Frequenzmessers (bei verschiedenen Eigenschwingungszahlen des Stäbchens) vorgenommen wurde; vor allem aber aus der guten Übereinstimmung mit den Resultaten, die sich nach dem anderen Verfahren, der direkten Bestimmung von *P*, ergaben. Gerade hierin zeigte sich in *E* eine große Differenz. Während die Kurvenaufnahme den gesuchten Effekt in erwarteter Größe ergab, lieferte die direkte Bestimmung von *P* einen um 30 Proz. zu kleinen Wert (vgl. *E* S. 164). Allerdings darf letzterem Wert nur ganz geringes Gewicht beigelegt werden, da die Versuchsbedingungen sehr ungünstige waren. Meine Bestimmung von *P* ist, weil die Schwingungen photographisch aufgenommen wurden, recht genau.

Als weitere Erhöhung der Meßgenauigkeit meiner Arbeit muß auch die direkte Bestimmung der jeweiligen Magnetisierungintensität betrachtet werden, während man sich in *E* offenbar mit einem angenommenen Sättigungswert begnügte.

Eine große Rolle spielt bei Beurteilung der Genauigkeit die Zentrierung des Stäbchens. Daß diese bei mir meistens eine recht gute war, ergibt sich aus der schönen Übereinstimmung zwischen gemessenem und berechnetem Trägheitsmoment, das z. B. beim Nickelstäbchen 0,0293 bzw. 0,0289 betrug, und aus der Vergrößerung der Resonanzamplitude durch das erdmagnetische Feld, die nie sehr groß war, einmal sogar fast Null. In *E* waren die Werte des Trägheitsmoments 0,0070 (beob.), 0,0045 (ber.), und 0,0126 (beob.), 0,0102 (ber.).

Die gute Übereinstimmung der Einzelresultate läßt mich die Genauigkeit meiner Messungen — wenn man von den Korrekturen wegen Nichterfüllung der Versuchsbedingungen absieht — auf ca. 5 Proz. schätzen.

Es ist von Interesse, die Resultate der Arbeit zu vergleichen mit denjenigen anderer Autoren, die nach anderen Methoden das Impulsmoment eines magnetisierten Körpers zu bestimmen suchten.

So hat W. J. de Haas die Methode von *E* dahin modifiziert, daß er die magnetisierende Spule durch eine auf das Eisenstäbchen gewickelte, also mit ihm starr verbundene Windungsgruppe ersetzte und mit sehr langsamen Schwingungen arbeitete. Dadurch verschwand eine Fehlerquelle, und die Vorgänge konnten besser übersehen werden, aber andererseits ergab sich eine große Menge zu eliminierender Effekte. In der 1916 publizierten Arbeit[1]: „Weitere Versuche über die Realität der Ampèreschen Molekularströme" veröffentlichte de Haas die Resultate der Messungen, wonach sich der Einsteineffekt um 14 Proz. zu klein ergibt; doch bemerkt er, daß dies nur ein vorläufiges Resultat sei. Soweit mir bekannt ist, sind bis jetzt keine weiteren Resultate veröffentlicht worden.

Im gleichen Jahre wie Einstein und de Haas veröffentlichte S. J. Barnett eine Arbeit[2]: „Magnetization by Rotation", in welcher versucht wird, das Impulsmoment nachzuweisen durch die Magnetisierungsintensität, die bei einem ursprünglich unmagnetischen Körper hervorgerufen wird, wenn man ihn in Rotation versetzt. Es handelt sich also hier um den zum Einsteineffekt inversen Effekt. Als Resultat findet der Verfasser ein Impulsmoment, das um 56 Proz. kleiner ist, als der Theorie entsprechend, nach welcher nur negative Elektronen kreisen. Nachdem Barnett das Resultat von *E* bekannt war, hat er seine Methode noch weiter ausgearbeitet und modifiziert, und die Resultate dieser zweiten Arbeit[3]: „Magnetization of Iron, Nickel and Cobalt by Rotation and the Nature of the magnetic Molecule", zeigen noch Differenzen von 28 Proz. für

1) W. J. de Haas, Verh. d. D. Phys. Ges. 18. S. 423—443. 1916.
2) S. J. Barnett, Phys. Rev. (2) 6. S. 239—270. 1915.
3) S. J. Barnett, Phys. Rev. (2) 10. S. 7—21. 1917.

Eisen, 18 Proz. für Nickel und 18 Proz. für Kobalt, also immer noch erheblich zu kleine Werte.

Erst vor einigen Wochen ist mir eine Arbeit[1]) von J. Q. Stewart: „The Moment of Momentum accompanying magnetic Moment of Iron and Nickel" zu Gesicht gekommen, in welcher versucht wird, den Einsteineffekt durch Magnetisierungsänderung zu bestimmen, aber nur unter Benutzung des remanenten Magnetismus, in ähnlicher Weise, wie es Einstein bei seinem Vorlesungsversuch[2]) tut. Auch Stewart findet den Einsteineffekt viel zu klein und zwar um 49 Proz. bei Eisen und um 53 Proz. bei Nickel.

Allerdings darf den von Barnett und Stewart gefundenen Resultaten kein allzugroßes Gewicht in quantitativer Hinsicht beigelegt werden, da ihre Methoden gegenüber der in dieser Arbeit angewandten, was Genauigkeit betrifft, weit zurückstehen. Das zeigt sich vor allem in den großen Differenzen, die die Einzelresultate aufweisen. Wichtig ist aber die Tatsache, daß *alle* auf unserem Gebiete ausgeführten Messungen, mit Ausnahme der in *E* mit Resonanzkurven-Aufnahmen gemachten, *bedeutend zu kleine* Werte für das Impulsmoment ergeben haben, was nicht nur der Ungenauigkeit zugeschrieben werden kann.

Eine Erklärung für die Abweichung von der Theorie kann sich vorläufig nur auf Vermutungen gründen. Ein um 43 bis 47 Proz. zu kleiner Wert des Impulsmomentes ist — unter der Annahme, daß nur negative Elektronen kreisen — gleichbedeutend mit einem um gleichviel zu kleinen Wert von m/e. Nun ist diese Größe auf Grund verschiedener einwandfreier Messungen recht genau bekannt, und zwar ist der zugrunde gelegte Wert $0{,}565 \cdot 10^{-7}$ der einer langsamen Elektronenbewegung entsprechende, der nicht unterschritten werden kann.

Man müßte also entweder annehmen, daß es sich bei den Ampèreschen Molekularströmen um Elektronen besonderer Art handelt, oder dann, daß die Verhältnisse nicht so einfach liegen, wie sie in der Theorie angenommen worden sind. Letzteres wäre gar nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, wie kompliziert die magnetischen Erscheinungen sind. Will man

1) J. Q. Stewart, Phys. Rev. (2) 11. S. 100—120. 1918.
2) A. Einstein, Verh. d. D. Phys. Ges. 18. S. 173—177. 1916.

an der bekannten Größe von m/e festhalten, so wäre — wie eine einfache Rechnung zeigt — eine Erklärung der Differenz möglich durch die Annahme, daß nicht nur negative Teilchen kreisen, sondern auch positive am Molekularstrom beteiligt sind. Diese Annahme würde aber den herrschenden Anschauungen widersprechen, es sei denn, daß man an eine Rotation des positiven Kerns des Atoms oder Moleküls denken würde.

Die vorliegende Arbeit ist ausgeführt worden im Physikalischen Institut der Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich. Ich möchte dem Direktor der elektrotechnischen Abteilung desselben, Hrn. Prof. Dr. K. Kuhlmann, meinen verbindlichsten Dank aussprechen für die Bereitwilligkeit, mit der er mir alles für meine Untersuchungen notwendige zur Verfügung stellte. Auch seinem Assistenten, Hrn. Dr. J. Goldstein, bin ich verpflichtet, indem er mich bei Aufnahme der Oszillogramme Figg. 5 u. 6 ganz wesentlich unterstützte. Mein Dank gilt endlich auch dem ausgezeichneten Chefmechaniker des Instituts, Hrn. A. Kluth, der mit großem Geschick und ganzer Sachkenntnis die verschiedenen Präzisionsarbeiten ausführte.

Zürich, April 1919.

(Eingegangen 7. Mai 1919.)

2. *Elementare Theorie der terrestrischen Refraktion und der atmosphärischen Spiegelungen;* *von Joseph Würschmidt.*

Die Erscheinungen, welche durch die Brechung und Reflexion des Lichtes in unserer Atmosphäre hervorgerufen werden, lassen sich nach Pernter-Exner[1]) in drei Gruppen einteilen:

„1. Solche, welche durch die normale Dichteabnahme der Luftschichten von der Erdoberfläche nach oben hervorgerufen werden.

2. Diejenigen, welche in abnormalen Zuständen der Dichteverhältnisse in den Luftschichten ihre Ursache haben.

3. Die Erscheinungen, bei denen ein mehr oder weniger rascher Wechsel der Dichte in den Luftschichten als Ursache mitwirkt."

Die Dichte der Atmosphäre, die bei all diesen Erscheinungen maßgebend ist, da durch sie der Wert des Brechungsindex und damit die mehr oder weniger starke Ablenkung eines Lichtstrahles von der geradlinigen Bahn bedingt ist, ist im allgemeinen mit der Höhe veränderlich (und zwar in doppeltem Sinne); sie ist nämlich eine Funktion des Luftdruckes und der Temperatur, die sich beide im allgemeinen mit der Höhe ändern. Bei konstanter Temperatur nimmt sie proportional mit dem Luftdruck, also nach der barometrischen Höhenformel ab, bei veränderlicher Temperatur kann sie sowohl ab- als auch zunehmen, oder auch bei einer bestimmten Temperaturänderung mit der Höhe konstant bleiben. Die älteren theoretischen Untersuchungen, besonders von Tait und Biot, haben im allgemeinen der Änderung der Dichte mit der Höhe kein spezielles Gesetz zugrunde gelegt, sondern zunächst allgemein die Gestalt der Bahnkurve der Lichtstrahlen untersucht und vielfach erst zum Schluß spezielle Annahmen

1) Pernter-Exner, Meteorologische Optik. S. 55.

gemacht, um die beobachteten Erscheinungen zu deuten. Da diese Art der Darstellung, der sich auch J. M. Pernter und Felix M. Exner anschließen, naturgemäß der Anschauung wenig bietet, so werden hierbei die einzelnen Fälle durch Zeichnungen des jeweiligen Strahlenganges erläutert, die den wahren Verlauf wenigstens qualitativ darstellen. Dementsprechend findet sich in unseren Lehrbüchern der Physik vielfach nur eine qualitative und zeichnerische Darstellung des Strahlenverlaufes bei den genannten Erscheinungen.

Einen anderen erfolgreichen Weg, um eine Theorie der atmosphärischen Spiegelungen zu geben, hat kürzlich A. Wegener[1]) eingeschlagen und die Spiegelung nach oben, diejenige nach unten und die Zerrbilder der Sonne im Horizont behandelt. Er ging davon aus, daß bei den in neuester Zeit vielfach untersuchten Temperaturinversionen mehr oder weniger deutlich die Luft in zwei Schichten, eine untere kalte und eine obere warme, zerlegt erscheint. Wenn auch dieser Temperatursprung nicht scharf, sondern durch teilweise Mischung der Schichten mehr oder weniger verwaschen ist, so hat Wegener für seine Berechnungen doch einen scharfen Temperatursprung angenommen, so daß der Lichtstrahl an dieser Grenzschicht knickförmig gebrochen bzw. reflektiert werden kann. Für den Verlauf in den beiden Schichten selbst nimmt er an, daß innerhalb der Schichten normale Brechungsverhältnisse vorhanden sind, d. h. daß der Lichtstrahl einen flachen Kreisbogen beschreibt, wie es in der Theorie der terrestrischen Refraktion gewöhnlich angenommen wird. Außerdem hat er die Erdkrümmung, abweichend von den älteren Theorien, berücksichtigt; daß diese wesentlich in Betracht kommt, geht, wie er mit Recht hervorhebt, schon daraus hervor, daß sie wesentlich stärker ist als diejenige der Lichtstrahlen unter normalen Verhältnissen.

Da aber die scharfe Schichtgrenze in der Natur niemals existiert, sondern stets ein allmählicher Übergang vorhanden ist, so schien es von Interesse, eine Erklärung der Erscheinungen der terrestrischen Refraktion unter der Annahme zu versuchen, daß kein Temperatursprung, sondern nur eine ge-

1) A. Wegener, Elem. Theorie d. atmosph. Spiegelungen. Ann. d. Phys. 57. S. 203. 1918.

setzmäßige Änderung der Temperatur mit der Höhe vorhanden ist; an Stelle der „Reflexion" Wegeners, die an der Grenze der beiden Schichten stattfindet, tritt somit eine allmähliche „Umbiegung" der Lichtstrahlen, wie sie auch für Schallstrahlen z. B. zur Erklärung der abnormen Schallausbreitung herangezogen wird.[1]) Wenn man dann noch für die Änderung der Dichte mit der Höhe ein einfaches mit der Erfahrung im Einklang stehendes Gesetz zugrunde legt, so bietet sich die Möglichkeit, die Bahnen der Lichtstrahlen selbst analytisch darzustellen, bzw. aus verschiedenen analytisch darstellbaren Teilen, den einzelnen Schichten entsprechend, zusammenzusetzen, dann die Eigenschaften der Lichtkurven zu untersuchen und zu zeigen, wie sich die beobachteten Erscheinungen hieraus erklären lassen.

Zunächst seien einige Betrachtungen über die Änderung der Dichte der Luft mit der Höhe vorausgeschickt.

1. Änderung der Dichte der Luft mit der Höhe.

Da die Änderung der Dichte der Luft mit der Höhe sowohl von derjenigen des Luftdruckes, als auch der Temperatur abhängt, so sei für letztere das einfachste Gesetz, das möglich ist und das auch mit den Betrachtungen im Einklang steht[2]) nämlich eine lineare Änderung angenommen; es gelte also die Beziehung

$$T = T_0 - cy$$

wobei T_0 die Temperatur an der Erdoberfläche und T diejenige in der Höhe y ist.[3]) Ist die Konstante c positiv, so nimmt die Temperatur mit der Höhe ab (normale Temperaturabnahme: $c = 0{,}005$ bis $0{,}01$); negativem c entspricht eine Temperaturzunahme mit der Höhe, dem Nullwerden eine konstante Temperatur.

Die „Differentialgleichung der Statik der Atmosphäre"[4]) ist

$$-\varrho g = \frac{\partial p}{\partial y},$$

1) J. Würschmidt, Sitz.-Ber. d. phys.-med. Soz. Erlangen. 50. 51. S. 115. 1919.

2) F. M. Exner, a. a. O. S. 36.

3) Diese Beziehung gilt auch bei Berücksichtigung der Erdkrümmung, wenn wir annehmen, daß die Temperatur auf einer zur Erde konzentrischen Kugelfläche konstant ist.

4) F. M. Exner, Dynamische Meteorologie, S. 37.

wenn ϱ die Dichte, g die Schwerkraftbeschleunigung und p den Druck bedeutet. Setzt man $p = \varrho R T$ (Zustandsgleichung) und $T = T_0 - c y$, so ergibt sich

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -\frac{g - Rc}{R} \frac{dy}{T_0 - cy}$$

oder, integriert, wenn $\varrho = \varrho_0$ für $T = T_0 (y = 0)$

$$\lg \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{g - Rc}{Rc} \lg \frac{T_0 - cy}{T_0}$$

d. h. eine Form, die ebenso wie die für die Abnahme des Druckes mit der Höhe ähnlich der Poissonschen Gleichung gebaut ist. Hierfür schreiben wir in erster Annäherung (vgl. die bekannte erste Annäherung der barometrischen Höhenformel):

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{\varrho + \varrho_0} = \frac{g - Rc}{Rc} \frac{-cy}{2T_0 - cy},$$

oder

$$\varrho = \varrho_0 \frac{2RT_0 - gy}{2RT_0 + y(g - 2Rc)}.$$

Nun ist nach Exner[1]) $R = 29{,}27 \cdot g$, also

$$\varrho = \varrho_0 \frac{58{,}54\, T_0 - y}{58{,}54\, T_0 + y(1 - 58{,}54\, c)}.$$

Da c für normales Gefälle von der Größenordnung 0,005 bis 0,01 ist, so ist $c \cdot 58{,}54 < 1$; auch wenn c negativ und sehr groß ist, so bleibt immer noch für nicht allzugroße y $y(1 - 58{,}54c)$ klein gegen $58{,}54\, T_0$; also gibt angenähert

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 - \frac{g}{2RT_0} y\right)\left(1 - \frac{g - 2Rc}{2RT_0}\right) = \left(1 - \frac{g - Rc}{RT_0} y\right) \varrho_0$$

d. h. die Dichte nimmt in 1. Annäherung linear mit der Höhe ab, solange $g > Rc$ oder $c < g/R = 0{,}034$ (vgl. hierzu auch A. Wegener, a. a. O. S. 205); d. h., wenn die Temperatur mit der Höhe zunimmt, konstant bleibt oder weniger als um 3,4° pro 100 m abnimmt.

2. Änderung des Brechungsindex mit der Höhe.

A. Ebene Erdoberfläche.

Wenn auch, wie oben bemerkt, die Krümmung der Erdoberfläche für die Darstellung nicht vernachlässigt werden darf, so bietet es doch, wie aus späterem ersichtlich sein wird, gewisse Vorteile, die Theorie zunächst unter der Annahme einer

1) F. M. Exner, a. a. O. S. 9.

ebenen Erdoberfläche aufzustellen. Denken wir uns die Atmosphäre in eine Reihe von parallelen Schichten zerlegt, innerhalb deren die Dichte konstant sei und nacheinander die Werte $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \ldots$ vom Erdboden beginnend annehme. Dann ist, wenn man Einfalls- und Brechungswinkel an der $i$ten Schicht mit α_{i-1} und α_i bezeichnet, und $r_0, r_1, r_2 \ldots$ die absoluten Brechungsindizes sind

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0} = \frac{r_0}{r_1}; \quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{r_1}{r_2}; \ldots \quad \frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_{i-1}} = \frac{r_{i-1}}{r_i}$$

oder auch

$$\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_0} = \frac{r_0}{r_i}.$$

Da nach einem empirischen Gesetz[1]) für Gase gilt

$$r - 1 = C \cdot \varrho,$$

so ist

$$\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_0} = \frac{1 + C\varrho_0}{1 + C\varrho} = 1 + C(\varrho_0 - \varrho),$$

da der absolute Brechungsindex der Luft wenig von 1 verschieden ist.

Läßt man jetzt die Zahl der Schichten unendlich groß werden, so ändert sich die Dichte stetig mit der Höhe, und man erhält, wenn man die oben gefundene Abhängigkeit der Dichte von der Höhe einführt

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} = 1 + Ay$$

wobei $C\frac{g - Rc}{RT_0}\varrho_0 = A$ gesetzt ist; d. h. der Sinus des Brechungswinkels ändert sich in erster Annäherung linear mit der Höhe.

B. Gekrümmte Erdoberfläche.

Bei gekrümmter (kugelförmiger) Erdoberfläche denken wir uns die Atmosphäre in eine Reihe konzentrischer Schichten zerlegt. Ein Strahl, der die Erdoberfläche unter dem Winkel α_0 gegen die Vertikale verläßt, trifft auf die Grenzfläche der ersten Schicht unter dem Winkel α'_0 und wird dann gebrochen, so daß

---

1) O. Chwolson, Lehrb. d. Phys. 2. S. 372; A. Wegener, a. a. O. S. 210.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_0'} = \frac{\nu_0}{\nu_1}.$$

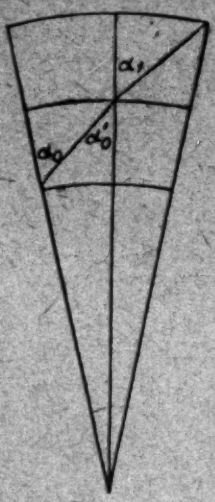


Fig. 1.

Ist der Erdradius R und die Höhe der ersten Schicht $r_1 - R$ so gilt

$$\frac{\sin \alpha_0'}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r_1},$$

oder es ist

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r_1} \cdot \frac{\nu_0}{\nu_1}.$$

Entsprechend für die zweite Schicht:

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\nu_1}{\nu_2} \text{ usw.}$$

Oder

$$\frac{\sin \alpha_n}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r_n} \cdot \frac{\nu_0}{\nu_n}.$$

Also auch

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r}(1 + C(\varrho_0 - \varrho)).$$

Oder da jetzt die Höhe über dem Erdboden $= r - R$ ist

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \frac{R}{r}[1 + A(r - R)].$$

3. Bahngleichung der Lichtstrahlen.

A. Ebene Erdoberfläche.

Wir erhielten oben: $\sin \alpha = \sin \alpha_0 (1 + Ay)$; andererseits ist für jeden Punkt der Bahn: $dx = dy \cdot \operatorname{tg} \alpha$, oder, wenn man den Wert für $dy = \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{A \sin \alpha_0}$ einsetzt:

$$dx = \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{A \sin \alpha_0}.$$

Integriert man und bestimmt man die Konstante so, daß $\alpha = \alpha_0$ für $x = 0$, so ergibt sich

$$x = \frac{1}{A \sin \alpha_0}(\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

Somit ist die Bahnkurve gegeben durch

(I) $$\sin \alpha = \sin \alpha_0 + Ay \sin \alpha_0,$$

(II) $$\cos \alpha = \cos \alpha_0 - Ax \sin \alpha_0.$$

Eliminiert man α, so ergibt sich

$$\left(x - \frac{1}{A \operatorname{tg} \alpha_0}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{A}\right)^2 = \frac{1}{A^2 \sin^2 \alpha_0},$$

d. h. die Bahn ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $\xi = \frac{1}{A \operatorname{tg} \alpha_0}$ und $\eta = -\frac{1}{A}$ hat, und dessen Radius $\varrho = \frac{1}{A \sin \alpha_0}$ ist. Um die Bahn zu zeichnen, trägt man in 0 den Winkel α_0 gegen die Vertikale an und von O nach abwärts auf der Vertikalen die Strecke $1/A = 00'$. Dann zieht man $O'M \parallel OE$ und in O die Senkrechte zu OT, die $O'M$ in M schneiden möge; der Kreis um M mit dem Radius OM ist dann der gesuchte (Fig. 2).

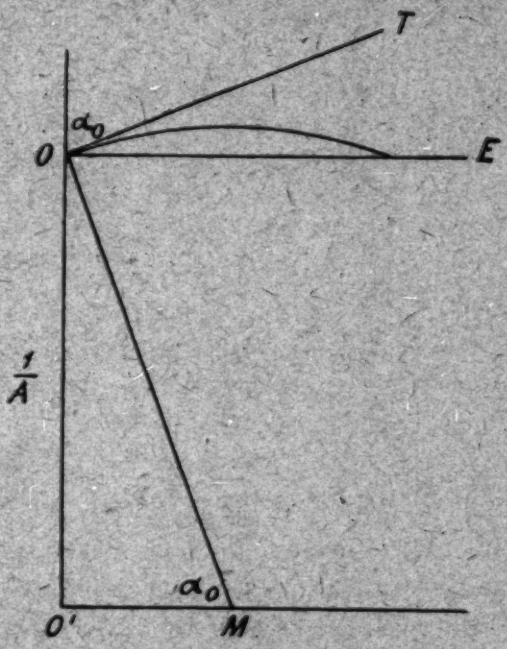


Fig. 2.

Wie man sieht, ist die Bahn für positives A konkav gegen die Erdoberfläche, für negatives A konvex; für $A = 0$ geradlinig; setzt man in der Definitionsgleichung von A

$$A = C \frac{g - Rc}{RT_0} \varrho_0,$$

$A = 0$; so ergibt sich $c = -0{,}034$, d. h. ein Strahl verläuft geradlinig, wenn eine Temperaturabnahme von 34° pro 100 m mit der Höhe vorhanden ist (vgl. A. Wegener, a. a. O.).

Da für unsere Betrachtungen nur Strahlen berücksichtigt werden, die nahezu horizontal verlaufen, so ist in erster Annäherung $\sin \alpha_0 = 1$ zu setzen, d. h. die Krümmung ist für alle unter verschiedenen Winkeln α_0 (nahezu $= 90°$) von O ausgehenden Strahlen die gleiche, nämlich $1/\varrho = A$; also gleich dem Koeffizienten der Änderung des Brechungsindex.

Setzen wir in obiger Bahngleichung $\cos \alpha_0 = \varepsilon_0$ und $\cos \alpha = \varepsilon$, so ist, wenn ε_0 und ε sehr klein sind, $\sin \alpha_0 = 1 - \frac{\varepsilon_0^2}{2}$ und $\sin \alpha = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$; dann ist die Bahngleichung

(I) $$\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 - 2Ay,$$

(II) $$\varepsilon = \varepsilon_0 - Ax.$$

Eliminiert man ε aus beiden Gleichungen, so ergibt sich

$$x^2 - \frac{2\varepsilon_0}{A}x = -\frac{2}{A}y,$$

d. h. eine Parabel, deren Scheitel in

$$\xi_m = \frac{\varepsilon_0}{A},$$

$$\eta_m = \frac{\varepsilon_0^2}{2A}$$

liegt; transformiert man die Gleichung mittels der Beziehungen

$$\bar{\xi} = x - \xi_m,$$

$$\bar{\eta} = y - \eta_m,$$

so ergibt sich die bekannte Scheitelgleichung der Parabel

$$\bar{\xi}^2 = -\frac{2}{A}\bar{\eta}.$$

Der Krümmungsradius im Scheitel ist bekanntlich gleich dem Parameter, also $r_0 = 1/A$, wie oben bereits gefunden.

Ist A positiv, so ist der Scheitel $\xi_m\ \eta_m$ der Parabel zugleich der höchste Punkt der Bahn; für den Punkt, in dem die Bahn zum zweiten Male die Erdoberfläche schneidet, ergibt sich die Entfernung

$$x_0 = \frac{2\varepsilon_0}{A},$$

in dem man in obiger Parallelgleichung $y = 0$ setzt. Bevor aber die weiteren Eigenschaften der Lichtbahn, insbesondere die Fälle verschiedener Schichten, untersucht werden, sei erst die Theorie für eine gekrümmte Erdoberfläche entwickelt.

B. Gekrümmte Erdoberfläche.

Wir hatten oben gefunden

$$\sin\alpha = \sin\alpha_0 \frac{R}{r}[1 + A(r - R)],$$

wobei $r - R$ der jeweilige Abstand von der Erdoberfläche und α der Winkel mit der Normalen ist. An Stelle von α_0 und α

führen wir gleich wieder ε_0 und ε ein. Der Erdradius sei R, der Winkel, den r mit der ursprünglichen Richtung OM bildet, φ. Dann ist

(I) $$r(\varepsilon^2 - 2\lambda) = R(\varepsilon_0^2 - 2\lambda),$$

wenn $\lambda = 1 - AR$ gesetzt wird. Ferner ist

(II) $$\frac{dr}{r\,d\varphi} = \operatorname{tg}\varepsilon = \varepsilon.$$

Oder

$$d\varphi = \frac{dr}{r \cdot \varepsilon}.$$

Aus (I) folgt durch Differenzieren:

$$\frac{dr}{r} = \frac{-2\,d\varepsilon}{\varepsilon^2 - 2\lambda}.$$

Also ist

$$d\varphi = \frac{-2\,d\varepsilon}{\varepsilon^2 - 2\lambda}.$$

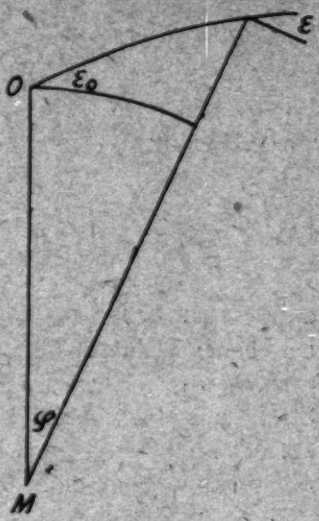


Fig. 3.

Oder integriert

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(\lg\frac{\varepsilon - \sqrt{2\lambda}}{\varepsilon + \sqrt{2\lambda}} - \lg\frac{\varepsilon_0 - \sqrt{2\lambda}}{\varepsilon_0 + \sqrt{2\lambda}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2\lambda}}\lg\frac{\sqrt{2\lambda} - \varepsilon}{\sqrt{2\lambda} + \varepsilon}\cdot\frac{\sqrt{2\lambda} + \varepsilon_0}{\sqrt{2\lambda} - \varepsilon_0},$$

wenn man die Konstante so bestimmt, daß $\varphi = 0$ für $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Entwickelt man nach einer Reihe und berücksichtigt man, da ε_0 und ε kleine Winkel sind, nur das erste Glied, so ergibt sich

$$\lambda\varphi = \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Somit ist die Bahngleichung (in Polarkoordinaten)

(I) $$r(\varepsilon^2 - 2\lambda) = R(\varepsilon_0^2 - 2\lambda),$$

(II) $$\lambda\varphi = \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Der Lichtstrahl erreicht seinen *relativ zur Erdoberfläche* höchsten Punkt für $\varepsilon = 0$; dies ergibt

$$r_m = R\left(1 - \frac{\varepsilon_0^2}{2\lambda}\right),$$

$$\varphi_m = -\frac{\varepsilon_0}{\lambda},$$

oder, wenn wir die Höhe über dem Erdboden mit $\eta_m = r_m - R$

und den Abstand vom Koordinatenanfangspunkt mit $\xi_m = R\varphi_m$ bezeichnen:

$$\xi_m = -\frac{R\varepsilon_0}{\lambda},$$

$$\eta_m = -\frac{R\varepsilon_0^2}{2\lambda},$$

oder wenn man setzt $-\frac{\lambda}{R} = A - \frac{1}{R} = \mu$

$$\xi_m = \frac{\varepsilon_0}{\mu},$$

$$\eta_m = \frac{\varepsilon_0^2}{2\mu},$$

d. h. es gelten für das Maximum die gleichen Beziehungen wie bei ebener Erdoberfläche, wenn nur an Stelle von A $\mu = A - 1/R$ gesetzt wird. Ebenso ergibt sich für den Punkt, in dem der Strahl zum zweitenmal die Erdoberfläche schneidet, aus $r = R$ zunächst $\varepsilon = -\varepsilon_0$, und hieraus für den Abstand vom Koordinatenanfangspunkt

$$\xi_0 = \frac{2\varepsilon_0}{\mu} = 2\xi_m,$$

ξ_0, ebenso ξ_m und η_m sind nur dann positiv, für positives ε_0, wenn μ positiv ist, d. h. wenn $A > 1/R$ oder die Krümmung des Strahles größer als die Erdkrümmung ist.

Die Analogie zu dem oben behandelten Fall legt die Vermutung nahe, daß auch in diesem Falle die Bahn eine Parabel ist, wenn man sie statt auf Polarkoordinaten auf ein System bezieht, in dem als Ordinate die Höhe über dem Erdboden η, als Abszisse die (krummlinige) Entfernung vom Anfangspunkt 0 gewählt wird. Setzt man dementsprechend

$$r - R = \eta,$$

$$R\varphi = \xi$$

und beachtet man, daß η klein gegen R ist, so ergibt sich als Bahngleichung

(I) $$\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 - 2\mu\eta,$$

(II) $$\varepsilon = \varepsilon_0 - \mu\xi,$$

oder

$$\xi^2 - \frac{2\varepsilon_0}{\mu}\xi = -\frac{2}{\mu}\eta.$$

C. Übergang zum ursprünglichen Koordinatensystem.

In Fig. 4 ist $OP' = \xi$, $PP' = \eta$, $O'P = x$, $OO' = y$, $OM = P'M = R$; ferner ist x und ξ klein gegen R, y und η klein gegen x und ξ. Dann gelten die Beziehungen

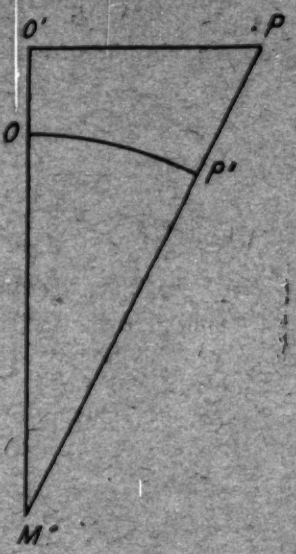


Fig. 4.

$$(1)\quad \frac{x}{R+y} = \varphi = \frac{\xi}{R} \text{ oder } \xi = x\left(1 - \frac{y}{R}\right)$$

$$\text{oder } \xi = x.$$

$$(2)\quad (R+\eta)^2 = (R+y)^2 + x^2$$

$$\text{oder}\quad \xi = y + \frac{x^2}{2R}.$$

Transformiert man unsere Parabelgleichung

$$\xi^2 - \frac{2a_0}{\mu}\xi = -\frac{2}{\mu}\eta$$

mittels der beiden Gleichungen

$$x = \xi$$

$$y = \eta - \frac{x^2}{2R},$$

so ergibt sich, wenn man $\mu = A - 1/R$ berücksichtigt, wieder

$$x^2 - \frac{2a_0}{A}x = -\frac{2}{A}y,$$

d. h. dieselbe Gleichung wie bei ebener Erdoberfläche! Diese können wir im Parameterdarstellung schreiben

$$\delta^2 = \tau_0^2 - 2Ay,$$

$$\delta = \tau_0 - Ax.$$

Dabei ist jetzt δ der Winkel mit der Horizontalen im Punkte O, während in der transformierten Gleichung τ der Winkel mit dem *jeweiligen* Horizont ist.

Zu dem gleichen Resultate gelangen wir auch auf folgendem Weg:

Die Bahnkurve geht durch den Ausgangspunkt P_0, den Punkt, in dem relativ zur Erdoberfläche das Maximum erreicht wird, P_m, und den Punkt, in dem die Bahn zum zweiten Male die Erdoberfläche schneidet, P_0. Die Koordinaten dieser drei Punkte sind:

$$P \qquad \xi = 0 \qquad \eta = 0$$

$$P_m \qquad \xi_m = \frac{\varepsilon_0}{\mu} \qquad \eta_\mu = \frac{\varepsilon_0^2}{2\mu}$$

$$P_0 \qquad \xi_0 = \frac{2\varepsilon_0}{\mu} \qquad \eta_0 = 0,$$

oder in den ursprünglichen Koordinaten

$$P \qquad x = 0 \qquad y = 0$$

$$P_m \qquad x_m = \frac{\varepsilon_0}{\mu} \qquad y_m = \frac{\varepsilon_0^2}{2\mu} - \frac{\varepsilon_0^2}{2\mu^2 R}$$

$$P_0 \qquad x_0 = \frac{2\varepsilon_0}{\mu} \qquad y_0 = -\frac{4\varepsilon_0^2}{2\mu^2 R}.$$

Durch diese drei Punkte kann man ∞ viele Parabeln legen; wir wählen diejenige, deren Achse parallel der y-Achse ist:

$$(x-a)^2 = 2p(y-b).$$

Diese Gleichung muß für die drei Punkte erfüllt sein; also ist

$$(1) \qquad a^2 = -2pb,$$

$$(2) \qquad \frac{\varepsilon_0^2}{\mu^2} - 2\frac{\varepsilon_0}{\mu}a + a^2 = 2p\left(\frac{\varepsilon_0^2}{2\mu} - \frac{2\varepsilon_0^2}{2\mu^2 R}\right) - 2pb,$$

$$(3) \qquad \frac{4\varepsilon_0^2}{\mu^2} - 4\frac{\varepsilon_0}{\mu}a + a^2 = 2p\left(-\frac{2\varepsilon_0^2}{\mu^2 R}\right) - 2pb,$$

oder

$$\frac{\varepsilon_0}{\mu} - 2a = p\frac{\varepsilon_0}{\mu R}(\mu R - 1)$$

$$\frac{4\varepsilon_0}{\mu} - 4a = -p\frac{4\varepsilon_0}{\mu R}.$$

Hieraus ergibt sich

$$p = -\frac{1}{A}$$

$$a = \frac{\varepsilon_0}{A}$$

$$b = \frac{\varepsilon_0^2}{2A}.$$

d. h. die gesuchte Parabel ist $\left(x - \frac{\varepsilon_0}{A}\right)^2 = -\frac{2}{A}\left(y - \frac{\varepsilon_0^2}{2A}\right)$ oder $x^2 - \frac{2\varepsilon_0^2}{A}x = -\frac{2}{A}y$, d. h. die oben gefundene.

Für die Lichtbahnen erhalten wir also zwei äquivalente Darstellungen:

1. System X, Y.

$$x^2 - \frac{2\varepsilon_0}{A}x = -\frac{2}{A}y,$$

oder

(I) $$\delta^2 = \varepsilon_0{}^2 - 2Ay,$$

(II) $$\delta = \varepsilon_0 - Ax.$$

Hierbei sind x, y die rechtwinkligen Koordinaten bezogen auf den Ausgangspunkt; ε_0 der Winkel gegen die Horizontale im Ausgangspunkt, A die die Dichteänderung bestimmende Konstante, und δ der Winkel gegen die x-Achse im Punkte xy.

2. System Ξ, H.

$$\xi^2 - \frac{2\varepsilon_0}{\mu}\xi = -\frac{2}{\mu}y,$$

oder

(I) $$\varepsilon^2 = \varepsilon_0{}^2 - 2\mu\eta,$$

(II) $$\varepsilon = \varepsilon_0 - \mu\xi.$$

Hierbei sind ξ, η die Koordinaten relativ zur Erdoberfläche d. h. ξ der Abstand vom Ausgangspunkt und η die Höhe über dem Boden, ε_0 der Winkel gegen die Horizontale im Ausgangspunkt, $\mu = A - 1/R$, wobei R der Erdradius, und ε der Winkel gegen die jeweilige Horizontale im Punkte ξ, η.

Da es sich bei den im folgenden zu untersuchenden Fragen meist um solche handelt, bei denen die Lage der Lichtbahn relativ zur Erdoberfläche in Betracht kommt, so wird sich die Verwendung des zweiten Systems meist mehr empfehlen; aber man kann die für das erste System geltenden Resultate ohne weiteres auf das zweite übertragen, in dem man A durch μ ersetzt.

Zunächst seien noch einige einfache Beispiele für die Anwendung der beiden Systeme gegeben.

1. Wann verläuft ein Strahl geradlinig?

Lösung mit System 1.

Wenn der Strahl geradlinig verläuft, so ist der Winkel mit der x-Achse konstant; also $\delta = \varepsilon_0$ oder $A = 0$.

Lösung mit System 2.

Wenn der Strahl geradlinig verläuft, so ist, wie aus Fig. 2 ersichtlich $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varphi = \varepsilon_0 + \xi/R$. Da aber $\varepsilon = \varepsilon_0 - \mu\xi$, so muß sein $-\mu = 1/R$ oder $A - 1/R = -1/R$ oder $A = 0$.

2. Unter welchem Winkel muß ein Strahl ausgehen, damit er nach einem Punkte gelangt, der vom Ausgangspunkt die Entfernung E und die Höhe H über dem Boden hat?

Lösung mit System 1.

Die $E = \xi$ und $H = \eta$, so ist $x = E$ und $y = H - \frac{E^2}{2R}$. Setzt man diese Werte in die Gleichung $x^2 - \frac{2\varepsilon_0}{A}x = -\frac{2}{A}y$ ein, so ergibt sich:

$$\varepsilon_0 = \frac{H}{E} + \tfrac{1}{2}\mu E.$$

Lösung mit System 2.

Setzt man $\varepsilon = \xi$ und $H = \eta$ in die Gleichung $\xi^2 - \frac{2\varepsilon_0}{\mu}\xi = -\frac{2}{\mu}\eta$ ein, so ergibt sich:

$$\varepsilon_0 = \frac{H}{E} + \tfrac{1}{2}\mu E.$$

Hier erweist sich bereits die Lösung mit System 2 als bedeutend bequemer.

Fragt man nun z. B., unter welchem Winkel gegen die Horizontale dieser Strahl nach E, H gelangt, so ist die Lösung mittels System 2 die gegebene, da hier dieser Winkel unmittelbar vorkommt. Es ergibt sich sofort

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \mu E = \frac{H}{E} - \tfrac{1}{2}\mu E.$$

Wie man sieht, gelangt nach jedem gegebenen Punkt E, H von einem gegebenen Ausgangspunkt nur ein einziger Lichtstrahl.

4. Abbildung durch die gebogenen Lichtstrahlen.

A. Abbildung eines „Punktes".

Um zu finden, wo ein Beobachter in der Entfernung E vom Anfangspunkt das Bild dieses Anfangspunktes sieht, betrachten wir zwei Strahlen, die nach den Punkten in den Höhen H_1 und H_2 über dem Boden in der Entfernung E gehen; $H_2 - H_1$ entspreche dem Durchmesser der Pupille des Beobachters.

Lösung mit System 1.

Die Höhen von H_1 und H_2 über der Horizontalen in O seien y_1 und y_2; die Winkel gegen diese Horizontale in H_1 und H_2 sind:

$$\delta_1 = \frac{y_1}{E} - \tfrac{1}{2} A E$$

$$\delta_2 = \frac{y_2}{E} - \tfrac{1}{2} A E.$$

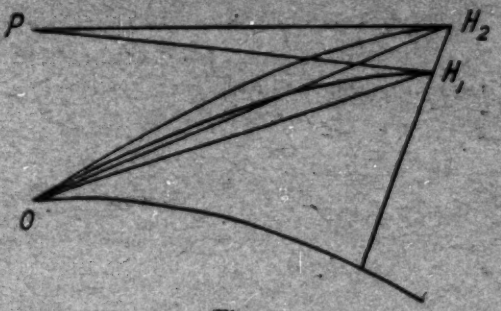


Fig. 5.

Zieht man in H_1 und H_2 die Tangenten gegen die Bahnkurven, so sind deren Gleichungen

$$\frac{y_1 - y}{E - x} = \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{y_1}{E} - \tfrac{1}{2} A E = \delta_1,$$

$$\frac{y_2 - y}{E - x} = \operatorname{tg} \delta_2 = \frac{y_2}{E} - \tfrac{1}{2} A E = \delta_2.$$

Der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten hat also die Koordinaten

$$x_s = 0$$

$$y_s = \tfrac{1}{2} A E^2,$$

also liegt das Bild P in der Höhe $\frac{1}{2} A E^2$ über dem Anfangspunkt. Zugleich sieht man, daß (für kleine Winkel, wie stets vorausgesetzt) die Bildhöhe unabhängig von den Höhen H_1 und H_2 ist; folglich schneiden sich *alle* von O (unter kleinem Winkel, ausgehenden Strahlen in P; die Strahlen sind homozentrisch, und somit ist P tatsächlich ein „Bild" von O.

Lösung mit System 2.

System 2 liefert die Winkel gegen die Horizontale im Punkte des Beobachters; es ist

$$\varepsilon_1 = \frac{H_1}{E} - \tfrac{1}{2} \mu E,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{H_2}{E} - \tfrac{1}{2} \mu E.$$

Zwischen diesen Winkeln und denen gegen die Horizontale in O besteht die Beziehung

$$\varepsilon_1 = \delta_1 + \varphi = \delta_1 + \frac{E}{R} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \delta_2 + \frac{E}{R}.$$

Also ergibt sich für obige Tangentengleichungen

$$\frac{y_1 - y}{E - x} = \delta_1 - \varepsilon_1 - \frac{E}{R} = \frac{H_1}{E} - \tfrac{1}{2}\mu E - \frac{E}{R},$$

$$\frac{y_2 - y}{E - x} = \delta_2 = \varepsilon_2 - \frac{E}{R} = \frac{H_2}{E} - \tfrac{1}{2}\mu E - \frac{E}{R}.$$

Oder für die Schnittpunktkoordinaten

$$x_s = 0$$

$$y_s = y_1 - H_1 + \tfrac{1}{2}\mu E^2 + \frac{E^2}{R},$$

$$= H_1 - \frac{E^2}{2R} - H_1 + \tfrac{1}{2}\mu E^2 + \frac{E^2}{R},$$

$$= \tfrac{1}{2}\mu E^2 + \frac{E^2}{2R},$$

$$= \tfrac{1}{2} A E^2 \qquad \text{wie oben.}$$

Hier ist die Lösung mit System 1 bedeutend einfacher, wie zu erwarten, da die Tangenten nur im System 1 in einfacher Weise, nämlich als Gerade, sich darstellen.

Eine „Hebung" tritt also stets dann ein, wenn A positiv ist, d. h., wenn die Temperaturabnahme mit der Höhe gleich oder kleiner als 3,4° pro 100 m beträgt.

B. Abbildung eines ausgedehnten Gegenstandes.

Als „Gegenstand" betrachten wir, da uns in erster Linie die Veränderungen in der Vertikalen interessieren, eine Strecke $h_2 - h_1$ z. B. einen Pfeil, dessen Spitze in der Höhe h_2 über dem Erdboden sich befindet, während sein anderes Ende in der Höhe h_1 ist. Der Beobachter befinde sich in H_1 E wie oben.

Befindet sich der Ausgangspunkt der Lichtstrahlen nicht an der Erdoberfläche, sondern in der Höhe h über dem Boden so tritt in der Gleichung

$$\sin\alpha = \sin\alpha_0 \frac{R}{r}[1 + A(r - R)],$$

$R + h$ an Stelle von R. Da in dem Ausdruck für λ h gegen R vernachlässigt werden kann, so ist die Bahngleichung in Polarkoordinaten

(I) $$r(\varepsilon^2 - 2\lambda) = (R + h)(\varepsilon_0^2 - 2\lambda).$$

(II) $$\lambda\varphi = \varepsilon - \varepsilon_0.$$

Setzt man wieder $r - R = \eta$ und $R\varphi = \xi$, so ergibt sich als Bahngleichung (System 2)

$$\text{(I)} \qquad \varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 - 2\mu(\eta - h),$$

$$\text{(II)} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 - \mu\xi.$$

wie sich auch unmittelbar aus der Übertragung der für die ebene Erdoberfläche geltenden Beziehungen gibt. Ebenso folgt

$$\left.\begin{aligned} &\text{(I)} && \delta^2 = \varepsilon_0^2 - 2A(y - h) \\ &\text{(II)} && \delta = \varepsilon_0 - Ax \end{aligned}\right\} \text{System 1.}$$

Führt man die gleiche Betrachtung wie oben aus, so findet man für die Schnittpunktkoordinaten zweier Tangenten

$$x_s = 0$$

$$y_s = h + \tfrac{1}{2}AE^2,$$

d. h. das Bild erscheint um die Strecke $\frac{1}{2}AE^2$ über die Lage des Gegenstandes gehoben.

Das gleiche gilt für jeden Punkt des Gegenstandes $(h_2 - h_1)$; wir erhalten also ein aufrechtes Bild, das ebenso groß als der Gegenstand ist und um $\frac{1}{2}AE$ gehoben erscheint (Hebung für positives, Senkung für negatives A).

5. Depression des Horizontes.

Befindet sich ein Beobachter in der Höhe H über dem Boden, so ist sein Gesichtsfeld bei geradliniger Fortpflanzung des Lichtes durch die Tangenten an die Erdkugel begrenzt; dabei ist angenähert die *„Sichtweite"*

$$E = \sqrt{2RH}.$$

Ferner $\sphericalangle P'HP = d$, die Depression des Horizontes oder *„geodätische Kimmtiefe"*:

$$d = \frac{E}{R} = \sqrt{\frac{2H}{R}}.$$

In Wirklichkeit aber verlaufen die Lichtstrahlen nicht geradlinig, sondern je nach der Dichteverteilung konkav oder konvex gegen die Erdoberfläche. Wenn wir fragen, wie groß unter diesen Umständen die „Sichtweite" und die „Kimmtiefe" sind, so haben wir nur in unserer Bahngleichung

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 - 2\mu\eta,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \mu\xi,$$

$\eta = H$ und $\varepsilon_0 = 0$ zu setzen; dann ergibt sich

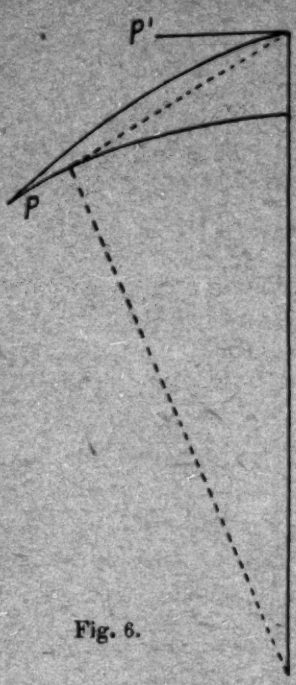


Fig. 6.

$$\varepsilon = \sqrt{-2\mu H},$$

$$\xi = -\frac{\varepsilon}{\mu} = \sqrt{\frac{2H}{-\mu}}.$$

Wie man sieht, ist ε und ξ positiv, solange μ negativ ist, d. h. solange die Krümmung des Strahles A kleiner als die Erdkrümmung $1/R$ ist.

Zwischen der geodätischen Kimmtiefe d und der wahren Kimmtiefe ε besteht die einfache Beziehung

$$\underline{d^2 - \varepsilon^2 = 2AH}.$$

Bedenkt man, daß nach Abschnitt 1

$$\frac{\nu_0}{\nu} = 1 + C(\varrho_0 - \varrho) = 1 + AH,$$

wenn ν_0 und ν die absoluten Brechungsindizes am Boden und in der Höhe H sind, so kann man auch schreiben

$$d^2 - \varepsilon^2 = 2\left(\frac{\nu_0}{\nu} - 1\right) \sim 2(\nu_0 - \nu),$$

d. h. man erhält die bei Pernter-Exner, S. 72 angegebene Formel.

Ebenso besteht zwischen den beiden Sichtweiten ε und ξ die einfache Beziehung

$$\frac{1}{E} - \frac{1}{\xi^2} = \frac{A}{2H}.$$

Solange also A positiv ist, wird der Horizont scheinbar gehoben und die Sichtweite vergrößert, für negatives A tritt Senkung und Verkleinerung der Sichtweite ein.

6. Zustandekommen mehrerer Bilder.
(Eigentliche Luftspiegelungen).

Bisher haben wir eine lineare Änderung der Luftdichte mit der Höhe, d. h. einen bestimmten positiven oder negativen Wert von A angenommen; hieraus erklärt sich die Depression

oder Erhebung des Horizontes, die Vergrößerung oder Verkleinerung der Sichtweite, die Hebung oder Senkung von Gegenständen ohne weiteres; eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Gegenstände tritt hierbei nicht ein.

Nun nehmen wir den immer noch sehr einfachen Fall, daß über einer Schicht, für die die lineare Änderung des Brechungsindex durch die Konstante A_1 gegeben ist, eine durch A_2 definierte Schicht lagert.

Der strahlenaussendende Gegenstand sei ein Punkt in der Höhe h, das Auge des Beobachters sei in der Höhe H über dem Boden; die Höhe der unteren Schicht sei S. Je nachdem nun h und H größer oder kleiner als S sind, sind verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $h < S$, $H > S$.

Es sei ε_0 der Winkel gegen die Horizontale an der Strahlenquelle, ε' derjenige an der Grenzfläche S, ε im Auge des Beobachters. Dann gelten die Gleichungen

$$\varepsilon'^2 = \varepsilon_0^2 - 2\mu_1(S-h), \qquad \varepsilon^2 = \varepsilon'^2 - 2\mu_2(H-S),$$
$$\varepsilon' = \varepsilon_0 - \mu_1 \xi_1 \qquad \varepsilon = \varepsilon' - \mu_2(E-\xi_1).$$

wobei ξ_1 die Abszisse des Schnittpunktes des Strahles mit der Grenzfläche S ist[1]) (Fig. 7).

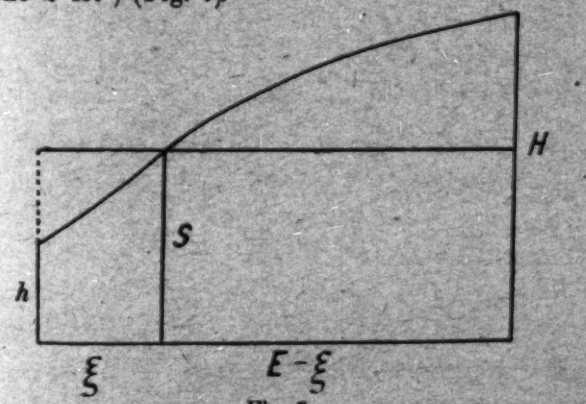


Fig. 7.

Aus den beiden Gleichungspaaren folgt einerseits

1) Von der Krümmung der Erdoberfläche können wir für die folgenden Betrachtungen absehen, da die Gleichungen in dem (krummlinigen) System 2 ebenso sind, wie sie in der Ebene für μ an Stelle von A wären.

$$\varepsilon' = \frac{S-h}{\xi} - \tfrac{1}{2}\mu_1 \xi,$$

andererseits

$$\varepsilon' = \frac{H-S}{E-\xi} + \tfrac{1}{2}\mu_2 (E-\xi),$$

oder für ξ die Gleichung dritten Grades:

$$(\mu_1-\mu_2)\xi^3 + (2\mu_2-\mu_1)E\xi^2 - (\mu_2 E^2 + 2(H-h))\xi + 2E(S-h) = 0.$$

Es gibt also im allgemeinen drei Punkte ξ, in denen ein von dem Gegenstand nach dem Beobachter gehender Strahl die Grenzfläche S durchschneidet; somit erhält man, wenn man die drei Werte für ξ in die Gleichungen für ε_0, ε' und ε einsetzt, im allgemeinen auch je drei verschiedene Werte für diese Winkel. *Also gibt es im allgemeinen drei verschiedene Strahlen, die von dem Gegenstand in das Auge des Beobachters gelangen.*

Da die rechnerische Behandlung dieses allgemeinen Falles sich ziemlich umständlich gestalten würde, beschränken wir uns darauf, einige besondere Fälle zu behandeln, für die die Verhältnisse besonders einfach liegen.

1. Sonderfall: $S-h = H-S$; $\mu_2 = -\mu_1$.

Wir nehmen an, der Ausgangspunkt liege nun ebensoviel unter der Grenzfläche als das Auge über ihr; also $S-h = H-S$. Ferner sei $\mu_2 = -\mu_1$. Dann ist sicher $\xi = E/2$ eine Lösung der obigen Gleichung für ξ, da der diesem Wert entsprechende Strahl symmetrisch in beiden Medien verläuft. Die obige Gleichung für ξ vereinfacht sich unter obigen Annahmen zu:

$$2\mu_1 \xi^3 - 3\mu_1 E\xi^2 + (\mu_1 E^2 - 4(H-S))\xi + 2E(H-S) = 0,$$

dividiert man mit $\xi - E/2$, so ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$2\mu_1 \xi^2 - 2\mu_1 E\xi - 4(H-S) = 0,$$

oder

$$\xi = \frac{1}{2\mu_1}\left(\mu_1 E \pm \sqrt{\mu_1^2 E^2 + 8(H-S)\mu_1}\right).$$

Da ξ zwischen O und E liegen soll, so muß, wenn beide Wurzeln dieser Bedingung genügen sollen, μ_1 negativ sein, d. h. die Bahn muß im unteren Medium konvex gegen die Erdoberfläche sein (oder genauer, da diese gekrümmt, weniger stark gekrümmt als diese sein). Ferner muß sein (damit die Wurzel reell ist) $\frac{8(H-S)}{E^2} < |\mu_1|$.

Für die Winkel ε_0, ε' und ε ergeben sich dann die folgenden Werte:

1. Strahl.

$$(\varepsilon_0)_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{E^2\mu_1^2 + 8(H-S)\mu_1}$$

$$(\varepsilon')_1 = -\frac{\mu_1}{2}E$$

$$(\varepsilon)_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{E^2\mu_1^2 + 8(H-S)\mu_1}$$

2. Strahl.

$$(\varepsilon_0)_2 = 2\frac{H-S}{E} + \frac{\mu_1 E}{4}$$

$$(\varepsilon')_2 = 2\frac{H-S}{E} - \frac{\mu_1 E}{4}$$

$$(\varepsilon)_2 = 2\frac{H-S}{E} + \frac{\mu_1 E}{4}$$

3. Strahl.

$$(\varepsilon_0)_3 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{E^2\mu_1^2 + 8(H-S)\mu_1}$$

$$(\varepsilon')_3 = -\frac{\mu_1}{2}E$$

$$(\varepsilon')_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{E^2\mu_1^2 + 8(H-S)\mu_1}.$$

Ist der Gegenstand nicht ein Punkt, sondern z. B. eine vertikale Linie von der Höhe dh, so ist noch zu untersuchen, wo das Bild des oberen Endpunktes dieser Linie entsteht.

In dem obigen Gleichungssystem tritt an Stelle von h $h + dh$, während die anderen Beziehungen unverändert bleiben. Die Abszisse des Schnittpunktes mit der Grenzfläche S sei χ. Dann heißt die Gleichung für χ:

$$2\mu_1\chi^3 - 3\mu_1 E\chi^2 + [\mu_1 E^2 - 4(H-S) + 2\,dh]\chi + 2E(S-h) - 2E\,dh = 0.$$

Da die Gleichung ohne die Glieder mit dh als eine Wurzel $\xi_2 = E/2$ besitzt, so schreiben wir die entsprechende Wurzel der vorliegenden Gleichung

$$\chi_2 = \xi_2 + \lambda_2,$$

ist λ klein, so können wir in χ_2^3 und χ_2^2 die Glieder mit λ_2^3 vernachlässigen und setzen:

$$\chi_2^2 = \xi_2^2 + 2\xi_2\lambda_2 = \xi_2^2 + E\lambda_2,$$

$$\chi_2^3 = \xi_2^3 + 3\xi_2^2\lambda_2 = \xi_2^3 + \tfrac{3}{4}E^2\lambda_2.$$

Setzt man diese Werte oben ein, und berücksichtigt man das Verschwinden der Gleichung für ξ, so ergibt sich

$$\lambda_2 = \frac{-2E\mu_1\,dh}{\mu_1^2E^2 + 8(H-S)\mu_1}.$$

Oder die dem obigen 2. Strahl entsprechende eine Wurzel der Gleichung dritten Grades ist

$$\chi_2 = \frac{E}{2} - \frac{2E\mu_1}{w^2}dh,$$

wenn man $\sqrt{\mu^2 E^2 + 8(H-S)\mu_1}$ mit w bezeichnet.

Dividiert man nun die Gleichung dritten Grades mit $\chi - \frac{E}{2} + \frac{2E\mu_1}{w^2}dh$, so ergibt sich die Gleichung zweiten Grades:

$$2\mu_1\chi^2 - \left(2\mu_1 E + \frac{4E\mu_1^2}{w^2}dh\right)\chi + \frac{2E^2\mu_1^2}{w^2}dh + 2dh - 4(H-S) = 0.$$

Behandelt man diese Gleichung ebenso wie oben die Gleichung dritten Grades, in dem man setzt

$$\chi_1 = \xi_1 + \lambda_1 = \frac{E}{2} + \frac{w}{2\mu_1} + \lambda_1,$$

$$\chi_3 = \xi_3 + \lambda_3 = \frac{E}{2} - \frac{w}{2\mu_1} + \lambda_3;$$

so erhält man:

$$\lambda_1 = \frac{E\mu_1 - w}{w^2}dh, \qquad \lambda_3 = \frac{E\mu_1 + w}{w^2}dh.$$

Somit sind die drei gesuchten Wurzeln

$$\chi_1 = \frac{E}{2} + \frac{w}{2\mu_1} + \frac{E\mu_1 - w}{w^2}dh = \xi_1 + \frac{2\mu_1\xi_2}{w^2}dh,$$

$$\chi_2 = \frac{E}{2} - \frac{2E\mu_1}{w^2}dh = \xi_2 - \frac{4\mu_1\xi_2}{w^2}dh,$$

$$\chi_3 = \frac{E}{2} - \frac{w}{2\mu_1} + \frac{E\mu_1 + w}{w^2}dh = \xi_3 + \frac{2\mu_1\xi_1}{w^2}dh.$$

Da μ_1 negativ, ξ_1, ξ_2 und ξ_3 positiv, ist $\chi_1 < \xi_1$, ebenso $\chi_3 < \xi_3$, dagegen $\chi_2 > \xi_2$.

Berechnet man aus der Gleichung

$$\eta = \frac{H-S}{E-\chi} + \tfrac{1}{2}\mu_1(E-\chi)$$

die drei Werte von η, so ergibt sich

$$(\eta)_1 = (\varepsilon)_1 - E\frac{\mu^2}{w^2}dh,$$

$$(\eta)_2 = (\varepsilon)_2 + \left(\frac{2E\mu^2}{w^2} - \frac{1}{E}\right)dh,$$

$$(\eta)_3 = (\varepsilon)_3 - E\frac{\mu^2}{w^2}dh.$$

Man sieht ohne weiteres, daß $(\eta)_1$ und $(\eta)_3$ kleiner als $(\varepsilon)_1$ und $(\varepsilon)_3$ sind; für $(\eta)_2$ kann man schreiben:

$$(\eta)_2 = (\varepsilon)_2 + \frac{2E^2\mu_1^2 - w^2}{Ew^2}\,dh$$

$$= (\varepsilon)_2 + \frac{E^2\mu_1^2 - 8(H-S)\mu_1}{Ew^2}\,dh,$$

also ist $(\eta)_2 > (\varepsilon)_2$, wenn μ_1, wie vorausgesetzt, negativ ist.

Der Verlauf der Strahlen ist somit durch Fig. 8 dargestellt, wobei P_1 der Höhe h, P_2 der Höhe $h + dh$ entspricht. *Die Bilder B_1 und B_3 sind somit aufrecht, das Bild B_2 verkehrt*

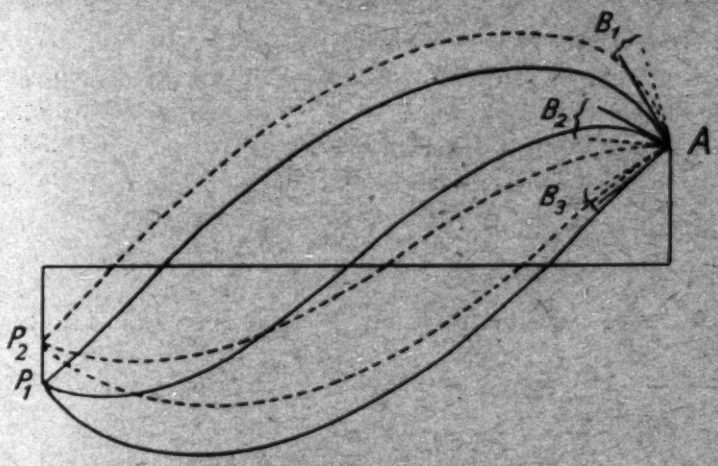


Fig. 8.

Die Bildgrößen selbst sind für die beiden aufrechten Bilder $B_1 = B_3 = E^2\frac{\mu_1^2}{w^2}\,dh$, für das verkehrte Bild:

$$B_2 = \frac{E^2\mu_1^2 - 8(H-S)\mu_1}{E^2\mu_1^2 + 8(H-S)\mu_1}\,dh.$$

Da $(\varepsilon)_1$ und $(\varepsilon)_3$ entgegengesetzt gleich sind, so ist das Bild des Punktes P_1 in B_1 ebenso hoch über dem Horizont in A, als das in B_3 unter ihm; da $(\varepsilon)_2$ negativ ist, so ist das Bild von P_1 in B_2 über dem Horizont in A, also näher an B_1 als an B_3. Die Erscheinung entspricht somit vollkommen der bei Pernter-Exner S. 94 u. 95 abgebildeten und beschriebenen. (Figg. 15 u. 18.) In großer Entfernung $[E^2\mu_1^2 > 8(H-S)\mu_1]$ erscheinen alle drei Bilder in ihrer natürlichen Größe (dh).

und zwar angenähert unter den Winkeln (für ihre Fußpunkte) $(\varepsilon)_1 = \frac{E\mu_1}{2}$, $(\varepsilon)_2 = \frac{E\mu_1}{4}$, $(\varepsilon)_3 = -\frac{E\mu_1}{2}$. Nähert sich der Beobachter, so rücken die Bilder zusammen.[1])

2. *Sonderfall:* $H = S$.

Als zweiten besonders einfachen Fall behandeln wir denjenigen, daß das Auge gerade in der Grenzfläche S der beiden Medien liegt. Dann heißt die Gleichung für ξ

$$(\mu_1 - \mu_2)\xi^3 + (2\mu_2 - \mu_1)\xi^2 E - [\mu_2 E^2 + 2(S-h)]\xi + 2E(S-h) = 0.$$

In diesem Fall kann ein Strahl ins Auge gelangen, der ganz in dem unteren Medium verläuft; er entspricht dem Strahl 3 des vorigen Falles. Für ihn ist $\xi_3 = E$; folglich reduziert sich unsere Gleichung dritten Grades durch Division mit $\xi - E$ auf die Gleichung zweiten Grades:

$$(\mu_1 - \mu_2)\xi^2 + \mu_2 E\xi - 2(S-h) = 0.$$

Die Wurzeln sind

$$\xi = \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)}\left[-\mu_2 E \pm \sqrt{\mu_2^2 E^2 + 8(S-h)(\mu_1 - \mu_2)}\right].$$

Da beide Wurzeln positiv sein sollten (ξ zwischen O und E), so muß sowohl ihre Summe als auch ihr Produkt positiv sein, also

$$\frac{-\mu_2 E}{\mu_1 - \mu_2} > 0 \text{ und } \frac{-4(S-h)}{\mu_1 - \mu_2} > 0,$$

oder

$$\mu_1 - \mu_2 < 0 \text{ und } \mu_2 > 0$$

Bedingungen für positive ξ sind also: 1) $\mu_2 > 0$, d. h. der Strahl muß im oberen Medium stärker gekrümmt sein als die Erdoberfläche und zwar konkav gegen sie sein; 2) $\mu_1 < \mu_2$ der Strahl muß im unteren Medium, falls er konkav gegen die Erdoberfläche ist (μ_1 positiv) weniger stark als im oberen Medium gekrümmt sein; falls er konvex ist ($\mu_1 < 0$), kann seine Krümmung beliebig sein.

---

1) Nur für den Grenzfall, in dem die drei Werte von ξ den Wert $E/2$ annehmen, verlieren diese Betrachtungen ihre Gültigkeit, denn dann wäre z. B. λ_3 nicht mehr klein gegen ξ_3, wie vorausgesetzt.

Für die Winkel ε_0, ε' und ε ergeben sich die folgenden Werte:

1. Strahl.

$$(\varepsilon_0)_1 = \frac{1}{4(\mu_1 - \mu_2)}\left[-\mu_2^2 E + (2\mu_1 - \mu_2) w\right]$$

$$(\varepsilon')_1 = \frac{\mu_2}{4(\mu_1 - \mu_2)}\left[(2\mu_1 - \mu_2) E - w\right]$$

$$(\varepsilon)_1 = -(\varepsilon')_1$$

2. Strahl.

$$(\varepsilon_0)_2 = \frac{1}{4(\mu_1 - \mu_2)}\left[-\mu_2^2 E - (2\mu_1 - \mu_2) w\right]$$

$$(\varepsilon')_2 = \frac{\mu_2}{4(\mu_1 - \mu_2)}\left[(2\mu_1 - \mu_2) E + w\right]$$

$$(\varepsilon)_2 = -(\varepsilon')_2$$

3. Strahl.

$$(\varepsilon_0)_3 = \frac{S - h}{e} + \tfrac{1}{2}\mu_1 E$$

$$(\varepsilon')_3 = \frac{S - h}{e} + \tfrac{1}{2}\mu_2 E$$

wobei $\sqrt{\mu_2^2 E^2 + 8(S-h)(\mu_1 - \mu_2)}$ mit w bezeichnet ist.

Um die Rechnungen zu vereinfachen, untersuchen wir den Sonderfall, daß im unteren Medium die Krümmung gleich der Erdkrümmung ist, also $\mu_1 = 0$. Dann vereinfachen sich unsere Gleichungen in folgender Weise:

$$\mu_2 \xi^3 - 2\mu_2 \xi^2 E + [\mu_2 E - 2(S-h)]\xi - 2E(S-h) = 0$$

$$\mu_2 \xi^2 - \mu_2 E \xi + 2(S-h) = 0$$

$$\xi_{1,2} = \frac{E}{2} \pm \frac{1}{2\mu_2}\sqrt{\mu_2^2 E^2 - 8(S-h)\mu_2} + \frac{E}{2} \pm \frac{w}{2\mu_2}.$$

1. Strahl.	2. Strahl.	3. Strahl.
$(\varepsilon_0)_1 = \frac{1}{4}(\mu_2 E + w)$	$(\varepsilon_0)_2 = \frac{1}{4}(\mu_2 E - w)$	$(\varepsilon_0)_3 = \frac{(S-h)}{E}$
$(\varepsilon')_1 = (\varepsilon_0)_1$	$(\varepsilon')_2 = (\varepsilon_0)_2$	$(\varepsilon')_3 = (\varepsilon_0)_3$
$(\varepsilon)_1 = -(\varepsilon')_1$	$(\varepsilon)_2 = -(\varepsilon')_2$.	

Der Verlauf der Strahlen ist in Fig. 9 dargestellt. Ist der Gegenstand nicht ein Punkt, sondern eine vertikale Strecke von der Höhe dh, so ist noch zu untersuchen, unter welchen Winkeln die vom oberen Endpunkt ausgehenden Strahlen ins Auge gelangen.

Da für den Strahl 3 $\chi = E/2$, wie sich ohne weiteres ergibt, unabhängig von h sich als Lösung findet, so ergeben sich für den 1. und 2. Strahl die Werte:

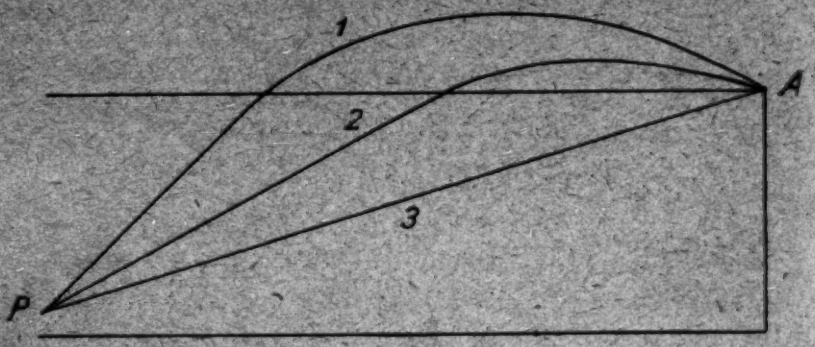


Fig. 9.

$$(\eta_0)_1 = \tfrac{1}{4}(\mu_2 E + w') \qquad (\eta_0)_2 = \tfrac{1}{4}(\mu_2 E - w')$$
$$(\eta')_1 = (\eta_0)_1 \qquad (\eta')_2 = (\eta_0)_2$$
$$(\eta)_1 = -(\eta')_1 \qquad (\eta)_2 = -(\eta')_2,$$

wobei $w' = \sqrt{E^2 \mu_2^2 - 8(S - h - dh)\mu_2}$ ist.

Somit ist für positives dh

$(\eta_0)_1 > (\varepsilon_0)_1$ und zwar annähernd $(\eta_0)_1 = (\varepsilon_0)_1 + \frac{dh\,\mu_2}{w}$

$(\eta_0)_2 < (\varepsilon_0)_2$ und zwar annähernd $(\eta_0)_2 = (\varepsilon_0)_2 - \frac{dh\,\mu_2}{w}$

Entsprechend:

$$(\eta)_1 < (\varepsilon)_1 \text{ und } (\eta)_2 > (\varepsilon)_2.$$

Somit ist das von den Strahlen 1 gelieferte Bild aufrecht, das von den Strahlen 2 gelieferte verkehrt; der Verlauf der Strahlen ist in Fig. 10 dargestellt. Die Strahlen 3 liefern ein aufrechtes Bild. Nähert man sich aus großer Entfernung, so nähern sich die Bilder B_1 und B_2 immer mehr und mehr, bis die beiden unteren Bildpunkte zusammenstoßen; dies ist der Fall für $\xi_1 = \xi_2 = \frac{E}{2}$ oder $(\varepsilon_0)_1 = (\varepsilon_0)_2 = \frac{\mu_2 E}{4}$, wenn nämlich E so klein geworden ist, daß w verschwindet. Nähert man sich noch mehr, so entstehen vom unteren Punkt keine reellen Bilder mehr.

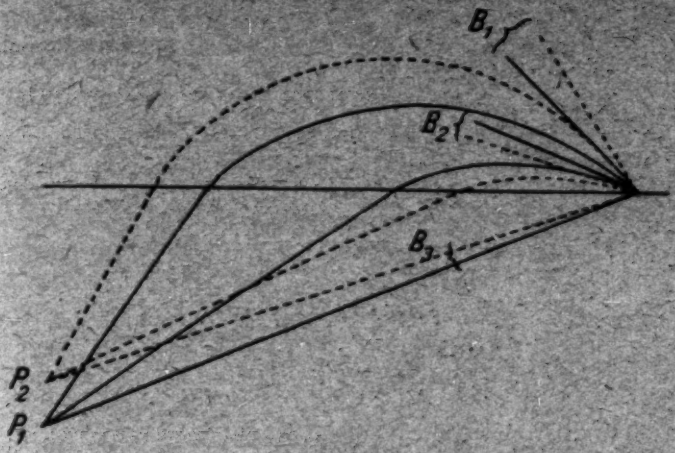


Fig. 10.

2. Fall: $h < S$, $H < S$.

Es sei ε_0 der Winkel gegen die Horizontale an der Strahlenquelle, ε' der erste Winkel an der Grenzfläche, ε'' der zweite Winkel an der Grenzfläche, ε im Auge des Beobachters; ξ_1 sei wieder die Abszisse des Schnittpunktes des Strahles mit der Grenzfläche S. ξ_2 diejenige des zweiten Schnittpunktes. Dann gilt

$$\begin{array}{l|l} \varepsilon'^2 = \varepsilon_0^2 - 2\mu_1(S-h) & \varepsilon''^2 = \varepsilon'^2 \\ \varepsilon' = \varepsilon_0 - \mu_1 \xi_1 & \varepsilon'' = \varepsilon' - \mu_2(\xi_2 - \xi_1) \end{array}$$

$$\varepsilon^2 = \varepsilon''^2 - 2\mu_1(H-S)$$
$$\varepsilon = \varepsilon'' - \mu_1(E - \xi_2).$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen ε_0, ε', ε'' und ε, sowie ξ_2, so erhält man für ξ eine Gleichung vierten Grades; es können also im allgemeinen vier verschiedene Bilder entstehen! Dazu kommt noch das Bild, das durch die im unteren Medium allein von h nach H verlaufenden Strahlen entsteht.

Die aus der Elimination von ε_0, ε', ε'', ε und ξ_2 sich ergebende Gleichung vierten Grades lautet:

$$\begin{aligned} &\mu_1(\mu_2 - \mu_1)(2\mu_2 - \mu_1)\xi_1^4 - \mu_1\mu_2(3\mu_2 - 2\mu_1)E\xi_1^3 \\ &\quad - [2(\mu_2^3 - 4\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^2)(S-h) + 2\mu_2^2(S-H) - \mu_1\mu_2^2E^2]\xi_1^2 \\ &\quad + 2\mu_2(\mu_2 - 2\mu_1)(S-h)E\xi_1 - (\mu_2 - \mu_1)4(S-h)^2 = 0. \end{aligned}$$

Zur näheren Untersuchung wählen wir den Spezialfall $h = H$; für diesen reduziert sich die Gleichung auf die folgende:

$$\mu_1(\mu_2 - \mu_1)(2\mu_2 - \mu_1)\xi_1^4 - \mu_1\mu_2(3\mu_2 + 2\mu_1)E\xi_1^3 - [4(\mu_2 - \mu_1)^2(S - h) - \mu_1\mu_2^2E^2]\xi_1^2 + 2\mu_2(\mu_2 - 2\mu_1)(S - h)E\xi_1 - (\mu_2 - \mu_1)4(S - h)^2 = 0.$$

In diesem Falle werden wir sicher eine Lösung dann erhalten, wenn der Strahl symmetrisch zur Halbierungslinie der Strecke E verläuft, wenn also $\xi_{s1} = E - \xi_{s2}$. Dann ist:

$$\varepsilon' = \frac{S - h}{\xi_1} - \frac{\mu_1}{2}\xi_1 = \frac{\mu_1}{2}(E - 2\xi_1)$$

oder

$$(2\mu_2 - \mu_1)\xi_1^2 - \mu_2 E\xi_1 + 2(S - h) = 0.$$

zwei Wurzeln unserer Gleichung vierten Grades sind somit

$$(\xi_1)_1 = \frac{1}{2(2\mu_2 - \mu_1)}\left[\mu_2 E + \sqrt{\mu_2^2E^2 - 8(S - h)(2\mu_2 - \mu_1)}\right],$$

$$(\xi_1)_2 = \frac{1}{2(2\mu_2 - \mu_1)}\left[\mu_2 E - \sqrt{\mu_2^2\varepsilon^2 - 8(S - h)(2\mu_2 - \mu_1)}\right].$$

Dividiert man die obige Gleichung vierten Grades durch die Gleichung zweiten Grades, so erhält man die neue Gleichung zweiten Grades:

$$\mu_1(\mu_2 - \mu_1)\xi_1^2 - \mu_1\mu_2 E\xi_1 - 2(\mu_2 - \mu_1)(S - h) = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$(\xi_1)_3 = \frac{1}{2\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}\left[-\mu_1\mu_2 E + \sqrt{\mu_1^2\mu_2^2E^2 + 8(S - h)\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}\right],$$

$$(\xi_1)_4 = \frac{1}{2\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}\left[-\mu_1\mu_2 E - \sqrt{\mu_1^2\mu_2^2E^2 + 8(S - h)\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}\right].$$

Zu dieser Gleichung gelangt man übrigens auch durch folgende Überlegung:

Wenn μ_1 negativ ist, also die Bahn im unteren Medium konvex gegen die Erdoberfläche, oder richtiger, weniger stark gekrümmt ist als diese, so kann der Strahl den Ausgangspunkt unter einem negativen Winkel ε_0 verlassen, also zunächst nach abwärts gehen; dann erreicht er ein Minimum, um dann bis zur Grenzfläche anzusteigen. Im zweiten Medium beschreibt er den in bezug auf sein Maximum symmetrischen Parabelbogen (Fig. 11), dann im ersten Medium einen Parabelbogen, der kein Minimum mehr besitzt. Ebensogut ist aber auch ein

Strahlenverlauf möglich, der aus dem eben geschilderten durch Vertauschung von Gegenstand und Auge entsteht, also zu ihm in bezug auf $E/2$ symmetrisch liegt.

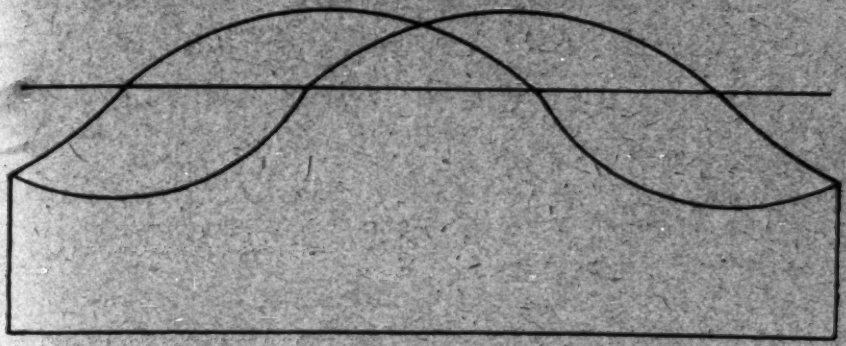


Fig. 11.

Wegen dieser Symmetrieverhältnisse müssen die Beziehungen bestehen:

$$(\xi_1)_3 = E - (\xi_2)_4 \quad \text{und} \quad (\xi_1)_4 = E - (\xi_2)_3,$$

oder, wenn wir $(\xi_1)_3 = p$, $(\xi_1)_4 = q$ setzen:

$$\frac{S-h}{p} - \frac{\mu_1}{2}p = \frac{\mu_2}{2}(E-p-q),$$

$$\frac{S-h}{q} - \frac{\mu_1}{2}q = \frac{\mu_2}{2}(E-p-q),$$

oder

$$2(S-h) - \mu_1 p^2 = \mu_2 Ep - \mu_2 p^2 - \mu_2 pq,$$

$$2(S-h) - \mu_1 q^2 = \mu_2 Eq - \mu_2 pq - \mu_2 q^2,$$

woraus sich leicht ergibt

$$\mu_1(\mu_2 - \mu_1)p^2 - \mu_1\mu_2 Ep - 2(\mu_2 - \mu_1)(S-h) = 0,$$

d. h. wir erhalten die gleiche Gleichung für den dritten und vierten Strahl wie oben.

Man kann nun die Untersuchung wie oben weiterführen, insbesondere die Lage der Bilder dadurch untersuchen, daß man den Verlauf der von dem in der Höhe $h + dh$ gelegenen Punkt ausgehenden Strahlen untersucht. Doch werden die Rechnungen sehr langwierig, wenn man sich nicht auf Sonderfälle beschränkt, so daß hier auf die Wiedergabe verzichtet sein soll.

Als Resultat ergibt sich, daß je zwei der auftretenden Bilder aufrecht, die anderen zwei verkehrt sind; zu diesen vier Bildern kommt dann noch das durch die ganz im unteren Medium verlaufenden Strahlen entstehende Bild, das natürlich aufrecht ist.

Wenn im unteren Medium die Krümmung der Strahlen gleich der Erdkrümmung, also $\mu_1 = 0$ ist, so vereinfacht sich die Gleichung vierten Grades zu

$$2\mu_2^2\xi_1^2 - \mu_2 E\xi_1 + 2(S - h) = 0.$$

Die beiden Wurzeln sind:

$$(\xi_1)_1 = \frac{E}{4} + \frac{1}{4\mu_2}\sqrt{E^2\mu_2^2 - 16(S-h)\mu_2},$$

$$(\xi_1)_2 = \frac{E}{4} - \frac{1}{4\mu_2}\sqrt{E^2\mu^2 - 16(S-h)\mu_2},$$

d. h. in diesem Falle treten nur die zwei ersten Strahlen außer dem direkten Strahle auf.

Damit sowohl $(\xi_1)_1$, als auch $(\xi_1)_2$ positiv werden, muß μ_2 positiv sein, d. h. der Strahl im oberen Medium muß stärker gekrümmt sein als die Erdoberfläche.

Auf andere mögliche Sonderfälle sei nicht eingegangen.

3. Fall: $h > S$; $H < S$.

Dieser Fall entspricht vollständig dem ersten Fall, bei dem $h < S$ und $H > S$; es gelten dieselben Gleichungen für die Winkel ε_0, ε' und ε; nur sind μ_2 und μ_1 vertauscht, folglich auch die gleiche Gleichung dritten Grades für ξ, ebenfalls mit vertauschtem μ_1 und μ_2. Also gibt es auch hier im allgemeinen drei verschiedene Strahlen, die ins Auge des Beobachters gelangen.

Die Betrachtungen sind somit die gleichen wie oben, sodaß auf ihre Wiederholung verzichtet werden kann.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Aus der Annahme einer linearen Änderung der Temperatur mit der Höhe ergibt sich durch Integration der „Differentialgleichung der Statik der Atmosphäre“ das Gesetz, daß die Dichte der Luft sich in erster Annäherung linear mit der Höhe ändret, und zwar nimmt sie ab, solange die Temperatur ent-

weder mit der Höhe zunimmt, oder konstant bleibt oder um weniger als 3,4° pro 100 m abnimmt.

2. Die Änderung des Brechungsindex mit der Höhe wird zunächst für den Fall einer ebenen Erdoberfläche untersucht; bezeichnet man den Winkel, den der Strahl an der Erdoberfläche mit der Vertikalen bildet, mit α_0, denjenigen den er in der Höhe y über dem Boden mit ihr bildet, mit α, so ergibt sich: $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} = 1 + Ay$, d. h. es ändert sich der Sinus des Brechungswinkels in erster Annäherung linear mit der Höhe; bei gekrümmter Erdoberfläche tritt noch der Faktor R/r hinzu, wobei R der Erdradius, und r die Entfernung des jeweiligen Punktes vom Erdmittelpunkt ist.

3. Als Bahngleichung der Lichtstrahlen ergibt sich bei ebener Erdoberfläche ein Kreis, oder wenn man berücksichtigt, daß alle Winkel gegen die Horizontale klein sind, eine Parabel. Bei gekrümmter Erdoberfläche ergibt sich gleichfalls eine Parabel, sowohl wenn man sie auf das rechtwinklige Koordinatensystem bezieht, das seinen Nullpunkt im Ausgangspunkt der Strahlen hat und dessen X-Achse der Horizont in diesem Punkte ist, als auch in einem Koordinatensystem mit dem gleichen Nullpunkt, in dem als Ordinate die jeweilige Höhe über der Erdoberfläche, als Abszisse der (krummlinige) Abstand vom Anfangspunkte gewählt wird. Die beiden Darstellungen sind einander äquivalent, je nach der Art der behandelten Frage bietet aber die eine oder die andere den Vorzug einfacherer Rechnung, wie an einigen Beispielen gezeigt wird.

4. In besonders einfacher Weise läßt sich die „Depression des Horizontes" untersuchen und lassen sich die Formeln für die Beziehungen zwischen wahrer und geodätischer Sichtweite und Kimmtiefe ableiten.

5. Um zu einer Deutung des Zustandekommens mehrerer Bilder zu kommen, braucht man nur anzunehmen, daß über einer Schicht, in der sich der Brechungsindex wie bisher, linear ändert, eine zweite Schicht gelagert ist, in der die Änderung gleichfalls linear ist, nur die Änderungskonstante einen anderen Wert besitzt. Je nach der Lage des Auges und des Gegenstandes zu der Höhe der Schicht sind verschiedene Fälle zu unterscheiden, die im Einzelnen diskutiert werden. Befinden

sich Gegenstand und Auge nicht in der gleichen Schicht, so entstehen im allgemeinen drei Bilder, von denen zwei aufrecht, das dritte aber verkehrt ist, befinden sich Auge und Gegenstand in der gleichen Schicht, so können sogar fünf Bilder, drei aufrechte und zwei verkehrte, entstehen. An passend gewählten Sonderfällen wird der Verlauf der einzelnen Strahlen, die Lage und Größe der entstehenden Bilder usw. im Einzelnen untersucht und gezeigt, inwieweit das Resultat der Rechnung mit den Beobachtungen in Übereinstimmung steht.

(Eingegangen 14. Juni 1919.)

3. *Über die Dielektrizitätskonstante einiger natürlicher und synthetischer Edelsteine (mit einem Anhang über Bernstein);*

von Robert Fellinger.

Die Untersuchungen, deren Resultate im folgenden mitgeteilt werden sollen, sind bereits in der Zeit vom November 1913 bis Juli 1914 ausgeführt worden. Durch den Krieg wurde die Veröffentlichung bisher hinausgeschoben.

Veranlassung zu der Arbeit bot die Frage, ob es etwa möglich sei, auf synthetischem Wege hergestellte Edelsteine, die mit den entsprechenden natürlichen Steinen sowohl chemisch als physikalisch als auch kristallographisch vollkommen übereinstimmend gefunden wurden, mit Hilfe ihres bisher noch nicht untersuchten dielektrischen Verhaltens von ihren natürlichen Vorbildern zu unterscheiden.

Es sei gleich gesagt: eine solche Unterscheidungsmöglichkeit zwischen echten und synthetischen Steinen hat die vorliegende Arbeit nicht gebracht. Ihr Ergebnis beschränkt sich auf die erstmalige Feststellung der Dielektrizitätskonstanten des echten und synthetischen, edlen Korunds (Rubin und Leuko-Saphir) sowie auf die Bestätigung früher gefundener Werte der Dielektrizitätskonstanten von Topas und Beryll und nebenbei Bernstein.

Die Untersuchungen wurden nach der vom Verfasser bereits früher auf Kristalle angewandten [1]), von Graetz und Fomm [2]) stammenden Methode zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten im homogenen elektrischen Felde ausgeführt.

---

1) R. Fellinger, „Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Kristallen im homogenen elektrischen Felde". Dissertation München 1899; Wied. Ann. 7. S. 833—857. 1902.

2) L. Graetz u. L. Fomm, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. 23. S. 275. 1893; Wied. Ann. 53. S. 85. 1894.

Hierbei werden aus dem zu untersuchenden Kristall geschnittene, optisch genau orientierte, möglichst dünne, kreisrunde Scheibchen (als Näherungsform von Rotationsellipsoiden gedacht) zwischen den vertikal stehenden Platten eines Kondensators in bestimmter Weise aufgehängt. Zwischen den mit einer Wechselstromquelle verbundenen Kondensatorplatten wird ein Wechselfeld erregt, unter dessen Einwirkung das zu untersuchende Kristallscheibchen ein Drehungsmoment erhält, dem die Torsion des Aufhängefadens entgegenwirkt. Die Drehung wird mit Spiegel und Skala abgelesen.

Wegen der Theorie darf auf die erwähnte, frühere Arbeit des Verfassers hingewiesen werden.

Zur Untersuchung eines optisch einachsigen Kristalles genügt eine zylindrische Scheibe, deren Rotationsachse senkrecht zur optischen Achse steht, oder, wie man gewöhnlich sagt: eine Scheibe parallel zur optischen Achse.

Zur Untersuchung eines optisch zweiachsigen Kristalls sind zwei, aus ein und demselben Kristall geschnittene, zylindrische Scheiben erforderlich, deren Rotationsachsen in zwei verschiedenen optischen Hauptrichtungen liegen.

Einige Schwierigkeit bereitete die Beschaffung des zum Teil kostbaren Rohmaterials, das für die optisch genau orientiert herzustellenden Kristallschnitte geeignet sein mußte. Auf die Herkunft des Rohmaterials wird bei der Behandlung der einzelnen Objekte eingegangen.

Die Ausführung der Kristallpräparate lag ausschließlich in den bewährten Händen der Hrrn. Dr. Steeg und Reuter, Optisches Institut, Homburg v. d. Höhe, deren präzise Arbeit größte Anerkennung verdient.

Die optische Untersuchung bzw. Kontrolle der Kristallschnitte wurde mit einem Mikroskop von Carl Zeiß, Jena und mittelst eines Dichroskops von R. Fuess, Berlin-Steglitz, ausgeführt. Einige Feststellungen, namentlich an den Präparaten aus synthetischem Material, wurden im Mineralogischen Institut zu München unter gütiger Mithilfe des Hr. Prof. Dr. Weinschenk im Juli 1913 vorgenommen.

Zur Ausmessung der Kristallscheibchen diente ein Zeißsches Meß-Mikroskop, Modell A, das die Feststellung von Durchmesser und Dicke der Scheibchen auf 0,01 mm genau ermöglichte.

Der für die dielektrischen Untersuchungen verwendete Luftkondensator wurde von dem Universitätsmechaniker Walter Oehmke, Berlin, nach Angabe angefertigt. Er bestand aus zwei gegeneinander horizontal verschiebbaren, vertikalen Messingplatten von 15 cm Durchmesser, die in einem Mahagoni-Glaskasten von 50 cm Länge und je 25 cm Höhe und Tiefe, den Anforderungen entsprechend gut isoliert, untergebracht waren.

Die von den Kondensatorplatten abgehenden Stromzuleitungen führten zunächst zu einem zweipoligen Umschalter, durch den die Platten nach Bedarf zur Erde abgeleitet oder mit der Stromquelle verbunden werden konnten. Als Arbeitsstrom wurde sinusoidaler Wechselstrom verwendet, dessen Spannung bei sämtlichen Messungen gleichmäßig auf 142 Volt gehalten wurde. Der Gleichstrom-Wechselstrom-Umformer, ein Hitzdrahtvoltmeter sowie sonstiges Meßgerät waren von Siemens & Halske A.-G., Wernerwerk, leihweise überlassen worden.

Das zwischen den Kondensatorplatten an einem etwa 7 cm langen, entsprechend vorbereiteten Kokonfaden hängende System bestand aus einem Galvanometerspiegel von 0,8 cm Durchmesser, der auf einem etwa 17 cm langen und 0,05 cm dicken Glasstab angebracht war; am unteren Ende des Glasstabs wurde das jeweilig zu untersuchende Kristallscheibchen genau orientiert und unter einem Winkel von 45° gegen die Spiegelfläche verdreht, mittelst eines Wachströpfchens stumpf befestigt. Das ganze hängende System, ohne Präparat, hatte ein Gewicht von 0,133 g.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß bei den einzelnen Messungen stets die Temperatur außerhalb und innerhalb des geschlossenen Kondensatorkastens festgestellt wurde, um die durch eine etwaige Temperaturänderung während der Messung bedingte Fehlerquelle auszuschalten. Auch wurde die Luftfeuchtigkeit in dem Arbeitsraum regelmäßig kontrolliert, wozu ein Präzisions-Hygrometer von Otto Bohne Nachf., Berlin, diente.

Jedes zu untersuchende Kristallscheibchen wurde einer Reihe von Messungen unterzogen, die auch wenn sie von Anfang an gute Übereinstimmung zeigten, wiederholt und zu verschiedenen Tageszeiten ausgeführt wurden.

Zur Kontrolle der Methode wurden zunächst schon anderweitig bestimmte, bekannte Dielektrizitätskonstante, und zwar

von Topas (optisch zweiachsig), Beryll (optisch einachsig) und nebenbei Bernstein (amorph) ermittelt.

Die Ergebnisse der Messungen sind aus dem folgenden zu entnehmen.

Topas, von Mino, Japan.

Rhombisch bipyramidal (Groth). — Rhombisch holoëdrisch (Voigt).
Doppelbrechung positiv.

a zweite Mittellinie (stumpfer Achsenwinkel), b optische Normale,
c erste Mittellinie (spitzer Achsenwinkel).

Das Rohmaterial, Topas wasserhell, von Mino, Japan, wurde von Dr. F. Krantz, Bonn, geliefert. Es war ein klares Kristallstück von 28 g Gewicht, wovon zur Herstellung der beiden erforderlichen Scheibchen 13,2 verschliffen wurden.

Es wurden zwei möglichst gleiche Scheibchen von je 12 mm Durchmesser und 1 mm Dicke hergestellt, von denen das eine ∥ zur Achsenebene, das andere ⊥ zur ersten Mittellinie geschnitten wurde.

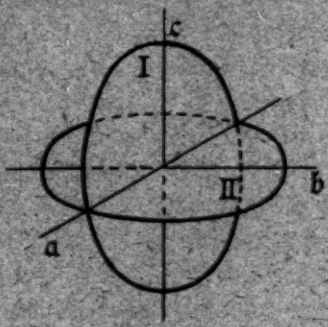


Fig. 1.

Die Lage der beiden Schnitte im Kristall ist aus nebenstehender Fig. 1 zu ersehen. Die Scheibe I enthält die beiden Mittellinien a und c; die Scheibe II enthält die zweite Mittellinie a und die optische Normale b.

Vor dem Eingehen auf die Meßresultate muß einiger Eigentümlichkeiten des Topases in elektrischer Beziehung gedacht werden.

Der Topas eignet sich als Probeobjekt für die Untersuchung im homogenen Felde besonders gut, da er ungefähr alle unbequemen Eigenschaften hat, auf deren Ausschaltung man vor Beginn der eigentlichen Messungen bedacht sein muß. Sowohl Reibungselektrizität als auch Pyroelektrizität treten im Topas in hervorragender Weise auf, so daß er, neben Turmalin, man könnte sagen das nervöseste Versuchsobjekt im elektrischen Wechselfelde ist, das man sich denken kann.

Beim Befestigen eines Topasscheibchens am unteren Ende der Aufhängevorrichtung, wobei das zur Befestigung dienende

Wachströpfchen durch ein darüber gehaltenes, erhitztes Eisen für einen Augenblick zum Schmelzen gebracht wird, kann man mit Sicherheit auf das Auftreten der Pyroelektrizität und beim Reinigen des Topasscheibchens auf das Erscheinen der Reibungselektrizität rechnen. In diesem Zustande des Präparates ist an eine Messung im Kondensator nicht zu denken, da dasselbe sich beim Einschalten des Stromes senkrecht zu den Kondensatorplatten stellt, so daß das Bild der Skala schnell aus dem Ablesespiegel entschwindet.

Solche starke Ladungserscheinungen machten sich namentlich bei dem ∥ zur Achsenebene geschnittenen Topasscheibchen geltend, und bei diesem am stärksten in der Richtung der ersten Mittellinie c; nach Mack[1]) soll in einer gegen diese geneigten Richtung die pyroelektrische Achse liegen.

Die Ladungserscheinungen waren auch nach 24 Stunden noch deutlich vorhanden. Danach wurde erst nach 3 Tagen wieder kontrolliert, mit dem Ergebnis, daß sich keinerlei Ladungserscheinungen mehr nachweisen ließen. Somit kann man sagen, daß 4 × 24 Stunden genügten, um beim Topas auch in der empfindlichsten Richtung einwandfreie, gleichmäßige Ausschläge zu erzielen.

Bauer[2]) gibt an, daß man beim Topas noch nach 32 Stunden nach dem Reiben die Erregung nachweisen kann, und daß erhitzte Topase manchmal bis 30 Stunden elektrisch bleiben, auch noch nachdem völlige Erkaltung eingetreten ist.

Nach dem Gesagten ist es klar, daß mit den beiden Topasscheibchen lange Reihen von Messungen vorgenommen werden mußten, aus denen nur die unter durchaus einwandfreien Verhältnissen erzielten Ausschläge zur schließlichen Errechnung der Ausschlagsmittelwerte für die drei Richtungen, a, b und c verwendet wurden.

Die Ergebnisse der Messungen sind folgende:

Topasscheibe I (∥ zur Achsenebene)

Dicke	0,98 mm
Durchmesser	12,18 mm
Gewicht	0,4059 g.

1) K. Mack, „Über die Pyroelektrizität des brasilianischen Topases". Wied. Ann. 28. S. 153—167. 1886.

2) M. Bauer, Edelsteinkunde. S. 88 u. 413. 1909.

Für die Kirchoffschen Achsenverhältnis-Konstanten[1]) ergaben sich die Werte: $A_1 = 11{,}127$, $B_1 = 0{,}71984$. Die Scheibe wurde zuerst in der aus Fig. 2 ersichtlichen Lage aufgehängt, so daß in der Richtung nach a gemessen werden konnte. Der bei dem für sämtliche Messungen konstanten Skalenabstand von 295 cm abgelesene Ausschlag betrug im Durchschnitt aus 50 verläßlichen Messungen $s_{Ia} = 67{,}24$ mm, oder der Ausschlagswinkel $\delta_{Ia} = 0^\circ 39' 11''$. In zweiter Aufhängung (vgl. Fig. 3) ergab sich aus über 40 gleichmäßigen Ausschlägen: $s_{Ic} = 69{,}62$ mm oder der Ausschlagswinkel $\delta_{Ic} = 0^\circ 40' 33_5''$.

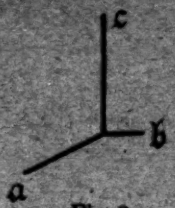


Fig. 2.

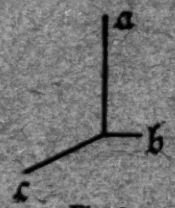


Fig. 3.

Für die Topasscheibe II (⊥ zur Mittellinie c) ergaben sich folgende Werte:

Dicke	1,00 mm
Durchmesser	12,19 mm
Gewicht	0,4122 g

$A_{II} = 11{,}1015$, $B_{II} = 0{,}73256$.

In erster Aufhängung (vgl. Fig. 4):

$s_{IIa} = 68$ mm, $\delta_{IIa} = 0^\circ 39' 42''$,

in zweiter Aufhängung (vgl. Fig. 5):

$s_{IIb} = 72$ mm, $\delta_{IIb} = 0^\circ 41' 57''$.

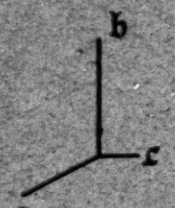


Fig. 4.

Die Elektrisierungszahlen η_a, η_b, η_c, die mit den Dielektrizitätskonstanten in dem Zusammenhang

$\varepsilon_a = 1 + 4\pi\eta_a$, $\varepsilon_b = 1 + 4\pi\eta_b$, $\varepsilon_c = 1 + 4\pi\eta_c$

stehen, wurden nach den aus der Theorie bekannten Formeln[2]) errechnet und ergaben sich wie folgt:

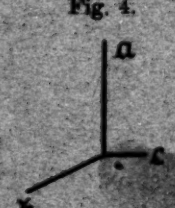


Fig. 5.

Aus Scheibe I	$\eta_{aI} = 0{,}41788$,
Aus Scheibe II	$\eta_{aII} = 0{,}42025$,
(Unterschied $\eta_{aII} - \eta_{aI}$	$= 0{,}00237$)
Mittelwert	$\eta_a = 0{,}419065$,

ferner ergab sich $\eta_b = 0{,}4405$

und $\eta_c = 0{,}4329$.

1) G. R. Kirchhoff, Mechanik. S. 131.
2) R. Fellinger, Wied. Ann. 7. S. 342. 1902.

Hieraus ergeben sich die Dielektrizitätskonstanten für den farblosen Topas:

$$\varepsilon_a = 6{,}2611, \qquad \varepsilon_b = 6{,}5357, \qquad \varepsilon_c = 6{,}4412,$$

W. Schmidt[1]) fand an einem Topas, den er als „durchsichtig, weingelb, mit vielen kleinen Sprüngen" beschreibt, die Dielektrizitätskonstanten:

$$\varepsilon_a = \underbrace{6{,}65 - 6{,}72}_{6{,}68}, \qquad \varepsilon_b = \underbrace{6{,}70 - 6{,}72}_{6{,}71}, \qquad \varepsilon_c = \underbrace{6{,}30 - 6{,}25}_{6{,}28}.$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Werten und den von mir gefundenen ist einerseits auf die verschiedenen, verwendeten Wellenlängen (bei Schmidt $\lambda = 75$, bei mir $\lambda = \infty$) und andererseits wohl auch auf die Verschiedenheit des untersuchten Materials zurückzuführen. Es erscheint verständlich, daß ein gelber Topas mit vielen kleinen Sprüngen sich dielektrisch anders verhält, als ein farbloses, fehlerfreies Exemplar, wie ich es zu verwenden Gelegenheit hatte.

Immerhin ist es auffallend, daß bei Schmidt ε_a größer ist als ε_c, während sich bei mir ε_a kleiner als ε_c ergab. — Wenn man annimmt, daß die in dem von Schmidt untersuchten Topas vorhandenen Sprünge, die sicher in der Ebene der Spaltbarkeit {001} verliefen, etwa H_2O enthielten, so würde das eine naheliegende Erklärung für das Schmidtsche Resultat $\varepsilon_a > \varepsilon_c$ bieten.

Bei dem ebenfalls von Schmidt[1]) und mir[2]) früher untersuchten Baryt (wie der Topas: rhombisch bipyr. und opt. +) zeigte sich übereinstimmend $\varepsilon_a < \varepsilon_c$, nämlich:

Schmidt: $\varepsilon_a = 7{,}62, \quad \varepsilon_b = 12{,}25, \quad \varepsilon_c = 7{,}63,$

Fellinger: $\varepsilon_a = 6{,}97, \quad \varepsilon_b = 10{,}087, \quad \varepsilon_c = 6{,}99.$

Die Dielektrizitätskonstante in der Richtung der optischen Normalen, ε_b, ist von Schmidt und mir übereinstimmend größer als ε_a und ε_c gefunden worden.

1) W. Schmidt, Wied. Ann 9. S. 919—937. 1902.
2) R. Fellinger, Wied. Ann. 7. S. 352 u. 355. 1902.

Beryll (Aquamarin), von Madagaskar.

Dihexagonal bipyramidal (Groth). — Hexagonal holoëdrisch (Voigt)
Doppelbrechung negativ.

Das zur Untersuchung verwendete, kreisrunde Scheibchen von etwa 11 mm Durchmesser und 1,5 mm Dicke war von Dr. Steeg u. Reuter, Homburg geliefert.

Die Farbe der Scheibe konnte mit hellgrünlichblau, also aquamarinfarben, bezeichnet werden; trotz der Zartheit der Farbe war der Dichroismus im auffallenden Licht deutlich wahrnehmbar.

Da die Beryllscheibe, ebenso wie jedes der folgenden, einachsigen Kristallpräparate, gemäß meiner Angabe parallel zur optischen Achse geschliffen war, genügte sie in den zwei entsprechenden Aufhängungen zur Feststellung der beiden gesuchten Dielektrizitätskonstanten in den Richtungen $\parallel$ und $\perp$ zur optischen Achse.

Die Konstanten der Beryllscheibe und die Meßresultate sind folgende:

Dicke . . .	1,64 mm,	$A = 10{,}07$
Durchmesser	10,85 mm,	$B = 1{,}24876$
Gewicht . .	0,4062 g.	

Die an der Skala abgelesenen Ausschläge ergaben sich aus einer Reihe verläßlicher Messungen:

$$s_\perp = 142{,}5 \text{ mm}, \qquad s_\parallel = 122 \text{ mm},$$

die Ausschlagswinkel:

$$\delta_\perp = 1^0 22' 58'', \qquad \delta_\parallel = 1^0 11' 3''.$$

Hieraus ergaben sich nach den bekannten Formeln[1]) die Elektrizitätszahlen: $\eta_\perp = 0{,}4793$ und $\eta_\parallel = 0{,}40395$, und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\varepsilon_\perp = 7{,}023, \qquad \varepsilon_\parallel = 6{,}076.$$

Nach anderen Beobachtungen sind folgende Werte gefunden worden:

W. Schmidt[2])	$\varepsilon_\perp = 6{,}05$,	$\varepsilon_\parallel = 5{,}51$,
J. Curie[3])	$\varepsilon_\perp = 7{,}10$,	$\varepsilon_\parallel = 6{,}05$ (für $\lambda = \infty$),
J. Curie[3])	$= 7{,}58$,	$= 6{,}24$ (für $\lambda = 75$).

1) R. Fellinger, Wied. Ann. 7. S. 344. 1902.
2) W. Schmidt, Wied. Ann. 9. S. 919—937. 1902.
3) J. Curie, Ann. d. Chim. 6. Ser. 17. S. 385. 1889; 18. S. 203. 1889.

Starke[1]) fand die Werte $\varepsilon_\perp = 7{,}44$ und $\varepsilon_\parallel = 7{,}85$, wobei aber, wie schon W. Voigt[2]) bemerkt, die optischen Richtungen verwechselt zu sein scheinen.

Die von mir gefundenen Werte stimmen am besten mit den von Curie für ∞ Wellenlänge festgestellten überein und entsprechen, ebenso wie diese und die Schmidtchen Werte, dem negativen Sinne der Doppelbrechung.

Rubin, von Siam.

Ditrigonal skalenoëdrisch (Groth). — Trigonal holoëdrisch (Voigt). Doppelbrechung negativ.

Es stand ein von Dr. Steeg und Reuter, Homburg, mit vieler Mühe hergestelltes, parallel zur optischen Achse geschliffenes Rubinscheibchen von 5,5 mm Durchmesser und 0,55 mm Dicke zur Verfügung.

Die Farbe konnte, soweit sich dies an dem dünnen Scheibchen feststellen ließ, als ausgesprochene, helle Siamfarbe mit einem Stich ins Violette, bezeichnet werden. Das Scheibchen war gleichmäßig gefärbt. Das dichroskopische Bild zeigte sich deutlich: hell-karminrot und ganz hellbräunlichgelb.

Der einzige Fehler, der wahrgenommen werden konnte, war ein kleiner Sprung am Rande des Scheibchens, in der Form wie er aus nebenstehender Skizze, Fig. 6, in doppelter Größe ersichtlich ist.

Fig. 6.

Die Abmessungen des Rubinscheibchens, die oben nur roh angegeben waren, und die übrigen, notwendigen Konstanten sind folgende:

Dicke . . .	0,547 mm,	$A = 10{,}827$
Durchmesser	5,504 mm,	$B = 0{,}86982$
Gewicht . .	0,0525 g.	

Die an der Skala abgelesenen Ausschläge ergaben sich aus mehreren Reihen verläßlicher Messungen:

$$s_\perp = 259 \text{ mm}, \qquad s_\parallel = 230 \text{ mm},$$

die Ausschlagswinkel:

$$\delta_\perp = 2^\circ 30' 31{,}5'', \qquad \delta_\parallel = 2^\circ 13' 45''.$$

1) H. Starke, Wied. Ann. **60**. S. 641. 1897.
2) W. Voigt, „Lehrbuch der Kristallphysik", S. 456. 1910.

Hieraus errechnen sich die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_{\perp} = 0{,}97612, \qquad \eta_{\parallel} = 0{,}81837$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\varepsilon_{\perp} = 13{,}2663, \qquad \varepsilon_{\parallel} = 11{,}284.$$

Vergleichswerte anderer Beobachter liegen meines Wissens noch nicht vor. Mit dem negativen Sinne der Doppelbrechung des Rubins stimmen die Zahlen für die Dielektrizitätskonstante überein.

Synthetischer Rubin.

Von der Deutschen Edelstein-Gesellschaft, vorm. Herm. Wild, A.-G. Idar.

Der synthetisch hergestellte Rohstoff war ein prächtig rotes, durchsichtiges Stück in der bei synthetischen Rohedelsteinen üblichen Tropfenform, im Gewichte von 10,69 g.

Aus diesem Tropfen ließ ich durch Dr. Steeg und Reuter zwei kreisrunde Scheibchen herstellen, für welche zusammen 6,4 g verschliffen wurden.

Das eine Scheibchen sollte in den Dimensionen möglichst genau dem Scheibchen aus echtem Rubin, das andere dem aus synthetischem farblosen Saphir hergestellten entsprechen.

Die Abmessungen und Volumkonstanten der beiden Scheibchen sind folgende:

	Scheibe Nr. 1	Scheibe Nr. 2
Dicke . . . . . mm	1,54	0,540
Durchmesser . . . . mm	10,87	5,529
Gewicht . . . . . g	0,5701	0,0525
A	10,201647	10,8535
B	1,18232	0,8565

Diese synthetischen Rubinscheibchen waren in der Farbe wesentlich kräftiger als das Scheibchen aus echtem Rubin. Die dichroskopischen Bilder präsentierten sich dementsprechend viel ausgeprägter und zwar: karminrot und hellbräunlichgelbrosa.

Das größere Scheibchen (Nr. 1) war in der Farbe nicht ganz gleichmäßig; namentlich machte sich ein bogenförmig verlaufendes, helleres Band bemerkbar.

Zunächst sollen die Messungen mit Scheibchen Nr. 2, das in den Abmessungen dem echten Rubinscheibchen entspricht,

betrachtet werden. Die Messungen sind bei diesen beiden Scheibchen unter genau gleichen Verhältnissen ausgeführt worden. Die Ausschläge ergaben sich:

$$s_\perp = 262 \text{ mm}, \qquad s_\parallel = 230 \text{ mm},$$
$$\delta_\perp = 2^\circ 32' 15{,}6'', \qquad \delta_\parallel = 2^\circ 12' 0{,}5''.$$

Hieraus ergaben sich die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_\perp = 0{,}9858, \qquad \eta_\parallel = 0{,}7989$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\varepsilon_\perp = 13{,}3877, \qquad \varepsilon_\parallel = 11{,}0393.$$

Für den echten Rubin hatten wir gefunden:

$$\varepsilon_\perp = 13{,}2663 \qquad \varepsilon_\parallel = 11{,}284.$$

Diese deutlich ausgeprägte Übereinstimmung hatte ich nicht erwartet. Allerdings ist beim synthetischen Rubin der Unterschied, $\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel = 2{,}3484$, größer als beim echten, bei dem sich $\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel = 1{,}9823$ ergibt.

Auch die synthetische Rubinscheibe Nr. 1, deren Messungen mit einem anderen Aufhängefaden vorgenommen wurden (die Messungen fanden mehrere Monate vor denjenigen der Scheibe Nr. 2 statt), brachte Vergleichsresultate, die mit denen der Scheibe Nr. 2 gut übereinstimmen. — Die an der Skala abgelesenen Ausschläge ergaben sich:

$$s_\perp = 184 \text{ mm}, \qquad s_\parallel = 162 \text{ mm},$$

die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_\perp = 0{,}98515, \qquad \eta_\parallel = 0{,}79838$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\varepsilon_\perp = 13{,}38 \qquad \varepsilon_\parallel = 11{,}033, \qquad \varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel = 2{,}347.$$

Als Mittelwerte für die Dielektrizitätskonstanten des synthetischen Rubins aus den Resultaten der beiden Scheibchen Nr. 1 und Nr. 2 kann man annehmen:

$$\varepsilon_\perp = 13{,}3838, \qquad \varepsilon_\parallel = 11{,}0361.$$

Vergleichswerte für die Dielektrizitätskonstante synthetischer Rubine liegen meines Wissens noch nicht vor.

Saphir, farblos, von Ceylon.
Kristallographisch wie Rubin.

Von der Edelsteintirma C. W. Kessler, Idar, wurde ein Rohsaphir im Gewichte von 3 g geliefert, aus dem Dr. Steeg und Reuter ein Scheibchen parallel zur optischen Achse herstellten. Der Schliff war nicht so vollkommen wie bei den übrigen Präparaten.

Die Messungen boten nichts wesentlich Interessantes. Die Resultate sind folgende:

Dicke . . .	1,10 mm	$A = 10{,}764$
Durchmesser	10,63 mm	$B = 0{,}9021$
Gewicht . .	0,3854 g.	

Die Ausschläge und Ausschlagswinkel ergaben sich:

$$s_\perp = 179 \text{ mm}, \qquad s_\parallel = 161_{\frac{1}{2}} \text{ mm},$$
$$\delta_\perp = 1^\circ 44' 10'', \qquad \delta_\parallel = 1^\circ 33' 50''.$$

Die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_\perp = 0{,}96975, \qquad \eta_\parallel = 0{,}82906$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\varepsilon_\perp = 13{,}186, \qquad \varepsilon_\parallel = 11{,}418.$$

Man sieht ziemliche Übereinstimmung mit den für den echten Rubin gefundenen Werten; nur ist beim farblosen Saphir der Unterschied, $\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel = 1{,}768$, kleiner als beim Rubin.

Synthetischer Saphir, farblos.
Von der Deutschen Edelstein-Gesellschaft, vorm. Herm. Wild, A.-G., Idar.

Wie beim synthetischen Rubin wurde ein Kristalltropfen geliefert, im Gewichte von 8,4 g, aus welchem eine Scheibe parallel zur optischen Achse geschliffen wurde. Verschliffen wurden 4,5 g.

Die Dimensionen und Meßresultate dieser Scheibe waren folgende:

Dicke . . .	1,59 mm	$A = 10{,}332$
Durchmesser	12,00 mm	$B = 1{,}117$
Gewicht . .	0,6791 g.	

Die Ausschläge und Winkel:

$$s_\perp = 181 \text{ mm}, \qquad s_\parallel = 163 \text{ mm}$$
$$\delta_\perp = 1^\circ 45' 20'', \qquad \delta_\parallel = 1^\circ 34' 53''.$$

Die Elektrisierungszahlen:

$$\eta_\perp = 0{,}9409, \qquad \eta_\parallel = 0{,}7981$$

und die Dielektrizitätskonstanten:

$$\varepsilon_\perp = 12{,}80, \qquad \varepsilon_\parallel = 11{,}029.$$

Diese Werte sind niedriger als beim echten, farblosen Saphir, und überhaupt die niedrigsten aus der ganzen Korunduntersuchungsreihe.

Der Unterschied $\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel = 1{,}771$ stimmt wohl zufällig mit der beim echten Saphir gefundenen Zahl 1,768 merkwürdig überein, weicht aber um so mehr von dem entsprechenden Werte des synthetischen Rubins, 2,348, ab.

Das Ergebnis der an natürlichen und synthetischen Edel-Korunden angestellten Untersuchungen läßt sich wie folgt zusammenfassen:

1. Die Dielektrizitätskonstante für den natürlichen edlen Korund zeigt in der Richtung parallel und senkrecht zur optischen Achse deutliche Verschiedenheit, die dem Sinne der negativen Doppelbrechung entspricht.

2. Die Dielektrizitätskonstanten für echten Rubin und farblosen Saphir sind voneinander nicht wesentlich verschieden und liegen in der Größenordnung: $\perp$ zur optischen Achse 13 und $\parallel$ zur optischen Achse 11.

3. Die Dielektrizitätskonstante synthetischer Korunde unterscheidet sich von derjenigen echter Korunde nicht wesentlich und nicht charakteristisch; höchstens ist zu bemerken, daß in der Richtung $\parallel$ zur optischen Achse die Dielektrizitätskonstante bei den synthetischen Kristallen durchweg niedriger gefunden wurde als bei den echten.

4. Der Unterschied zwischen den Dielektrizitätskonstanten $\perp$ und $\parallel$ zur optischen Achse ist bei echten und synthetischen Korunden desto größer, je kräftiger gefärbt diese sind.

Als Anhang möchte ich noch etwas über einen nicht zu den Edelsteinen gehörigen Körper mitteilen, den Bernstein, dessen dielektrisches Verhalten ich mit derselben Apparatur, wie sie für die besprochenen Kristalle verwendet wurde, untersucht habe.

Daß ich den Bernstein in die vorliegenden Untersuchungen mit einbezog, hat seinen Grund darin, daß es schon lange meine Absicht gewesen war, Bernstein verschiedener Qualität und von verschiedenen Fundorten auf sein dielektrisches Verhalten zu untersuchen. Ich hatte mir auch schon sechs in der Form möglichst gleiche Präparate aus Bernsteinen verschiedener Qualität von der Ostsee und der Nordsee (Bernstein von Sizilien, Rumänien, Birma usw. sollte folgen) herstellen lassen, war aber nicht über die Bestimmung der spezifischen Gewichte hinausgekommen.

Die einzige, durchgeführte Untersuchung im homogenen elektrischen Feld sei hier mitgeteilt.

Bernstein, gelbklar, Nordsee.

Das Rohmaterial, angeblich von der jütländischen Nordseeküste (vermutlich von Fanö) stammend, wurde von Richard Parthum, Berlin, geliefert, welcher auch die Herstellung der erforderlichen zylindrischen Scheibe in bester Ausführung besorgte.

Es war eine Scheibe von 17,4 mm Durchmesser und 1,74 mm Dicke, im Gewicht von 0,423 g.

Entsprechend den größeren Dimensionen dieser Scheibe mußte der Abstand der Kondensatorplatten, der bei den Kristallscheibchen 18—20 mm gewesen war, auf 40 mm bemessen werden. Im übrigen blieb die Versuchsanordnung (Meßspannung 142 Volt, Skalenabstand 295 cm usw.) genau dieselbe wie vorher.

Selbstverständlich mußten beim Bernstein, als dem typischen Vertreter der Reibungselektrizität, dieselben Vorsichtsmaßregeln beobachtet werden, wie vorher beim Topas (dieser wird durch Reiben positiv elektrisch, der Bernstein bekanntlich negativ elektrisch).

Erst etwa 5 Tage nach dem Einhängen des Bernsteinscheibchens konnten mit diesem verläßliche, gleichmäßige Ausschläge erzielt werden. Es wurden über 300 Messungen gemacht.

Die Konstanten und Endresultate gestalteten sich wie folgt:

$$A = 9{,}3817, \qquad B = 1{,}595.$$

Die Elektrisierungszahl: $\eta = 0{,}14827$ und die Dielektrizitätskonstante: $\varepsilon = 2{,}863$.

Als Vergleichswert ist mir nur der von Prof. W. M. Thornton[1]) gefundene: $\varepsilon = 2{,}8$, gegenwärtig, der mit meinem Resultat annähernd übereinstimmt.

Zum Schluß seien die in vorliegender Arbeit gefundenen Werte für die Dielektrizitätskonstanten nochmals übersichtlich zusammengestellt:

Topas, farblos, von Mino, Japan	$\varepsilon_a = 6{,}2512$, $\varepsilon_b = 6{,}5357$, $\varepsilon_c = 6{,}4412$,
Beryll (Aquamarin), von Madagaskar	$\varepsilon_\perp = 7{,}023$, $\varepsilon_\parallel = 6{,}076$,
Rubin, von Siam	$\varepsilon_\perp = 13{,}2663$, $\varepsilon_\parallel = 11{,}284$,
Saphir, farblos, von Ceylon	$\varepsilon_\perp = 13{,}186$, $\varepsilon_\parallel = 11{,}418$,
Synthetischer Rubin	$\varepsilon_\perp = 13{,}3838$, $\varepsilon_\parallel = 11{,}0361$,
Synthetischer Saphir, farblos	$\varepsilon_\perp = 12{,}80$, $\varepsilon_\parallel = 11{,}029$,
Bernstein, gelbklar, Nordsee	$\varepsilon = 2{,}863$.

1) W. M. Thornton, Phil. Mag. Vol. XIX. Sixth-Ser. S. 407. 1910.

(Eingegangen 10. Juni 1919.)

4. *Der spektrale Nachweis elektrischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome;* *von J. Stark.*

1. Einleitung.

Der Zeemaneffekt hat den Nachweis magnetischer Felder in der Atmosphäre der Sonne ermöglicht; dagegen ist der Versuch Humphreys[1]) mißglückt, mit seiner Hilfe auch das Vorkommen magnetischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome nachzuweisen, nämlich auf deren Wirkung die Verschiebung und Verbreiterung von Spektrallinien durch Druckerhöhung zurückzuführen.

Umgekehrt liegt der Fall bei dem Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. Während er bis jetzt vergeblich an Spektrallinien der Sonne gesucht wurde, bringt er uns in zwei Erscheinungen Kunde von dem Vorhandensein elektrischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome. Die eine dieser Erscheinungen ist die Verbreiterung und Verschiebung von Serienlinien durch Vergrößerung des Gasdruckes und der Stromdichte, die andere das Erscheinen gewisser Serien unter der Wirkung elektrischer Felder.

Die führende Ursache derjenigen Verbreiterung von Serienlinien, welche die Vergrößerung des Gasdruckes und der Stromdichte begleitet, habe ich schon frühzeitig[2]) in der Wirkung elektrischer Felder an der Oberfläche von Gasmolekülen und somit an der Oberfläche chemischer Atome (Atomionen) vermutet. Diese Vermutung ist zunächst in qualitativer Hinsicht durch Beobachtungen[3]) von mir und meinen Mitarbeitern von

---

1) W. J. Humphreys, Jahrb. d. Rad. u. El. 5. S. 324. 1908.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 43. S. 1040. 1914.

3) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. S. 1040. 1914; G. Wendt, Ann. d. Phys. 45. S. 1257. 1914; J. Stark, Ann. d. Phys. 48. S. 226. 1915; A. J. Dempster, Ann. d. Phys. 47. S. 791. 1915; T. R. Merton,

A. J. Dempster und T. R. Merton, für die rote Wasserstofflinie auch in quantitativer Hinsicht von J. W. Nicholson und T. R. Merton bestätigt worden. P. Debye[1]) und vor allem J. Holtsmark[2]) hat eine Theorie der Verbreiterung von Serienlinien durch molelektrische Felder (elektrische Felder an der Oberfläche von Gasmolekülen) entwickelt und in einer Besprechung des in Betracht kommenden experimentellen Materiales eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung gefunden. Die Frage nach dem Verhältnis zwischen molelektrischer und molstößlicher Verbreiterung, die ich in einem Bericht[3]) über die Verbreiterung von Spektrallinien aufgeworfen habe, ist freilich noch nicht beantwortet.

Daß auch die Verschiebung des Intensitätsgipfels von Spektrallinien, welche die dissymmetrische Verbreiterung begleitet, eine Wirkung der molelektrischen Felder ist, hat kürzlich M. Ritter[4]) nachgewiesen.

Weniger geklärt und bekannt ist die Erscheinung, daß unter der Wirkung molelektrischer Felder gewisse Serien sichtbar werden, welche außerhalb eines elektrischen Feldes keine merkliche Intensität besitzen. Es ist ja eine der merkwürdigsten Wirkungen des elektrischen Feldes auf Spektrallinien[5]), daß die Intensität gewisser Serien eines Elements im Verhältnis zu derjenigen anderer Serien außerhalb eines elektrischen Feldes unmerklich klein ist, dagegen in einem elektrischen Felde mit dessen wachsender Stärke rasch größer wird und diejenige anderer Serien erreicht. Für Spektren, in welchen solche Serien vorkommen, ist demnach die Verteilung der Intensität innerhalb dieser Serien sowie zwischen ihnen und anderen Serien merk-

---

Proc. Roy. Soc. 92. S. 322. 1916; J. W. Nicholson u. T. R. Merton, Phil. Trans. A. 216. S. 459. 1916; T. R. Merton, Proc. Roy. Soc. 95. S. 30. 1918; M. Ritter, Ann. d. Phys. 59. S. 170. 1919.

1) P. Debye, Phys. Zeitschr. 20. S. 160. 1919.

2) J. Holtsmark, Phys. Zeitschr. 20. S. 162. 1919; Ann. d. Phys. 58. S. 577. 1919.

3) J. Stark, Jahrb. d. Rad. u. El. 12. S. 349. 1915.

4) M. Ritter, Ann. d. Phys. 59. S. 170. 1919.

5) Li-Serie: J. Stark, Ann. d. Phys. 48. S. 210. 1915. He-Serien: J. Koch, Ann. d. Phys. 48. S. 98. 1915; J. Stark, Ann. d. Phys. 56. S. 577. 1918; G. Liebert, Ann. d. Phys. 56. S. 589, 610. 1918.

würdiger Weise von der Stärke der elektrischen Felder abhängig, in denen sich die Serienträger befinden.

Diese Wirkung ist zunächst an ausgedehnten oder „endlichen" elektrischen Feldern beobachtet worden. Es ist aber zu erwarten, daß sie auch von den elementaren elektrischen Feldern einzelner Gasmoleküle hervorgebracht wird, wenn sich in ihnen die Träger von Serien jener Art befinden. Diese Überlegung habe ich bereits auf die halbscharfe (dritte) Nebenserie des Lithiums angewandt und deren Auftreten im Lichtbogen in freier Luft auf die Wirkung molelektrischer Felder zurückgeführt.[1])

Im folgenden sind weitere Beispiele für diesen Nachweis des Vorkommens elektrischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome an der Hand des Auftretens von Serien unter der Wirkung dieser Felder gegeben. Die nachstehenden Ausführungen sind auch insofern von Bedeutung als sie unsere Kenntnisse von den Serien des Heliums und Lithiums vervollständigen.

2. Die halbscharfe Nebenserie des Lithiums und Heliums.

Die halbscharfe oder dritte Nebenserie des Lithiums (λ 6240 — 4636 — 4147 — 3923) gehört zu den Serien, welche nur im elektrischen Feld erscheinen. Ihr Auftreten in einem endlichen elektrischen Feld ist von mir untersucht[2]) worden, schon früher war sie am Lichtbogen in freier Luft, also bei hohem Gasdruck und großer Stromdichte beobachtet worden. Hier wird sie, wie ich bereits oben bemerkte, durch die Wirkung molelektrischer Felder bedingt.

Die entsprechende halbscharfe oder dritte Nebenserie des Heliums (He_I) ist von J. Koch[3]) in einem endlichen elektrischen Feld aufgefunden worden. Bei kleiner Stromdichte und niedrigem Gasdruck sind die Linien dieser Serie noch photographisch unsichtbar, wenn die Linien der diffusen und der scharfen Nebenserie bereits stark überlichtet sind. Jedoch sind sie (λ 4519—4046) von T. R. Merton[4]) kürzlich unter denjenigen Bedingungen,

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 48. S. 226. 1915.
2) J. Stark, Ann. d. Phys. 48. S. 210. 1915.
3) J. Koch, Ann. d. Phys. 48. S. 98. 1915.
4) T. R. Merton, Proc. Roy. Soc. 95. S. 30. 1918.

welche die Serienträger in starke molelektrische Felder bringen, nämlich bei erheblichem Gasdruck und großer Stromdichte an der positiven Säule in einer Geißlerröhre neben den übrigen He-Linien in merklicher Intensität beobachtet worden.

3. Die nahdiffuse Nebenserie des Lithiums und Heliums.

Wie ich kürzlich darlegte[1]), gehört vermutlich auch die nahdiffuse Nebenserie zu denjenigen Serien, welche durch ein elektrisches Feld eine Verstärkung ihrer Intensität erfahren. Die Linien der nahdiffusen Nebenserie des Lithiums liegen dicht hinter denjenigen der diffusen Nebenserie. Das gleiche gilt für die nahdiffuse Nebenserie von He_I.

Die Linien der nahdiffusen Li- und He_I-Nebenserie werden durch das elektrische Feld nach kürzeren Wellen verschoben. Infolge ihrer großen Nähe bei den diffusen Linien habe ich sie früher irrtümlich als elektrische Komponenten dieser Linien betrachtet und somit von einem Verhältnis der Intensitäten der elektrischen Komponenten der diffusen Linien in Abhängigkeit von der Feldstärke[2]) gesprochen. In Wirklichkeit handelte es sich um das Verhältnis der Intensitäten zweier verschiedener Serien.

Daß diese Auffassung richtig ist, geht aus folgenden Beobachtungen und Überlegungen hervor.

Von der nahdiffusen Li-Nebenserie ist am Lichtbogen in freier Luft die Linie λ 4601,6, am Funken in freier Luft die Linie λ 4131 von F. Exner u. E. Haschek[3]) beobachtet worden, also beide Linien unter den Bedingungen für starke molelektrische Felder (hoher Gasdruck und große Stromdichte). Diese Wellenlängen gelten, wie man beachten muß, für die Feldstärke des Intensitätsgipfels einer jeden Linie. Da diese durch das elektrische Feld nach kürzeren Wellenlängen verschoben wird, so ist die Wellenlänge der Linien für die Feldstärke Null merklich größer. So berechnet sich aus den von B. Dunz[4]) ge-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 58. S. 721. 1919.

2) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. S. 999. 1914; H. Lüssem, Ann. d. Phys. 49. S. 876. 1916.

3) F. Exner u. E. Haschek, Wellenlängen-Tabellen, Leipzig u. Wien 1902.

4) B. Dunz, Diss. Tübingen 1911.

gebenen Zahlen die Wellenlänge der zweiten Linie zu 4132,2 für die Feldstärke Null (Wellenlänge der benachbarten diffusen Linie 4132,6).

Die Linien λ 4471 und 4026 der nahdiffusen He_I-Serie sind zunächst von mir und Kirschbaum im endlichen elektrischen Feld als scheinbare Komponenten der benachbarten diffusen Linien λ 4471,6 und 4026,3 beobachtet worden; ihre Intensität nimmt im Verhältnis zu derjenigen der diffusen- und scharfen He_I-Linien rasch mit wachsender Feldstärke zu. Nun hat kürzlich T. R. Merton[1]), wie bereits oben bemerkt wurde, an einer Geißlerröhre die Bedingungen für die Wirkung molelektrischer Felder auf Serienlinien (erheblicher Gasdruck und große Stromdichte) hergestellt und hat außer den ebenfalls unter dieser Wirkung erscheinenden halbscharfen He_I-Serienlinien dicht hinter 4471,6 eine neue Linie beobachtet. Es ist dies zweifellos die nahdiffuse He_I-Linie 4471 und nicht, wie Merton meint, eine Komponente in der Verbreiterung der diffusen Linie 4471,6.

Außer dieser nahdiffusen He_I-Linie hat Merton, wie nebenbei bemerkt sei, auch noch die nahdiffusen He_{II}-Linien hinter den diffusen He_{II}-Linien λ 4922 und 4388 unter der Wirkung der molelektrischen Felder erhalten, sie aber in unzutreffender Weise für Verbreiterungskomponenten dieser Linien erklärt.

Greifswald, Physik. Inst. d. Univ., 20. Mai 1919.

1) T. R. Merton, Proc. Roy. Soc. 95. S. 30. 1918.

(Eingegangen 28. Juni 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

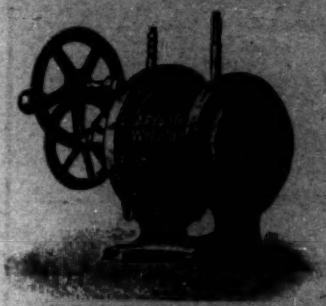
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

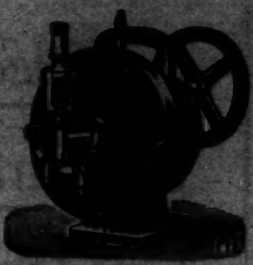
Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P.



System Gaede, D.R.P. angemeldet

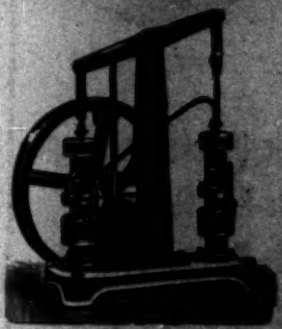


Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.



Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

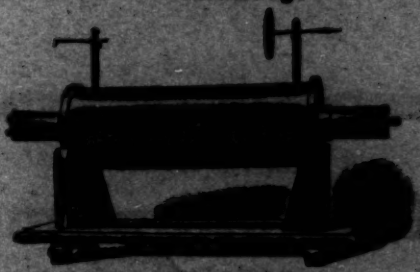
Trockene Schieber-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Hebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. Fr. Hoffmann und W. Meißner. Über die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt 201
2. Robert Scheuermann. Über die Gestalt und die Auflösung des fallenden Flüssigkeitsstrahles 233
3. K. Siebel. Über die Änderung der Thermokraft und der elektrischen Leitfähigkeit einer Kalium-Natriumlegierung beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand . . 260
4. F. Krüger. Zur Hydrodynamik der Hiebtöne 279
5. R. H. Weber. Über Gay-Lussac- und Boyle-Temperaturen 291

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1919. № 19.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. *Über die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt*[1]; *von Fr. Hoffmann und W. Meißner.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Inhalt: Einleitung. — § 1. Die photometrische Einrichtung. — § 2. Die benutzten Hohlraumstrahler nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip und die Eichung derselben. — § 3. Der Hohlraumstrahler im schmelzenden Metall und die zugehörigen Schmelzpunktsbestimmungen. — § 4. Die verwendeten Metalle. — § 5. Die Messungen selbst und ihre Ergebnisse für die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold-, Kupfer- und Palladiumschmelzpunkt. — § 6. Folgerungen für die Temperaturskala oberhalb des Goldschmelzpunktes. — Zusammenfassung.

Der Schmelzpunkt des Palladiums ist von Holborn und Valentiner[2]) und mit vervollkommneten Mitteln von Day und Sosman[3]) an das Gasthermometer angeschlossen worden.

Ferner ist er mit optischen Methoden verschiedentlich bestimmt worden: zunächst von Holborn und Henning[4]), die die Temperatur eines Palladiumbleches im Augenblick des Schmelzens mit dem Holborn-Kurlbaum-Pyrometer unter Berücksichtigung des Reflexionsvermögens maßen, aber dabei mehr die Erweiterung der Temperaturmeßmethoden als die Fixpunktsbestimmung im Auge hatten, sodann von Nernst und v. Wartenberg[5]), die die Temperatur einer Querwand in

1) Die Arbeit ist im Jahre 1912 abgeschlossen worden. Die Ergebnisse sind in der Zeitschr. f. Instrumentenkd. **32**. S. 201—202, 1912 und **33**. S. 156—157. 1913 veröffentlicht worden. Die vorliegende ausführliche Publikation wurde durch den Krieg verzögert.

2) L. Holborn u. S. Valentiner, Ann. d. Phys. **22**. S. 1—48, 1907.

3) Arthur L. Day u. Robert B. Sosman, High temperature gas thermometry, 129 S. Carnegie Institution of Washington. 1911.

4) L. Holborn u. F. Henning, Berl. Ber. 1905. S. 311—317.

5) W. Nernst u. H. v. Wartenberg, Verh. D. Phys. Ges. 8. S. 48—58. 1906.

einem Iridiumofen mit dem Wannerpyrometer in dem Augenblick maßen, in welchem ein von der anderen Seite gegengeführter, zwischen Iridiumstäbe geschmolzener Palladiumdraht durchschmolz, endlich von Waidner und Burgess[1]), die unter anderem einen Iridiumofen und ein Holborn-Kurlbaum-Pyrometer benutzten.

Bei diesen optischen Bestimmungen wurde entweder die oberhalb des Goldschmelzpunktes extrapolierte thermoelektrische Skala zugrunde gelegt, an welche das benutzte Pyrometer angeschlossen war oder die strahlungstheoretische Skala, die mit einem bestimmten Wert der Exponentialkonstante des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes erhalten wird.

Holborn und Valentiner[2]) haben umgekehrt durch optische Messungen die Exponentialkonstante des Planckschen Gesetzes ermittelt und dabei außer der gasthermometrischen Bestimmung des Palladiumschmelzpunktes auch eine Messung der relativen Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt vorgenommen. Sie benutzten dabei einen schwarzen Körper aus weißer Magnesia, durch dessen mit einem Lummer-Brodhunschen Spektralphotometer anvisierte Querwand 2 Platindrähte mit zwischengeschmolzenem Palladiumdraht gezogen waren, so daß der schmelzende Draht auf der anvisierten Seite lag.

Trotz des hiernach schon vorliegenden Beobachtungsmaterials schien eine möglichst genaue neue Bestimmung der relativen Helligkeit der Hohlraumstrahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt wünschenswert und zwar aus folgenden Gründen:

Erstens wurde von uns an 2 verschiedenen als chemisch rein bezogenen Palladiumsorten ein Unterschied von fast 10° im Schmelzpunkt beobachtet und es erscheint nicht ausgeschlossen, daß unter Umständen auch noch größere Differenzen möglich sind. Es können deshalb nur solche Messungen miteinander verglichen werden, die an Material von nachweislich gleichem Schmelzpunkt angestellt wurden. Das von uns benutzte Material stimmt im Schmelzpunkt genau überein mit dem von Day und Sosman bei ihren gasthermometrischen

1) C. W. Waidner u. G. K. Burgess, Bull. Bur. of Standards 3. S. 163—208. 1907.

2) L. Holborn u. S. Valentiner, a. a. O.

Messungen verwendeten, von dem die Reichsanstalt durch das Entgegenkommen des Hrn. Day eine Probe erhielt.

Zweitens wurden in der Reichsanstalt Neubestimmungen der Exponentialkonstante des Wien-Planckschen Gesetzes vorgenommen[1]), die die Temperaturskala strahlungstheoretisch unabhängig vom Gasthermometer festlegen. Es war wichtig mit möglichster Genauigkeit festzustellen, ob die durch diese Neubestimmung gegebene, dem Wien-Planckschen Gesetze entsprechende Temperaturskala beim Palladiumschmelzpunkt mit der gasthermometrischen Skala nach Day und Sosman übereinstimmt.

Zu unseren Bestimmungen der relativen Helligkeit bei den beiden Schmelzpunkten benutzten wir zwei verschiedene Methoden: Bei der ersten wurde ein Hohlraumstrahler nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip verwendet, dessen Unterteilung jedoch nach dem Vorgange von Brodhun, Rothe und Hoffmann durch herausnehmbare Trommeleinsätze erfolgte, so daß der hinterste Hohlraumkörper, dessen strahlende Öffnung bei der optischen Beobachtung anvisiert wurde, herausgenommen, mit verschieden größeren Öffnungen versehen und sowohl in geschwärztem wie in ungeschwärztem Zustande benutzt werden konnte. Durch die strahlende Öffnung wurde vor der optischen Beobachtung ein Le Chatelierscher Thermoelement mit zwischengeschmolzenem Schmelzdraht eingeführt, und der Moment des Schmelzens mit einem zweiten, von hinten eingeführten Le Chatelierschen Thermoelement beobachtet. Bei der zweiten Methode wurde ein Hohlraumkörper mit kleiner strahlender Öffnung und einem sich konisch erweiternden Ansatz in einem mit dem Schmelzmetall gefüllten Tiegel eingetaucht, der sich in einem elektrisch geheizten Platinfolieofen befand. Der Schmelzpunkt des Metalls wurde mit einem dicht neben den Hohlraumkörper eingetauchten Le Chatelierschen Thermoelement gemessen. Da die thermische Trägheit des Metalls am Schmelzpunkt wegen der Schmelzwärme sehr groß ist, gelingt es leicht, das Metall durch Einregulieren des Heizstromes lange Zeit im Zustand des Erstarrens oder Schmelzens zu erhalten. Während dieser Zeit wurden die optischen Beobachtungen vorgenommen.

1) E. Warburg u. C. Müller, Ann. d. Phys. 48. S. 410—432. 1915.

Die zweite Methode dürfte der ersteren bedeutend überlegen sein, da bei derselben eine viel größere Gewähr dafür vorhanden ist, daß sich die ganze Wandung des Hohlraumkörpers auf konstanter Temperatur befindet. Trotzdem mag auch auf die nach der ersten Methode angestellten Beobachtungen eingegangen werden, zumal dabei verschiedene neuartige Anordnungen benutzt wurden. Die nach beiden Methoden gefundenen mittleren Werte sind übrigens in so guter Übereinstimmung, daß man berechtigt ist, den nach der ersten Methode bestimmten Wert als im wesentlichen bestätigt durch den nach der zweiten vollkommeren Methode bestimmten anzusehen.

§ 1. Die photometrische Einrichtung.[1])

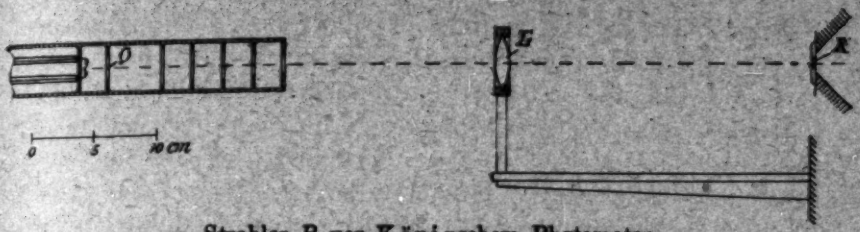
Zu den optischen Messungen wurde bei beiden Methoden ein König-Martenssches Spektralphotometer benutzt. Zur Kontrolle wurden einige Messungen mit dem Lummer-Brodhunschen Spektralphotometer angestellt, die in § 5 unter 1. aufgeführt sind.

Der 4 mm lange Okularspalt des König-Martensschen Photometers wurde auf 1,1 mm verkürzt, da sich zeigte, daß bei 4 mm langem Spalt bei geringen seitlichen Verschiebungen des Auges Schwankungen in der relativen Helligkeit der beiden durch eine vertikale Linie getrennten Gesichtsfeldhälften auftraten.

Der Kollimatorspalt wurde 0,2 mm breit, der Okularspalt 0,3 mm breit gewählt, so daß eine Einstellung des Kollimatorspaltbildes auf die Mitte des schwach erhellten Okularspaltes möglich war, ohne die Spalte zu verstellen. Wie durch eine besondere, rechnerische Untersuchung nachgewiesen wurde, weicht bei diesen Spaltbreiten das beobachtete Verhältnis der Helligkeiten bei den beiden Schmelzpunkten nur um eine zu vernachlässigende Größe von dem auf unendlich schmale Spalte reduzierten Verhältnis ab. Die eine Hälfte des Kollimatorspaltes wurde unter Vermittlung einer Linse und des am Photometer befindlichen, total reflektierenden Prismas von einer Mattscheibe beleuchtet, die durch eine mit konstantem

1) Bei den optischen Messungen wurde uns in ausgedehntem Maße der Rat von Hrn. Geh. Reg.-Rat Brodhun zu Teil, dem wir hierfür auch an dieser Stelle unseren Dank aussprechen.

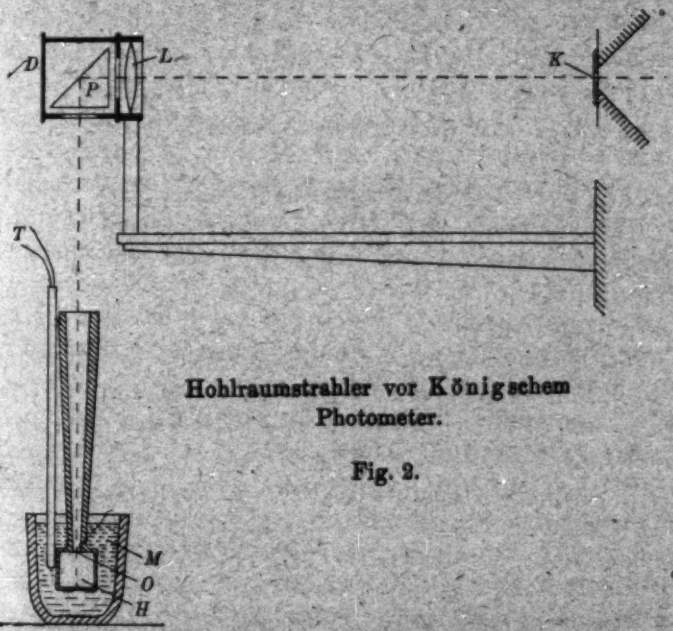
Strom belastete kleine Metallfadenlampe erhellt war. Lampe, Mattscheibe und Linse waren fest am Photometer montiert.



Strahler *B* vor Königschem Photometer.

Fig. 1.

Die andere Kollimatorspalthälfte wurde von dem zu untersuchenden Hohlraumstrahler beleuchtet, und zwar wurde die Öffnung *O* des Hohlraumstrahlers durch eine Linse *L*, die fest am Photometer montiert war, auf dem Spalt *K* des Photometers abgebildet (Fig. 1). Bei den Beobachtungen an den



Hohlraumstrahler vor Königschem Photometer.

Fig. 2.

Hohlraumkörpern *H* in schmelzendem Metall *M* (Fig. 2) war vor der Linse *L* noch ein total reflektierendes Prisma *P* angebracht, durch welches die vertikal aus dem Hohlraumkörper austretenden Strahlen horizontal gerichtet wurden. Der das Prisma enthaltende Kopf *D* war um die nach dem Kollimator-

spalt K gerichtete Achse drehbar, so daß durch Drehung des Kopfes um 90° in unmittelbarer Folge Beobachtungen an dem Hohlraumkörper im Tiegel und an einem schwarzen Körper nach Lummer-Kurlbaumschen Prinzip angestellt werden konnten.

Der drehbare Kopf D wurde so justiert, daß seine Drehungsachse mit der optischen Achse der einen Photometerhälfte zusammenfiel und das Prisma P so ausgerichtet, daß die Reflexion an ihm unter 45° erfolgte. Die Richtigkeit der Justierung wurde mehrmals im Laufe der Untersuchung kontrolliert.

Beim Königschen Photometer ist, wenn k eine Konstante bedeutet, die Helligkeit J der photometrischen Lichtquelle in einem eng begrenzten Wellenlängenbereich mit dem Einstellwinkel α verknüpft durch die Beziehung

$$J = k \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha .$$

Für das Helligkeitsverhältnis H zweier Lichtquellen oder einer Lichtquelle bei zwei verschiedenen Temperaturen gilt also

$$H = \frac{J_2}{J_1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{\operatorname{tg}^2 \alpha_1} . \tag{1}$$

Ob diese Beziehung streng erfüllt war, ist im Laufe der Beobachtungen wiederholt unmittelbar nachgeprüft worden und zwar in der Weise, daß die Helligkeit einer gegebenen Lichtquelle durch Zwischenschaltung eines rotierenden Sektors um einen genau meßbaren Betrag geschwächt und die Einstellung mit und ohne Schwächung vorgenommen wurde. Die Messungen ergaben stets eine Übereinstimmung mit der Berechnung, die weit innerhalb der Einstellfehler lag.

Trotzdem wurde angestrebt, die Winkel bei den beiden zu vergleichenden Helligkeiten nicht allzu verschieden ausfallen zu lassen, weil man so in beiden Fällen dem Gebiete größter Meßgenauigkeit des Photometers nahe bleiben kann. Es wurde deshalb beim Palladiumschmelzpunkt zwischen schwarzen Körper und Photometer ein rotierender Sektor geschaltet, dessen Öffnung 3,6° betrug, so daß das eintretende Licht auf $^1/_{100}$ seines Betrages geschwächt wurde. Diese Schwächung wurde von Hrn. Brodhun mehrfach nachgeprüft und auf etwa $^2/_{1000}$ ihres Wertes richtig gefunden. Bei Einschaltung des Sektors bei der Messung von J_2 gilt also, wenn α_2 der zugehörige Einstellwinkel ist, für das Helligkeitsverhältnis der Wert

$$H = 100 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{\operatorname{tg}^2 \alpha_1} . \tag{2}$$

§ 2. Die benutzten Hohlraumstrahler nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip und die Eichung derselben.

Die beiden Arten von Hohlraumstrahlern nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip, die verwendet wurden, sind in Fig. 3 und 4 dargestellt.

Der erstere Typ (Fig. 3) ist der ursprüngliche Lummer-Kurlbaumsche. Es wurden zwei Exemplare desselben benutzt, von denen der eine von Hrn. Lummer selbst übernommen und noch von diesem geschwärzt war, während der andere neu hergestellt und mit einer Schwärze aus gleichen

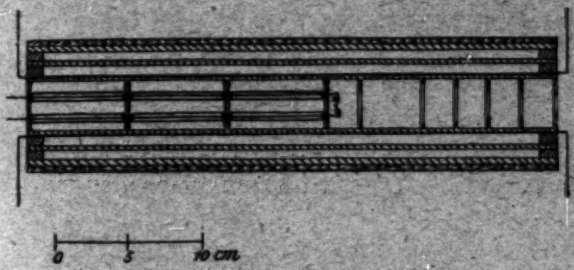


Fig. 3. Strahler *B*.

Teilen Eisen- und Chromoxyd unter Zusatz von etwas Marquardtscher Masse als Bindemittel geschwärzt wurde. Das erstere Exemplar, der Strahler *B*, wurde seit Jahren und bis auf einen Ausnahmefall auch während der vorliegenden Untersuchung nur bis 1100° benutzt, während das zweite neuere Exemplar, der Strahler *E*, zur Erledigung von Prüfungsanträgen wiederholt bis 1400° verwendet wurde.

Für die vorliegende Untersuchung von ausschlaggebender Bedeutung ist die Frage, mit welcher Sicherheit die Temperatur der anvisierten Rückwand der innersten Kammer des Strahlers als mit der des Schmelzpunktes der verwandten Metalle (Gold und Palladium) übereinstimmend angesehen werden kann. Da die Einstellung dieser Temperatur mit dem im Körper montierten Thermoelement, dem sogenannten „Halteelement" erfolgte, galt es also, dessen Thermokraft unter diesen Umständen einwandfrei zu ermitteln. Von den durch Inhomogenität der Schenkel hervorgerufenen Fehlern des Halteelementes befreit man sich auf einfache Weise dadurch, daß man das Element nicht für sich, sondern im schwarzen

Körper selbst in der Lage eicht, in der es dauernd gebraucht wird. Dazu dienten zwei Methoden: Bei der ersten wurde der Schmelzpunkt des Metalls an einem zwischen die Schenkel eines von vorn eingeführten Thermoelementes geschmolzenen Drahtes beobachtet und gleichzeitig die Thermokraft des Halteelementes bestimmt. Dabei war das Schmelzdrahtelement in ein dünnwandiges Rohr aus Marquardtscher Masse montiert (Fig. 4). Der Schmelzdraht war so zwischen die beiden

Fig. 4.

Schenkel geschmolzen, daß die beiden Schenkelspitzen, die etwas neben der Lötstelle des Halteelementes gegen die Kammerrückwand gedrückt wurden, frei blieben. Bei der zweiten wurde durch „Abtasten" die Thermokraft des Halteelementes mit der eines von vorn eingeführten, nach der Schmelzdrahtmethode geeichten Thermoelementes verglichen, wobei die Lötstellen beider Elemente zur Berührung gebracht wurden. Um zu verhüten, daß die Lötstelle des Halteelementes infolge Wärmeleitung längs der Schenkel eine von der Temperatur der Kammer stärker abweichende Temperatur annimmt, ist es wichtig, daß die Schenkel zu beiden Seiten der Lötstelle innerhalb der Kammer zu je einer „Locke" von etwa 5 Windungen gewunden sind. Daß dadurch die Temperaturgleichheit mit der Kammerrückwand im wesentlichen gesichert ist, geht nicht nur daraus hervor, daß die Lötstelle das Thermoelements bei Temperaturkonstanz im glühenden Hohlraum fast vollkommen verschwindet, sondern auch aus der Übereinstimmung zwischen der Eichung nach der Tast- und Schmelzmethode. Ein geringer Unterschied zwischen der Temperatur der Lötstelle des Halteelementes und der strahlenden Rückwand würde übrigens bei dieser Eichmethode deshalb herausfallen, weil das Halteelement lediglich dazu dient, nach dem Herausziehen des Schmelzelementes wieder genau die gleiche Temperatur der Rückwand einstellen zu können, die beim Schmelzpunkt vorhanden war.

Die Thermokräfte des Halteelementes und des Durchschmelzelementes wurden an je einem Kompensationsapparat mit Spiegelgalvanometer als Nullinstrument bis auf etwa

0,1 Mikrovolt genau abgelesen. Es ist dann beim Goldschmelzpunkt möglich, den Schmelzprozeß genau zu beobachten: Wenn der Temperaturanstieg mit dem Halteelement gleichmäßig auf etwa 5 Mikrovolt pro halbe Minute einreguliert ist, zeigt beim Eintritt des Schmelzens das Durchschmelzelement plötzlich konstante Thermokraft, und erst nachdem die Anzeige des Halteelementes weiter um etwa 1° C gestiegen ist, erfolgt das Durchschmelzen des Schmelzdrahtes; kurz vorher beginnt die Thermokraft des Durchschmelzelementes plötzlich stark zu wachsen.

In Tab. 1 sind einige der im Laufe der ganzen Untersuchung beim Goldschmelzpunkt für das Halteelement von Körper *B* gefundenen Thermokräfte eingetragen.

Tabelle 1.

Thermokräfte beim Goldschmelzpunkt für Körper *B*.

Datum	Thermokraft in 10^{-6} Volt	Datum	Thermokraft in 10^{-6} Volt
4. 11. 1910	10306	31. 7. 1912	10305
31. 12. 1910	10303	11. 9. 1912	10303
16. 1. 1911	10306	6. 12. 1912	10303
20. 4. 1911	10304	11. 12. 1912	10298
30. 10. 1911	10298	28. 12. 1912	10295
21. 2. 1912	10302		

Die in der Tabelle aufgeführten Werte sind in der Regel Mittelwerte aus 2 Einzelbeobachtungen, deren Resultate sich stets um weniger als 10 Mikrovolt unterschieden. Aus der Tabelle geht hervor, daß das Halteelement des Körpers *B* nur eine ganz geringe Abnahme der Thermokraft erlitten hat. Der dem Strahler *B* analog gebaute Strahler *E* wurde benutzt, um eine Kontrolle für die optische Temperaturanzeige von *B* zu haben. Beide Strahler stimmten am Goldschmelzpunkt innerhalb 1° überein.

Der zweite neue, zusammensetzbare Typ des Lummer-Kurlbaumschen Strahlers (Strahler *F*, Fig. 5) war früher (im Jahre 1907/08) von Brodhun, Rothe und Hoffmann eingehend untersucht worden. Dabei hatte sich folgendes ergeben: Bei genügend kleiner Öffnung im Deckel der hintersten strahlenden Kammer (Loch von 3 mm Durchmesser oder

Spalt) ist die Helligkeit der austretenden Strahlung bei gleicher, thermoelektrisch gemessener Temperatur unabhängig davon, ob die strahlende Kammer geschwärzt oder ungeschwärzt ist. Bei größerer Öffnung ist die Helligkeit des weißen Strahlers größer als die Helligkeit des mit dem Thermoelement auf gleiche Temperatur eingestellten geschwärzten Strahlers. Dies im Gegensatz zu der gewöhnlichen Anschauung stehende Resultat ist offenbar dadurch hervorgerufen, daß die Seitenwände der strahlenden Trommel zufolge der Beheizung höher temperiert

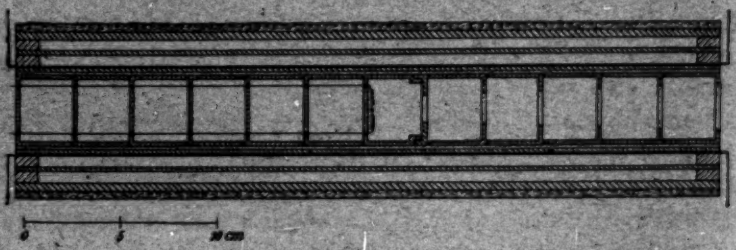


Fig. 5. Strahler *F*.

sind als die Rückwand der Trommel, deren Temperatur thermoelektrisch eingestellt wird. Die heißeren von den Seitenwänden kommenden Strahlen werden von der weißen Rückwand stärker reflektiert als von der schwarzen, so daß die weiße Rückwand heller erscheint als die schwarze. Dasselbe Resultat wie mit dem zusammensetzbaren Strahler wurde auch mit geschwärzten und ungeschwärzten Strahlern gewöhnlicher Konstruktion erhalten. Besonders starke Effekte erhält man, wenn die Seitenwände geschwärzt sind und die Trommelrückwand weiß gelassen ist oder wenn von der Rückwand an einzelnen Stellen die Schwärze abgeplatzt ist. Der Effekt ist in der Regel bei niederen Temperaturen größer als bei höheren Temperaturen. Der zusammensetzbare Strahler ist zum Gebrauch in Temperaturen oberhalb 1400° C geeigneter als der Strahler Lummer-Kurlbaumscher Konstruktion, da beim ersteren das durch Platinfolie beheizte Rohr, in welches die Trommeln eingeschoben werden, viel weniger leicht bricht als das Rohr des Lummer-Kurlbaumschen Hohlsaumstrahlers, das vor dem Brennen aus mehreren Stücken zusammengebacken ist. Ferner kann in dem zusammensetzbaren Strahler die strahlende Trommel nötigenfalls ungeschwärzt bleiben. Es zeigte sich

allerdings, daß die Schwärze der oben angegebenen Zusammensetzung bis 1600° C noch gut brauchbar ist. Um die Benutzung des zusammensetzbaren Strahlers bis zum Palladiumschmelzpunkt auf längere Zeit hin zu ermöglichen, wurde die Stärke der zur Heizung verwendeten Platinfolie von 0,01 mm auf 0,03—0,04 mm erhöht und der Zwischenraum zwischen der Platinfolie und dem nächsten, etwa 5 mm entfernten konzentrischen Rohr mit feingekörnter gebrannter Magnesia gefüllt. Die letztere Maßregel verhindert ein stärkeres Durchbiegen des beheizten Rohres aus Marquardtscher Masse. Bezüglich der Wirksamkeit der verstärkten Platinfolie mag folgendes bemerkt werden: An und für sich sollte die dünne Platinfolie bei sonst gleichen Umständen, insbesondere bei gleichem Energieverbrauch des Ofens, keine höhere Temperatur als die dicke Folie annehmen, wie einfache Überlegungen zeigen. Die praktische Erfahrung lehrt aber, daß eine dünne Folie beim Erhitzen des Ofens auf den Palladiumschmelzpunkt trotz größter Vorsicht alsbald durchbrennt, während der Ofen mit dicker Folie eine große Zahl von Erhitzungen auf den Palladiumschmelzpunkt und drüber hinaus aushält. Es ist dies vermutlich darauf zurückzuführen, daß in der dünnen Folie wegen der vorhandenen Ungleichmäßigkeit ihrer Dicke größere Temperaturunterschiede vorkommen als in der dickeren Folie.

Das Halteelement des Strahlers *F* wurde entweder, wie in Fig. 5 dargestellt ist, durch die anivisierte Rückwand hindurchgezogen, so daß sich Lötstelle und Locke im strahlenden Hohlraum befanden oder (Fig. 6) das Element wurde in einer kurzen

Fig. 6.

Trommel hinter der strahlenden Kammer so angeordnet, daß die Lötstelle die strahlende Rückwand von hinten berührte. In letzterem Falle wurde durch besondere Versuche festgestellt, daß der Unterschied zwischen der Anzeige des Halteelementes und der des Durchschmelzelementes von dem Temperaturanstieg genügend unabhängig war. Hierbei wurde so verfahren, daß das Durchschmelzelement ohne Zwischenfügen

eines Golddrahtes oder Palladiumdrahtes zusammengeschmolzen und genau so wie bei den Schmelzpunktbestimmungen eingeführt wurde; es konnten dann die Unterschiede zwischen den Anzeigen von Halte- und Durchschmelzelement an den Schmelzpunkten bei steigender und bei fallender Temperatur gemessen werden. Sowohl beim Palladium als beim Goldschmelzpunkt waren die entstehenden Fehler, wie zwei Versuchsreihen ergaben, zu vernachlässigen.

Um den Temperaturabfall längs der strahlenden Kammer möglichst gering zu machen, wurden alle Trommeln zusammen vor den Schmelzpunktsbestimmungen in dem Heizrohr so verschoben, daß Rückwand und Deckel der strahlenden Kammer, gleich hell erschienen und das Temperaturmaximum demnach etwa in der Mitte der strahlenden Kammer lag. Gegen Ende der Untersuchung wurde das Abgleichen der Temperatur statt durch Verschieben der Trommeln in der Weise bewirkt, daß auf den Strahler eine verschiebbare Hülle aus Asbestpappe gestreift wurde, die etwa $^1/_3$ so lang wie der ganze Strahler war. Durch Verschieben der Hülle ist es möglich, die heißeste Stelle des Ofens in gewissen Grenzen zu verschieben. Dies Verfahren ist auch anwendbar bei gewöhnlichen Strahlern nach Lummer-Kurlbaum, bei denen die strahlende Rückwand nicht verschiebbar ist. Um den Temperaturabfall noch geringer zu machen, wurde auch noch folgender allerdings etwas umständlicher Weg eingeschlagen: Die Heizfolie wurde nicht der ganzen

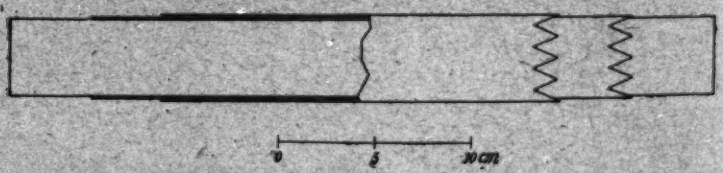
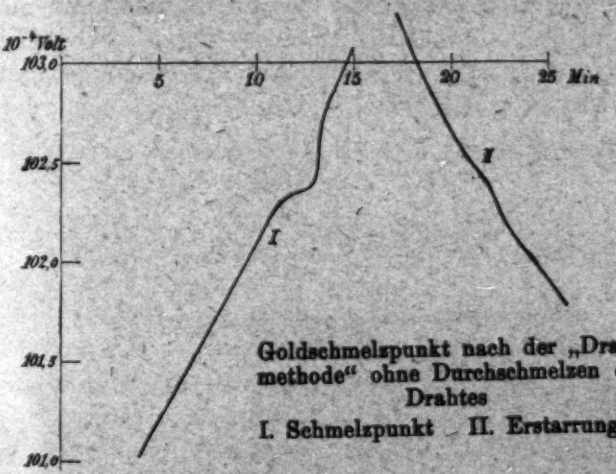


Fig. 7. Strahler *F*, Heizfolie.

Länge nach gleich dick gewählt, sondern aus mehreren Schichten von immer geringerer Länge zusammengesetzt, so daß die Folie nach den beiden Enden zu dünner wurde. Die einzelnen Schichten waren an den Enden ausgezackt (Fig. 7), um plötzliche Temperatursprünge zu vermeiden.

Gegen die Schmelzpunktsbeobachtungen nach der oben angegebenen Methode kann man folgende Bedenken erheben: Der Schmelzdraht liegt zwar bei der Schmelzpunktsbestimmung

in unmittelbarer Nähe der später bei der optischen Beobachtung anvisierten Rückwand. Wenn man aber das Halteelement nach dem Herausziehen des Durchschmelzelements auf den beim Schmelzpunkt gefundenen Wert einstellt, so kann es fraglich erscheinen, ob dann die anvisierte Rückwand dieselbe Temperatur wie bei der Schmelzpunktsbestimmung hat, da nach dem Herausziehen des Durchschmelzelements zwischen der anivisierten Stelle der Rückwand und der Lötstelle des Halteelements andere Temperaturunterschiede vorhanden sein können als vorher. Gegen die Stichhaltigkeit diese Einwandes spricht folgendes: Zwei neue in ihren Anzeigen übereinstimmende Elemente zeigen, wenn das eine als Halteelement, das andere als vorderes Schmelzdrahtelement benutzt wird, genau gleiche Temperatur an. Bei der Schmelzpunktsbestimmung hat also die Rückwand dieselbe Temperatur wie die Lötstelle des Halteelements und dies wird daher auch nach dem Herausziehen des Schmelzdrahtelements der Fall sein, da die Helligkeit der Rückwand nach früher Gesagtem unabhängig von der Größe der strahlenden Öffnung ist. Erwähnt werden mag noch folgende Erweiterung der Schmelzpunktsbestimmung nach der Drahtmethode:



Goldschmelzpunkt nach der „Drahtmethode" ohne Durchschmelzen des Drahtes
I. Schmelzpunkt II. Erstarrungspunkt

Fig. 8.

Wird der Schmelzdraht absichtlich kurz gewählt, so tritt kein Durchschmelzen desselben ein, da die Drähte durch den geschmolzenen Metalltropfen in leitender Verbindung bleiben.

Man kann daher Schmelzpunkt und Erstarrungspunkt wie bei der Tiegelmethode beobachten, so daß man sofort eine Eichung des Halteelements erhält, die als Mittel des Resultats bei steigender und fallender Temperatur unabhängig von dem Temperaturgang ist. Eine der so aufgenommenen Schmelz- und Erstarrungskurven an Schmelzdrähten ist in Fig. 8 wiedergegeben. Beim Palladiumschmelzpunkt versagt indessen die Methode, da Palladium in Luft keinen scharfen Erstarrungspunkt besitzt. Übrigens ist auch der Schmelzpunkt des Palladiums nach der Drahtmethode viel weniger scharf ausgeprägt als der des Goldes.

§ 3. Der Hohlraumstrahler im schmelzenden Metall und die zugehörigen Schmelzpunktbestimmungen.

Die gesamte Anordnung ist aus Fig. 9 zu ersehen. Es ist H der Hohlraumstrahler, M das Metall, in welches derselbe eingetaucht ist, T der Schmelztiegel, Th das Thermoelement.

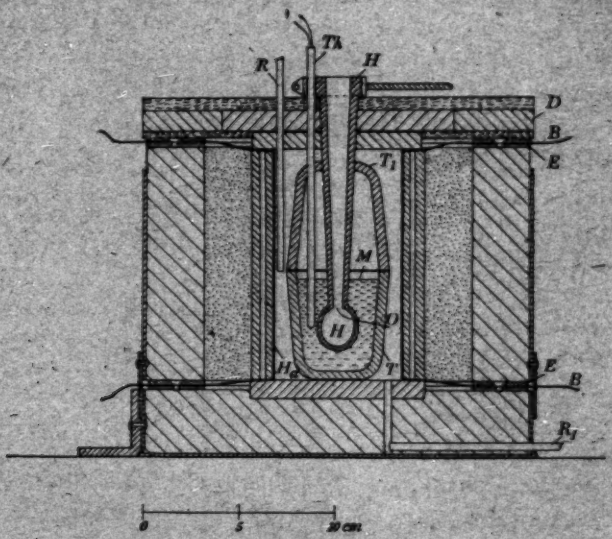


Fig. 9. Schmelzofen.

Zum Schutz der Heizfolie des Ofens gegen ausfließendes Metall bei etwaigem Springen des Schmelztiegels ist dieser im allgemeinen noch in einen zweiten dünnwandigen Tiegel gesetzt worden. An dem Schmelzofen bezeichnet H_a die Heizfolie, E die Elektrodenringe aus Silber, die durch einen Kranz von

Platinbändern mit der Folie H_a und durch je 2 Silberbänder B mit den außenliegenden (nicht gezeichneten) Kupferhalbringen verbunden sind, an welche die Zuführungskabel angeschlossen werden. Der Schmelztiegel ist durch einen umgekehrten Tiegel T_1 mit durchbohrtem Boden zugedeckt und der Schmelzofen durch zwei übereinanderliegende durchbohrte Deckel geschlossen. Durch den Boden des Schmelzofens führt ein Rohr R_1, durch welches Stickstoff in den Ofen eingeleitet werden konnte. Ein zweites Rohr R ist durch die Deckel des Schmelzofens geführt, so daß der durch R_1 zugeführte Stickstoff durch R austreten kann. Die optische Einrichtung, durch welche die Öffnung O des Hohlraumstrahlers auf dem Spalt des Photometers abgebildet wird, ist aus Fig. 2 zu ersehen.

Die Tiegel wurden aus feuchter Marquardtscher Masse auf einer Drehscheibe gedreht, nach dem Trocknen in dem Schmelzofen langsam gebrannt und bis über 1550° C erhitzt. Sie hatten eine Wandstärke von etwa 5 mm. Tiegel mit schwächeren Wänden bekamen bei den Schmelzversuchen mit Palladium Risse. Die Tiegel wurden vom Palladium nicht angegriffen und vertragen mehrfaches Schmelzen und Erstarren des Palladiums gut.

Magnesiatiegel der Kgl. Porzellanmanufaktur in Berlin erwiesen sich als unbrauchbar, da das Palladium sich mit der Tiegelmasse zu einer braunen Masse verband. Tiegel aus Zirkonoxyd zeigten ein ähnliches Verhalten. Auch für den Goldschmelzpunkt wurden Tiegel aus Marquardtscher Masse benutzt.

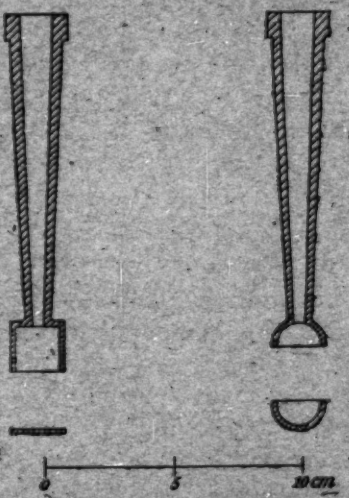


Fig. 10. Hohlraumstrahler.

Die Hohlraumstrahler wurden ebenfalls im Laboratorium aus Marquardtscher Masse hergestellt und zwar in folgender Weise: Aus einem zylindrischen Stück Marquardtscher Masse wurde nach dem Trocknen desselben durch Drehen und Bohren

zunächst Stücke von den in Fig. 10 abgebildeten Formen hergestellt und die halbkugelförmigen oder flachen Deckel nach kräftigem Befeuchten der zu verbindenden Stellen aufgeklebt. Die Körper wurden sodann nach dem Trocknen in einem Röhrenofen bei etwa 1100° C gebrannt und der untere Teil des Hohlraumstrahlers im Schmelzofen noch auf über 1550° C erhitzt. Die so hergestellten Hohlraumstrahler wurden durch das Palladium selbst gar nicht beschädigt. Doch trat nach längerem Gebrauch meist eine Krümmung des außerhalb des Metalls befindlichen konischen Rohransatzes ein, so daß die Hohlraumkörper mehrmals erneuert werden mußten. Für die Kupferschmelzpunkte wurde nicht der in Fig. 9 dargestellte Schmelzofen verwendet, sondern ein Ofen älterer Konstruktion, bei dem die Heizung nicht durch eine Platinfolie, sondern durch ein Platinband erfolgte, das außen auf einen Hohlzylinder Marquardtscher Masse gewickelt und mit Marquardtscher Masse angeheftet ist. Dieser Ofen ist aber nur bis zum Kupferschmelzpunkt brauchbar. Als Schmelztiegel für das Kupfer dienten Graphittiegel; ebenso wurde der Deckel des Tiegels beim Kupferschmelzpunkt aus einem Graphittiegel hergestellt. Um eine Korrosion des Platins durch die Kohlenoxyddämpfe zu vermeiden, wurde um den Graphittiegel ein Hohlzylinder aus Eisenblech gestellt.

Die Schmelzpunktsbestimmungen im Tiegel geschahen in folgender Weise: Nachdem der Tiegel mit Metall beschickt, in den Ofen eingesetzt und bis zum Schmelzen des Metalls erhitzt war, wurde der Hohlraumstrahler mit seitlich daneben in einem unten geschlossenen Rohr aus Marquardtscher Masse in unverrückbarer Stellung angebrachtem Thermoelement (Fig. 9) in das flüssige Metall eingesenkt. Sodann wurde durch geeignete Regelung des Heizraumes wiederholt der Schmelz- und Erstarrungspunkt ein wenig überschritten, während die Anzeige des Thermoelements am Kompensationsapparat in halbminutlichem Abstand gemessen wurde. Der Temperaturgang wurde so bemessen, daß er außerhalb des Schmelzprozesses selbst etwa 1° pro Minute betrug. Das Palladium, bei dem auch der Schmelzpunkt weniger scharf als bei Gold und Kupfer ist, hat in Luft keinen brauchbaren Erstarrungspunkt, da beim Erstarren Spratzen durch Abgabe von Gas auftritt. Deshalb wurde die oben bei Beschreibung des Schmelzofens erwähnte

Stickstoffspülung eingeführt, bei deren Anwendung der Erstarrungspunkt beobachtbar wird. Es trat aber auch dann noch etwa 7° unterhalb des Erstarrungspunktes eine neue Unstetigkeit auf, bei der die Temperatur unter Spratzen des Tiegelinhaltes ähnlich wie beim Erstarrungspunkt noch einmal etwas emporsprang.[1]) In der Regel lag beim Palladium der

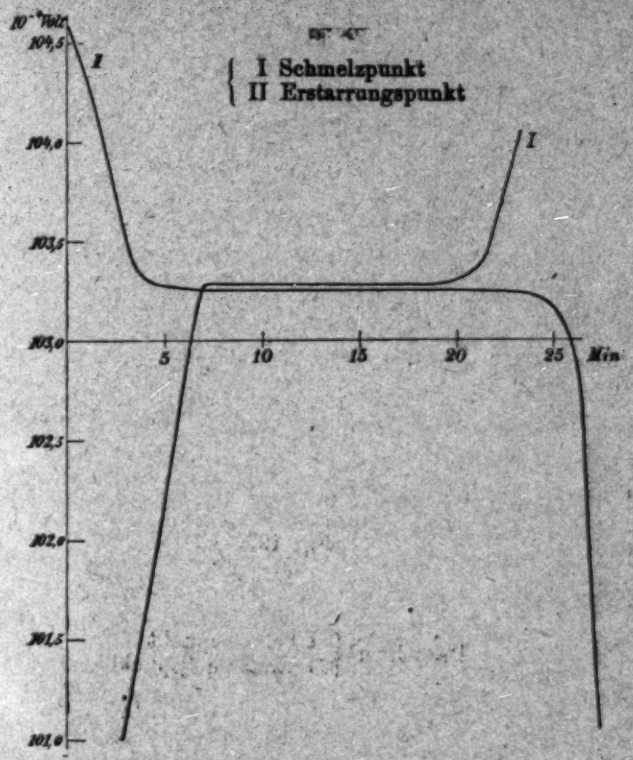


Fig. 11.

aus der Thermokraft bei dem geringsten Temperaturgang ermittelte Erstarrungspunkt etwas (im allgemeinen weniger als 1°) tiefer als der entsprechend bestimmte Schmelzpunkt.

In Figg. 11, 12 und 13 ist je eine Schmelz- und Erstarrungskurve für Gold, Kupfer und Palladium wiedergegeben.

Nachdem Schmelz- und Erstarrungspunkt durch mehrmaliges Auf- und Abwärtsgehen ermittelt war, wurde der

1) Vgl. S. 231.

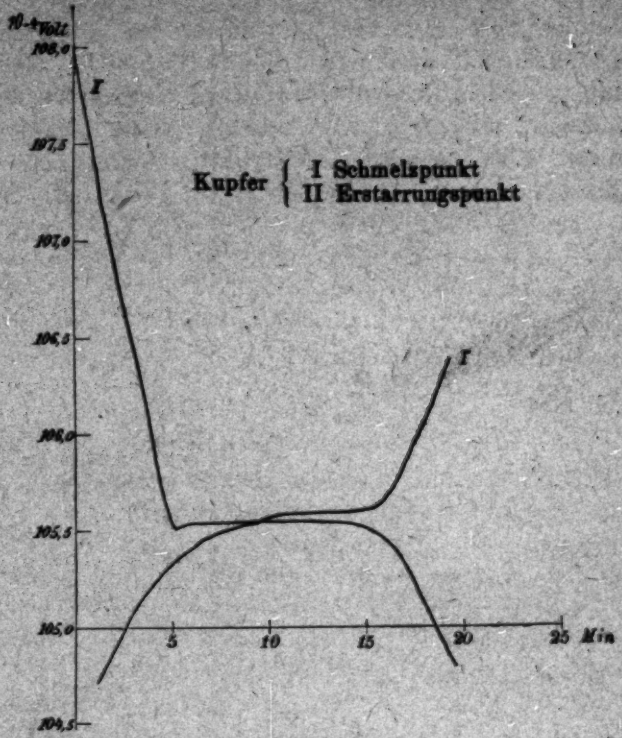

10⁻⁴ Volt
198,0
197,5
197,0
196,5
196,0
195,5
195,0
194,5
I
I
5
10
15
20
25 Min
Kupfer { I Schmelzpunkt
II Erstarrungspunkt

Fig. 12.

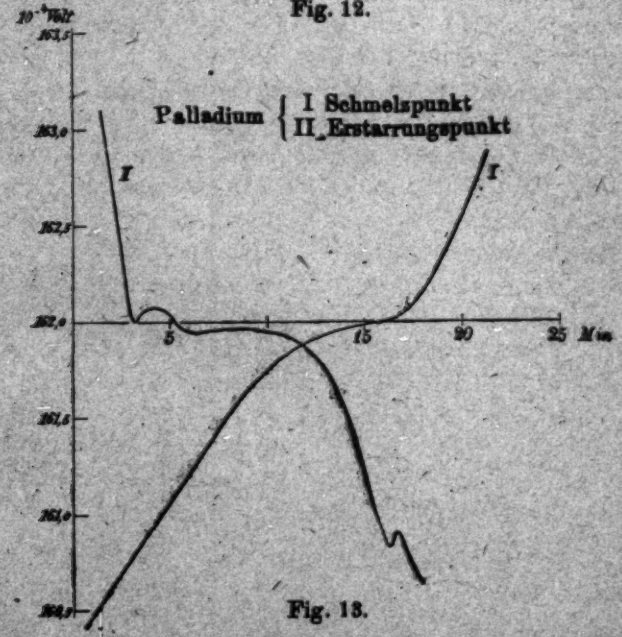

10⁻⁴ Volt
183,5
183,0
182,5
182,0
181,5
181,0
180,5
I
I
5
15
20
25 Min
Palladium { I Schmelzpunkt
II Erstarrungspunkt

Fig. 13.

Strom so reguliert, daß die Temperatur bei dem Mittelwert konstant einstand. Daß dann der Tiegelinhalt teilweise geschmolzen, teilweise erstarrt war, ging daraus hervor, daß eine Änderung des Heizstromes, die sonst genügt hätte, die Temperatur sofort merklich zu verschieben, fast ganz ohne Einfluß blieb. Von einem besonderen Beobachter, der Thermoelement und Heizstrom überwachte, konnte so ohne Mühe das Metall während der ganzen Dauer der optischen Beobachtungen beim Schmelzpunkt erhalten werden. Vor dem Erstarrenlassen des Tiegelinhalts nach Abschluß jeder Versuchsreihe wurde Hohlraumstrahler und Thermoelement aus dem geschmolzenen Metall gehoben.

§ 4. Die verwendeten Metalle.

1. Gold. Für die Schmelzpunktsbeobachtungen wurden zunächst verschiedene Drahtsorten verwendet, die als „chemisch rein" bezogen schon seit längerer Zeit zu solchen Zwecken dienten. Außerdem wurde 1909 von W. C. Heraeus ein „chemisch reiner" Golddraht bezogen und mit jenen älteren Sorten verglichen. Alle diese Sorten zeigen sowohl untereinander wie auch mit einer vom Hrn. Präsidenten Warburg zur Verfügung gestellten Probe des bei seinen Messungen benutzten Drahtes einen bis auf weniger als einen Grad übereinstimmenden Schmelzpunkt. Für die Tiegelschmelzversuche wurde sodann von der Reichsbank etwa 1 kg Feingold zur Verfügung gestellt. Dieses Gold wurde von Hrn. Mylius nach der von ihm angegebenen Äthermethode[1]) gereinigt. Von dem so gewonnenen sehr reinen Gold, dessen Verunreinigungen nicht über $^1/_{1000}$ Proz. betragen, wurden kleine Proben eingeschmolzen und deren Schmelzpunkt nach der Drahtmethode mit dem der zuvor untersuchten Drähte verglichen. Endlich wurden von dem zu den Schmelzpunktsbeobachtungen im Tiegel verwendeten Metall kleine Proben abgeschnitten und in derselben Weise untersucht. In allen Fällen konnte ein Unterschied zwischen den Schmelzpunkten nicht beobachtet werden.

Das von W. C. Heraeus käuflich als „chemisch rein" zu beziehende Gold ist also hinreichend rein, um Schmelzpunkte zu ergeben, die auch mit dem des reinsten darstellbaren Goldes übereinstimmen.

1) F. Mylius, Zeitschr. f. anorg. Chem. 70. S. 203—231. 1911.

2. Palladium. Weniger günstig als beim Gold verhält es sich mit der Reinheit des käuflichen „chemisch reinen" Palladiums. Verschiedene von W. C. Heraeus bezogene Palladiumdrähte zeigen beim Schmelzpunkt Unterschiede bis zu etwa 9,5°. Nach Ansicht der Firma ist dies darauf zurückzuführen, daß von ihr zwar im allgemeinen nur solches Palladium als „chemisch rein" abgegeben wird, das nach mehrmaligen Umlösen von Palladosaminchlorid durch Fällen mit Quecksilbercyanid erhalten wird, gelegentlich aber auch solches, das nur mehrmals als Palladosaminchlorid umgelöst war. Tatsächlich scheinen auch verschiedene nach der ersten Methode gereinigte Metallproben sehr gut übereinstimmende Schmelzpunktswerte zu ergeben, während bei dem nach der zweiten Methode gereinigten Metall, wohl wegen eines geringen Gehaltes an Platin, der Schmelzpunkt zu hoch liegt. Tab. 2 enthält für eine Reihe von Metallproben die Schmelzpunkte ausgedrückt in Mikrovolt eines Platin-Platinrhodiumelements, wie sie beim Messen nach der Drahtmethode gewonnen wurden.

Tabelle 2.

Thermoelektrische Bestimmung von Schmelzpunkten verschiedener Palladiumsorten.

Palladium	Thermokraft eines Pt-Pt-Rh-Elementes beim Schmelzpunkt	Differenz gegen Pd Sept. 1910 in 10^{-6} Volt	in °C
Sept. 1910 Draht	16200 · 10^{-6} Volt	—	—
Dez. 1910 „	16331	131	9,5
I a „	16329	129	9,5
I b „	16247	47	3,5
Day Stäbchen	16201	1	0
Juni 1911 Draht	16205	5	0
Dez. 1911 „	16204	4	0
Dez. 1911 Blech	16201	1	0

Die hierin verzeichneten Sorten vom September 1910, Juni 1911 und Dezember 1911 müssen als hinreichend untereinander übereinstimmend angesehen werden. Dasselbe gilt auch von der mit Day bezeichneten Probe. Es ist das ein Stückchen von 20 × 4,5 × 1,8 mm Größe von dem von Day und Sosman zu ihren Messungen[1]) verwendeten Metall, das,

1) A. L. Day u. R. B. Sosman, a. a. O.

wie schon erwähnt, durch das freundliche Entgegenkommen des Hrn. Direktor Day der Reichsanstalt zur Verfügung gestellt wurde. Zu den Schmelzpunktsbeobachtungen wurden davon mit einer sorgfältig gereinigten stählernen Zange kleine Stückchen von etwa 1 × 1 mm Querschnitt abgekniffen und zwischen die Schenkel eines Thermoelements geschmolzen. Die in der Tabelle verzeichneten Sorten Ia und Ib sind zwei vom Hrn. Präsidenten Warburg zur Verfügung gestellten Proben, von denen die eine offenbar mit der Sorte übereinstimmt, die von Heraeus Dezember 1910 geliefert und unvollständig gereinigt war.

Um das von uns verwendete Palladium noch nach einer anderen Richtung hin zu charakterisieren, wurde seine Thermokraft bestimmt, die es bei 100° und 1000° C und beim Goldschmelzpunkte gegen einen sehr reinen Platindraht zeigt, der für ähnliche Zwecke in der Reichsanstalt aufbewahrt wird. Die Beobachtungen beim Goldschmelzpunkt erfolgten so, daß ein Stückchen Golddraht zwischen Platin- und Palladiumschenkel geschmolzen und die Thermokraft beim Durchschmelzen beobachtet wurde, während gleichzeitig die Temperatur mit einem Platin-Platinrhodiumelement verfolgt wurde. Die Beobachtung ergab beim Goldschmelzpunkte an zwei Stücken des Palladiumdrahtes vom Juni 1911 im Mittel aus mehreren Messungen

$$12491 \cdot 10^{-6}\ \text{V}$$
$$12498 \cdot 10^{-6}\ \text{V}$$

Wie wenig dieser geringe Unterschied für die Schmelzpunktsbeobachtungen in Betracht kommt, geht daraus hervor, daß die beiden Proben vom Draht Dezember 1910 und Juni 1911 bei etwa 1000° C folgende Thermokräfte gegen Palladium aufwiesen:

Dez.	1910	$5570 \cdot 10^{-6}$ V
Juni	1911	$11220 \cdot 10^{-6}$ V

Einer Schmelzpunktserhöhung von etwa 9,5° entspricht also eine Erniedrigung der Thermokraft gegen Platin um über die Hälfte des ganzen Betrages. Die Bestimmung der Thermokraft ist demnach ein vorzügliches Kriterium der Reinheit des Palladiumdrahtes.

3. Kupfer. Für die Beobachtung des Kupferschmelzpunktes wurde reines Elektrolytkupfer von C. A. F. Kahlbaum verwendet.

§ 5. Die Messungen selbst und ihre Ergebnisse für die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold-, Kupfer- und Palladiumschmelzpunkt.

Die eigentlichen Messungen umfaßten folgende Beobachtungsreihen:

1. Die Bestimmung der relativen Helligkeit der schwarzen Strahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt, bei beiden Schmelzpunkten unter Verwendung eines Hohlraumstrahlers nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip.

2. Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Kupferschmelzpunkt, unter Verwendung eines in das flüssige Metall tauchenden Hohlraumstrahlers beim letzteren, und eines Lummer-Kurlbaumschen Strahlers oder eines eintauchenden Hohlraumstrahlers beim ersteren.

3. Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt, unter Verwendung eines eintauchenden Hohlraumstrahlers beim letzteren, und eines Lummer-Kurlbaumschen Strahlers oder eines eintauchenden Hohlraumstrahlers beim ersteren.

1. *Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt* unter Verwendung eines schwarzen Körpers nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip.

Zu den Beobachtungen wurde der schwarze Körper *F* benutzt und zur Kontrolle beim Goldschmelzpunkt der schwarze Körper *B* (vgl. § 2).

Eine erste Versuchsreihe (Beobachtungen 1 bis 9 der Tab. 3) bezweckte, zunächst festzustellen, ob noch ein Einfluß der Änderung von Schwärze und Öffnung beim Lummer-Kurlbaumschen Strahler zu bemerken war. Zu dem Zwecke wurde in dem Strahler *F* der innerste Hohlraum durch Einsetzen von innen weißen oder geschwärzten Trommeln und Abschließen derselben durch Deckel mit spaltförmiger oder runder Öffnung mehrfach verändert und mit dem Königschen Photometer die Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt nur im Rot beobachtet. Zur Ergänzung dienten drei Beobachtungen mit dem Lummer-Brodhunschen Photometer im Rot und Gelb. Bei diesem wurde die Gleichheit der

Gesichtsfelder durch einen zwischen Vergleichslichtquelle und Photometer geschalteten variablen Sektor mit rotierenden Prismen hergestellt. Beim Palladiumschmelzpunkt wurde wie beim Königschen Photometer der $^1/_{100}$ Sektor benutzt. Das Helligkeitsverhältnis ergibt sich so unmittelbar aus den Einstellungen σ_1 und σ_2 des variablen Sektors zu

$$H = 100\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

In einem Falle wurde ein Sektor benutzt, der eine Öffnung von 2×10^0 hatte, also eine Schwächung von $^1/_{18}$ hervorrief (Beobachtung 3). Aus allem ergab sich, daß die Helligkeit der austretenden Strahlung in Übereinstimmung mit den früheren in § 2 beschriebenen Versuchen unabhängig davon war, ob der innerste Hohlraum weiß oder geschwärzt war. Es konnte danach angenommen werden, daß die Strahlung schon bei dem innen weißen Hohlraum hinreichend schwarz ist, und daß dies um so mehr für eine innen geschwärzte Trommel zutrifft, wie sie bei den Hauptversuchen ausschließlich verwendet wurde.

Tabelle 3.

Vorversuche über die relative Helligkeit beim Palladium- und Goldschmelzpunkt.

Beob.	Im Rot			Schwarzer Körper *F*	Photometer		Sektor beim Pd-Schmp.
	σ_1(Au)	σ_2(Pd)	H		Koll. Sp.	Ok. Sp.	
					König-Martens		
1	45,84	42,52	79,3	weiße Trommel Spaltdeckel	0,2 mm		$^1/_{100}$
2	45,92	42,64	79,5	schwarze Trommel Spaltdeckel	0,2		$^1/_{100}$
3	45,92	65,12	78,5	„	0,2		$^1/_{18}$
4	46,51	42,75	76,5	„	0,2		$^1/_{100}$
5	46,22	42,57	77,5	weiße Trommel Spaltdeckel	0,2		$^1/_{100}$
6	46,60	42,37	77,9	„	0,2		$^1/_{100}$
	σ_1(Au)	σ_2(Pd)			Lummer-Brodhun		
7	100,57	79,46	79,0	„	0,1	0,5	$^1/_{100}$
	Im Gelb						
	σ_1'(Au)	σ_2'(Pd)	H′ (H)				
8	76,18	98,63	129,3 (78,7)	weiße Trommel Spaltdeckel	0,1	0,5	$^1/_{100}$
9	78,20	101,31	129,6 (78,9)	schwarze Trommel Deckel m. 7 mm Loch	0,1	0,4	$^1/_{100}$

Erst nach Abschluß dieser Vorversuche wurde die in § 1 erwähnte Verbesserung des Königschen Photometers durch Verkürzung des Okularspalts sowie seine neue Justierung vorgenommen.

Die darauf angestellte Hauptversuchsreihe erstreckte sich auf die drei Farben Rot, Gelb und Grün mit den Wellenlängen 0,6563, 0,5893 und 0,5460 μ. Die Ergebnisse sind in Tab. 4 wiedergegeben. In dieser sind für die drei Farben die Winkeleinstellungen beim Goldschmelzpunkt und beim Palladiumschmelzpunkt und das sich daraus nach Formel 2 von § 1 ergebende Helligkeitsverhältnis eingetragen.

Um die in den verschiedenen Farben gemessenen Helligkeitsverhältnisse miteinander vergleichen zu können, wurde aus den im Gelb und Grün gefundenen Werten H' und H'' nach der Beziehung

$$\lg H = \lg H' \frac{\lambda'}{\lambda} = \lg H'' \frac{\lambda''}{\lambda}$$

der Wert H für $\lambda = 0{,}6563\,\mu$ berechnet. (Eingeklammerte Zahlen unter H in Tabelle 3 und 4.)

Tabelle 4.

Relative Helligkeit beim Palladium- und Goldschmelzpunkt.
Photometer nach König-Martens.
Beobachtungen am schwarzen Körper F, beim Palladiumschmelzpunkt mit $^1/_{100}$ Sektor.

Beob.	Rot			Gelb			Grün		
	a_1 (Au)	a_2 (Pd)	H	a_1' (Au)	a_2' (Pd)	H'	a_1'' (Au)	a_2'' (Pd)	H''
1	46,84	43,63	$79{,}9_1$						
1a			$(80{,}0_2)$	35,70	39,51	$131{,}7_0$			
2	46,48	43,49	$81{,}1_5$						
2a			$(80{,}9_1)$	35,60	39,58	$133{,}3_3$			
2b			$(82{,}4_7)$				27,89	36,89	$201{,}1_1$
3	46,46	43,67	$82{,}2_9$						
3a			$(81{,}7_6)$	35,48	39,62	$134{,}9_5$			
3b			$(83{,}0_8)$				27,83	36,93	$202{,}7_2$
4	46,60	43,63	$81{,}2_7$						
4a			$(82{,}8_1)$	35,39	39,73	$136{,}8_2$			
4b			$(82{,}7_6)$				27,79	36,83	$201{,}9_3$
5	46,50	43,57	$81{,}4_9$						
5a			$(81{,}2_2)$	35,35	39,38	$133{,}9_0$			
5b			$(81{,}5_6)$				27,80	36,59	$198{,}2_7$
6	46,49	43,51	$81{,}2_1$						
6a			$(81{,}5_3)$	35,37	39,46	$134{,}4_6$			
6b			$(80{,}3_7)$				27,95	36,53	$194{,}9_4$

Mittel { im Rot $81{,}2_2$ / im Gelb $(81{,}3_3)$ / im Grün $(82{,}0_4)$ } Gesamtmittel: $81{,}5_3$

Überblickt man die für das Helligkeitsverhältnis im Rot gefundenen Werte, so zeigt sich, daß die bei den Vorversuchen erhaltenen Werte merklich niedriger sind als die bei der Hauptversuchsreihe. Worauf dies zurückzuführen ist, ist nicht ganz klar. Die bessere Justierung des Photometers sollte wohl eine größere Einstellgenauigkeit, nicht aber eine einseitige Verschiebung des Helligkeitsverhältnisses zur Folge haben.

Das Gesamtmittel aller, auch der bei den Vorversuchen gefundenen Werte ergibt das Helligkeitsverhältnis $H = 80{,}5$, das in unserer ersten Publikation von 1912[1]) angegeben wurde. Scheidet man dagegen die bei den Vorversuchen gemessenen Werte aus, so ergibt sich

$$H = 81{,}5.$$

Der Unterschied zwischen den Vorversuchen und der Hauptversuchsreihe war der Hauptgrund, warum wir zu der Tiegelmethode übergingen, die allerdings dann dasselbe Resultat wie die Hauptversuchsreihe mit dem Strahler F ergab.

2. *Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Kupferschmelzpunkt.*

Die ersten Versuche mit dem in schmelzendes Metall tauchenden Hohlraumstrahler wurden mit Kupfer angestellt. So konnten ohne Gefährdung der kostbaren Metalle die nötigen Erfahrungen über die Handhabung der Methode gesammelt und gleichzeitig die Richtigkeit des Ergebnisses an dem Werte kontrolliert werden, der sich für die geringe und gut bekannte Temperaturdifferenz von etwa 20° zwischen dem Kupfer- und Goldschmelzpunkt im Vergleich zu älteren Bestimmungen ergab.

In einer ersten Versuchsreihe wurde die Helligkeit des Strahlers B beim Goldschmelzpunkt verglichen mit der des Hohlraumstrahlers in schmelzendem Kupfer. Zum Schluß wurde der Lummer-Kurlbaumsche Strahler ganz ausgeschaltet und die Helligkeit des Hohlraumstrahlers in schmelzendem Gold unmittelbar mit der in schmelzendem Kupfer verglichen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 wiedergegeben.

---

1) Fr. Hoffmann u. W. Meißner, Zeitschr. f. Instrumkde. **32**. S. 201—202. 1912.

Tabelle 5.

Relative Helligkeit beim Kupfer- und Goldschmelzpunkt.
Photometer nach König-Martens.
B: Beobachtungen am schwarzen Körper *B*.
T: Beobachtungen am Hohlraumstrahler im Tiegel.

Beob.	Rot			Gelb			Grün			δT
	α_1 (Au)	α_2 (Cu)	H	α_1' (Au)	α_2' (Cu)	H'	α_1'' (Au)	α_2'' (Cu)	H''	
	B	*T*								
1	34,74	38,12	1,280							20,5
				B	*T*					
1a			(1,277)	25,39	28,54	1,313				20,3
							B	*T*		
1b			(1,262)				19,74	22,43	1,323	19,3
				B	*T*					
2a			(1,264)	25,50	28,52	1,298				19,5
							B	*T*		
2b			(1,277)				19,60	22,41	1,341	20,3
	B	*T*								
3	34,73	38,02	1,272							20,0
				B	*T*					
3a			(1,282)	25,32	28,52	1,319				20,7
							B	*T*		
3b			(1,277)				19,61	22,43	1,342	20,3
	B	*T*								
4	34,61	38,19	1,299							21,8
				B	*T*					
4a			(1,280)	25,35	28,53	1,317				20,5
							B	*T*		
4b			(1,278)				19,61	22,44	1,343	20,4
				B	*T*					
5a			(1,275)	25,49	28,60	1,311				20,2
	T	*T*								
6	34,95	38,19	1,267							19,7
				T	*T*					
6a			(1,254)	25,64	28,57	1,287				18,8
							T	*T*		
6b			(1,274)				19,72	22,55	1,338	20,1
									Gesamtmittel:	20,2

Die in Gelb und Grün gefundenen Helligkeitsverhältnisse sind wiederum auf Rot umgerechnet worden. Die für die Kritik der Beobachtungen wichtigste Zahl, die Differenz der Schmelztemperatur des Goldes und Kupfers, ist in einer besonderen Spalte hinzugefügt worden. Sie berechnet sich aus dem gefundenen Helligkeitsverhältnis nach der Formel

$$\delta T = T_2 - T_1 = T_1 \cdot T_2 \frac{\lambda}{c} \cdot \ln H,$$

oder mit genügender Annäherung

$$\delta T = \frac{T^2 \lambda}{c} \cdot \ln H,$$

wobei

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 1346^\circ$$

die mittlere Temperatur zwischen Gold- und Kupferschmelzpunkt bedeutet und $c = 14300$ zu setzen ist, wenn λ in μ gemessen wird.

Die Versuche geben für die Differenz der Temperatur des Gold- und Kupferschmelzpunktes auf diesem optischen Wege

$$\delta T = 20{,}2^\circ \text{ C}.$$

Zur Kontrolle wurde noch eine rein thermoelektrische Messung dieser Differenz angeschlossen. Dazu wurde mit einem sorgfältig geeichten Platin-Platinrhodium-Thermoelement die Thermokraft einerseits, beim Schmelzpunkt des Goldes im Strahler F bestimmt und andererseits beim Schmelzpunkt des Kupfers, das im Tiegel unter derselben Bedingung wie bei den optischen Beobachtungen schmolz. Beim Goldschmelzpunkt ergab sich im Mittel aus 5 Beobachtungen die Thermokraft zu $10323{,}6 \cdot 10^{-6}$ V. Beim Kupferschmelzpunkt wurde im Mittel aus je 3 bis 4 Beobachtungen gefunden:

bei 3 cm Eintauchtiefe $10563 \cdot 10^{-6}$ V.
bei 4 cm Eintauchtiefe $10565 \cdot 10^{-6}$ V,

Es ergibt sich also für die Differenz der Thermokraft $241{,}6\ 10^{-6}$ V, und daraus bei einer Empfindlichkeit des Thermoelements von $11{,}81\ 10^{-6}$ V/Grad die Temperaturdifferenz zwischen Gold- und Kupferschmelzpunkt zu

$$T = 20{,}4^\circ.$$

Beide Werte, der optisch und der thermoelektrisch gemessene, stimmt sowohl untereinander wie auch mit den sonst gemessenen aufs beste überein.

3. *Die Bestimmung der relativen Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt* unter Verwendung des Hohlraumstrahlers in schmelzenden Metall.

Wie beim Gold- und Kupferschmelzpunkt wurde auch hier zunächst in einer Versuchsreihe die Helligkeit des Strahlers

B beim Goldschmelzpunkt verglichen mit der Helligkeit des Hohlraumstrahlers im schmelzenden Palladium. In einer zweiten Reihe wurde sodann die Helligkeit des Hohlraumstrahlers im schmelzenden Gold unmittelbar verglichen mit der im schmelzenden Palladium.

Die Ergebnisse sind in Tab. 6 wiedergegeben.

Wie früher ist auch hier das im Gelb und Grün gefundene Helligkeitsverhältnis auf das im Rot umgerechnet. Für diesen Wert ergibt

die erste Reihe im Mittel $H = 81{,}58$
die zweite Reihe im Mittel $H = 81{,}67$.

Nach Abschluß der Beobachtungen stellte sich aber heraus, daß das im Tiegel geschmolzene Palladium eine Erhöhung seines Schmelzpunktes um 0,75° gegenüber dem Palladiumdraht zeigte, mit dem es vor der Versuchsreihe übereinstimmte. Man wird annehmen müssen, daß diese Änderung im wesentlichen die zweite Hälfte der Beobachtungen beeinflußt haben wird. Berücksichtigt man dies, so erhält man für

die zweite Reihe im Mittel: $H = 81{,}47$[1])
das Gesamtmittel wird somit: $H = 81{,}5$

Dieser Wert ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Hauptversuchsreihe am Strahler F. Er ist als Endergebnis der vorliegenden Messungen anzusehen.[2])

§ 6. Folgerungen für die Temperaturskala oberhalb des Goldschmelzpunktes.

Der hier ermittelte Wert für das Verhältnis der Helligkeiten des Hohlraumstrahlers bei den beiden Temperaturen T_1

1) Die geringen Abweichungen der Mittelwerte für die 1. und 2. Reihe gegenüber den in der Zeitschr. f. Instr. **33**, S. 157, 1913 angegebenen Werten sind auf kleine nachträgliche Korrektionen zurückzuführen.

2) Das Helligkeitsverhältnis beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt ist inzwischen von P. Hyde, F. E. Cady und W. C. Forsythe (Astrophys. Journ. **42**, S. 294—304, 1915) neu bestimmt worden. Die Verfasser finden mit dem Holborn-Kurlbaum-Pyrometer bei einer wirksamen Wellenlänge 0,664$_5$ μ dafür 76,9, woraus sich für die von uns benützte Wellenlänge 0,656$_3$ μ der Wert 81,2$_5$ ergibt, der mit dem von uns in Zeitschr. f. Instr. **33**, S. 156, 1913 angegebenen gut übereinstimmt.

Tabelle 6.

Relative Helligkeit beim Palladium- und Goldschmelzpunkt. Photometer nach König-Martens.

B: Beobachtungen am schwarzen Körper *B*.
T: Beobachtungen am Hohlraumstrahler im Tiegel, beim Palladiumschmelzpunkt mit $^1/_{100}$ Sektor.

Beob.	Rot			Gelb			Grün		
	α_1 (Au)	α_2 (Pd)	H	α_1' (Au)	α_2' (Pd)	H'	α_2'' (Au)	α_2'' (Pd)	H''
	B	*T*							
1	35,04	32,34	81,52						
				B	*T*				
1a			(82,31)	25,51	29,09	135,91			
							B	*T*	
1b			(82,08)				19,61	26,74	199,97
	B	*T*							
2	35,29	32,52	81,15						
				B	*T*				
2a			(81,99)	25,68	29,22	135,31			
							B	*T*	
2b			(82,77)				19,70	26,97	201,97
	B	*T*							
3	35,29	32,55	81,36						
				B	*T*				
3a			(81,44)	25,72	29,18	134,4			
							B	*T*	
3b			(80,63)				19,81	26,74	195,7
	B	*T*							
4	35,13	32,50	81,98						
				B	*T*				
4a			(81,81)	25,66	29,17	135,0			
							B	*T*	
4b			(80,02)				19,96	26,83	193,9

Mittel aus Beob. 1 bis 4: im Rot 81,50; im Gelb (81,89); im Grün (81,37) } Gesamtmittel 81,58

	T	*T*							
5	34,90	32,09	80,81						
				T	*T*				
5a			(80,89)	25,45	28,79	133,3			
							T	*T*	
5b			(80,97)				19,63	26,58	196,7
	T	*T*							
6	35,03	32,44	82,20						
				T	*T*				
6a			(81,78)	25,51	29,00	134,92	*T*	*T*	
6b			(81,94)				19,73	26,87	199,57
	T	*T*							
7	34,92	32,49	83,23						
				T	*T*				
7a			(81,34)	25,55	28,97	134,12			
							T	*T*	
7b			(81,83)				19,66	26,76	199,22

Mittel aus Beob. 5 bis 7: im Rot 82,08; im Gelb (81,34); im Grün (81,58) } Gesamtmittel 81,67

und T_2 des Gold- und Palladiumschmelzpunktes kann dazu dienen, die Temperaturskala am Palladiumschmelzpunkte festzulegen, wenn der Wert des Goldschmelzpunktes und die Konstante des Wien-Planckschen Gesetzes als hinreichend gesichert angesehen werden. Legt man für den Goldschmelzpunkt den Wert

$$T_1 = 1336^0, \qquad t_1 = 1063^0\ \text{C}$$

und für die Exponentialkonstante[1]) des Wien-Planckschen Strahlungsgesetzes den Wert

$$c = 14300$$

zugrunde, so ergibt die Formel

$$\ln H = \frac{c}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

für den Palladiumschmelzpunkt den Wert

$$T_2 = 1830^0, \qquad t_2 = 1557^0\ \text{C}.$$

Die Physikalisch-Technische Reichsanstalt hat bei Aufstellung der vom 1. April 1916 an gültigen Temperaturskala[2]) für Temperaturen bis 1100° die neueren gasthermometrischen Beobachtungen zugrunde gelegt, die hinreichend untereinander übereinstimmen. Für die Festlegung der Temperaturen oberhalb 1100° ist den radiometrischen Messungen der Vorzug gegeben worden. Insbesondere soll für die isochromatische Meßmethode der nunmehr ziemlich gesicherte Wert der Wien-Planckschen Strahlungskonstanten $c = 14300$ angenommen werden. Demgemäß ist auch der Palladiumschmelzpunkt in Übereinstimmung mit unseren Messungen zu 1557° angesetzt worden. Von dem durch gasthermometrische Beobachtungen von Day und Sosman gefundenen Wert von 1549,2° weicht dieser um fast 8° ab und es erhebt sich die Frage, wie dieser Unterschied zu erklären ist. Da sich bei einer unmittelbaren Vergleichung des Schmelzpunktes einer von Hrn. Day zur Verfügung gestellten Probe seines im Tiegel geschmolzenen Palladiums und des von uns verwendeten Metalls eine vollkommene Übereinstimmung ergeben hatte, scheidet das Bedenken hinsichtlich des benutzten Materials aus. Anders ver-

1) E. Warburg u. C. Müller, Ann. d. Phys. 48. S. 430. 1915.

2) Ann. d. Phys. 48. S. 1034—1036. 1915; Zeitschr. f. Instr. 36. S. 20—21. 1916.

hält es sich mit der Meßmethode. Day und Sosman schmelzen eine verhältnismäßig kleine Menge (128—210 g) Palladium im Magnesiatiegel in Luft. Nach unseren Erfahrungen wird aber Schmelz- und Erstarrungspunkt des Palladiums unter diesen Umständen vollkommen unscharf, während eine mit Spratzen unter Gasabgabe verknüpfte Unstetigkeit etwa 7° unterhalb des Erstarrungspunktes (also fast genau bei der von Day und Sosman angegebenen Temperatur) allein noch deutlich hervortritt. Die naheliegende Annahme, daß diese Unstetigkeit im Temperaturgange von Day und Sosman als Erstarrungspunkt angesehen wurde, wird man bei so sorgfältigen Beobachtern nur ungern machen; sie scheint aber auch aus folgendem Grunde auszuscheiden: Die Reichsanstalt besitzt ein Thermoelement „*O*" aus Platin-Platinrhodium, dessen Schenkel demselben Drahtvorrat entstammen, wie das von Day und Sosman benutzte. Mit diesem Element ergab sich für den Palladiumschmelzpunkt nach der Schmelzdrahtmethode sehr nahe dieselbe Thermokraft wie von diesen Autoren angegeben wird. Hiernach dürfte die Day und Sosmansche Bestimmung des Palladiumschmelzpunktes im wesentlichen richtig sein. Die Frage, wie sie unter den gegebenen Umständen möglich war, und wie die vorhandene Diskrepanz zu erklären ist, muß demnach offen bleiben.

Zusammenfassung.

Die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt wurde nach zwei verschiedenen Methoden gemessen: Erstens unter Verwendung eines verbesserten Hohlraumstrahlers nach Lummer-Kurlbaumschem Prinzip, wobei die Schmelzpunkte in dem Strahler nach der Drahtmethode bestimmt wurden. Zweitens unter Verwendung von Hohlraumstrahlern, die in das schmelzende Metall eingetaucht waren.

Zur Erprobung der letzteren Methode wurden auch Messungen am Kupferschmelzpunkt angestellt.

Für die Helligkeitsmessungen wurde ein König-Martenssches Spektralphotometer benutzt.

Für die relative Helligkeit beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt ergab sich der Wert 81,5, bei der Wellenlänge 0,6563 μ.

Das verwendete Palladium hat genau denselben Schmelzpunkt wie das von Day und Sosman bei ihrer gasthermometrischen Bestimmung des Palladiumschmelzpunktes verwendete Palladium, was durch direkten Vergleich festgestellt wurde. Die Schmelzpunkte verschiedener Palladiumproben, die nach Angabe der Firma Heraeus nach mehrmaligem Umlösen von Palladosaminchlorid durch Fällen mit Quecksilbercyanid erhalten wurden, stimmten untereinander überein. Der Schmelzpunkt derartig gereinigten Palladiums kann als guter Fixpunkt bezeichnet werden, sofern die Drahtmethode benutzt wird oder Schmelz- und Erstarrungspunkte im Tiegel unter Stickstoffspülung bestimmt werden.

Setzt man nach den Messungen von Warburg und Müller als wahrscheinlichsten Wert für die Strahlungskonstante $c = 14300$ an und für den Goldschmelzpunkt 1063°, so ergibt sich für den Palladiumschmelzpunkt 1557°.

Dieser Wert ist um etwa 8° höher als der von Day und Sosman auf gasthermometrischem Wege gefundene Wert 1549,2°. Worauf diese Differenz zurückzuführen ist, konnte nicht aufgeklärt werden.

(Eingegangen 30. Mai 1919.)

2. Über die Gestalt und die Auflösung des fallenden Flüssigkeitsstrahles; von Robert Scheuermann.

(Bearbeitung der Gießener Dissertation.)

A. Einleitung.

Die Gestalt des Flüssigkeitsstrahles wurde bereits von Newton[1]) in seinen mathematischen Prinzipien zur Ableitung des Torricellischen Theorems benutzt und darin Katarakte genannt. Aber ihre Gleichung ist erst viel später von Weisbach[2]) in seiner Experimentalhydraulik für einen unter Wirkung der Schwerkraft stehenden aus kreisförmiger Öffnung vertikal nach oben springenden Strahl berechnet worden. An einer anderen Stelle[3]) berücksichtigt er bei ihrer Ableitung noch den Einfluß des Luftwiderstandes. Allein diese Gleichung wurde weder von ihm noch später von einem anderen Physiker einer genauen experimentellen Prüfung unterzogen. Die theoretischen Untersuchungen über die Ableitung der Strahlform aus den hydrodynamischen Grundgleichungen, die von Helmholtz, Kirchhoff, Lord Rayleigh u. a. für eine Anzahl besonderer Fälle ausgeführt wurden, haben mit der vorliegenden Arbeit nichts zu tun, da es sich dort um zweidimensionale Flüssigkeitsbewegungen handelt, die nicht unter dem Einfluß der Schwerkraft erfolgen.

Mehrmals ist die Gestalt des Wasserstrahles ausführlich beschrieben[4]), einmal auch gemessen worden und zwar berichtet darüber Viktor von Lang[5]) in einer Arbeit über Reibung zwischen Wasser und Luft. Allein er beschränkt sich darin bloß auf den Strahlteil in der Entfernung von 35—75 cm von der Ausflußöffnung und stellt dafür eine ganz empirisch gefundene Formel auf. In der vorliegenden Arbeit soll dagegen

1) Newton, Phil. nat. math. princ. S. 303. 1714.
2) Weisbach, Die Experimentalhydraulik. S. 51. 1855.
3) Weisbach, Ingenieur u. Maschinenmechanik. 1. S. 758. 1855.
4) Savart, Pogg. Ann. 33. S. 451. 1834; Magnus, Pogg. Ann. 95. S. 1. 1855; 106. S. 1. 1859.
5) von Lang, Wied. Ann. 3. S. 219. 1878.

hauptsächlich der Strahlteil unmittelbar an der Ausflußöffnung bis zu einem Abstand von ungefähr 9 cm von derselben betrachtet werden.

Da der senkrecht nach oben springende Strahl durch die nach seiner Auflösung wieder herabfallenden Tropfen erheblich gestört wird, eignet er sich nicht für die experimentelle Untersuchung der Strahlform. Viel bequemer dagegen ist die Ausmessung des vertikal nach unten fließenden Strahles, der in der Literatur kurz „der fallende Strahl" genannt wird. Auf seine Untersuchung werde ich mich im folgenden daher beschränken.

B. Die Gestalt des fallenden Flüssigkeitsstrahles.

a) Die Gleichung der unter Berücksichtigung der Schwerkraft abgeleiteten Meridiankurve des Strahles.

Ganz entsprechend der Weisbachschen Ableitung ergibt sich für die Meridiankurve des fallenden Strahles die Gleichung:

$$x = \frac{x_0}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gy}{v_0^2}}}, \tag{1}$$

in der v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und x_0 den Radius der Austlußöffnung bedeuten. (Für die Ableitung vgl. auch weiter unten unter b.) Sie läßt sich auch in der nach y aufgelösten Form:

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^4 - 1\right], \tag{2}$$

schreiben, und soll im folgenden kurz die „Weisbachsche Gleichung" genannt werden.

Der Einfluß der Oberflächenspannung auf die Strahlform.

Die experimentellen Untersuchungen, auf die ich später ausführlich eingehen werde, zeigen, daß der wirkliche Strahlquerschnitt an allen Stellen größer ist, als der entsprechende, welchen man aus der Weisbachschen Formel erhält. Die Ursachen für diese Abweichungen sind sicherlich zum großen Teil in der Oberflächenspannung zu suchen, die ja bei der Weisbachschen Ableitung ganz vernachlässigt wird. Diese Annahme wird durch folgenden Versuch bestätigt: Setzt man die Oberflächenspannung dadurch herab, daß man die Strahloberfläche mit einer dünnen Ölschicht sich überziehen läßt,

oder indem man den Strahl durch eine mit Ätherdampf gesättigte Atmosphäre fließen läßt, so nimmt seine Dicke etwas ab, was man daran erkennt, daß der Strahl scheinbar etwas in die Öffnung hineingezogen wird.

Da nach dem Laplaceschen Gesetze der von der Krümmung einer Flüssigkeitsoberfläche herrührende Kohäsionsdruck:

$$p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{3}$$

ist, in der R_1 und R_2 der kleinste und größte Krümmungsradius und α die Kapillarkonstante bedeuten, sollen in folgendem Abschnitt zunächst die Krümmungsverhältnisse der Weisbachschen Strahlform untersucht werden.

Die Krümmungsverhältnisse der Strahloberfläche.

Wir betrachten irgend einen Punkt der Strahlobertläche mit den Koordinaten x, y, z und denken uns durch ihn zwei senkrecht zueinander stehende ebene Schnitte gelegt. Der Einfachheit halber wählen wir einen Normalschnitt so, daß er aus der Strahloberfläche die Meridiankurve ausschneidet. Bezeichnet man dann die Krümmung im Punkte P dieses Normalschnittes mit $1/R_1$ und in dem senkrecht dazu stehenden Schnitt mit $1/R_2$, so beträgt die mittlere Krümmung k der Strahloberfläche im Punkte P:

$$k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Was die Vorzeichenfestsetzung betrifft, soll der Teil der Flächennormalen, welcher von der Strahloberfläche aus betrachtet nach außen gerichtet ist, positiv gerechnet werden und entsprechend R positiv oder negativ sein, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes auf der positiven oder negativen Seite der Flächennormalen liegt.

Für die Krümmung im Meridianschnitt erhält man:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{20\, x_0^4\, c^3\, x^9}{(c^3 x^{10} + 16 x_0^5)^{4/5}},$$

worin der Abkürzung wegen

$$\frac{2g}{v_0^2} = c$$

gesetzt ist. Die Krümmung in dem dazu senkrecht stehenden Normalschnitt beträgt:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\sin \vartheta}{x},$$

worin

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{dy}{dx}$$

ist, oder ausgerechnet:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{-4x_0^4}{x(c^2x^{10} + 16x_0^8)^{1/2}}.$$

Die mittlere Krümmung im Punkte P ist folglich:

$$(4) \qquad h = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{16x_0^4(c^2x^{10} - 4x_0^8)}{x(c^2x^{10} + 16x_0^8)^{3/2}}.$$

Hieraus ersieht man, daß das Vorzeichen für die mittlere Krümmung einzig und allein von dem Ausdruck $c^2x^{10} - 4x_0^8$ abhängt. Sie wird für alle Werte von x, für die $c^2x^{10} > 4x_0^8$ ist, positiv und entsprechend für $c^2x^{10} < 4x_0^8$ negativ. Von besonderem Interesse ist die Lage derjenigen Stelle, für die die mittlere Krümmung Null ist. Dies ist für

$$x = \sqrt[5]{\frac{x_0^4 v_0^2}{g}}$$

der Fall. Der Abstand dieser Stelle von der Ausflußöffnung beträgt:

$$y = \frac{(g x_0)^{4/5} v_0^{2/5} - v_0^2}{2g}.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß der Abstand der betrachteten Stelle von der Ausflußöffnung einerseits von der Größe derselben und andererseits von der Ausflußgeschwindigkeit abhängt. Für die Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = \sqrt{g x_0}$ fällt diese Stelle auf den Rand der Ausflußöffnung und die Strahloberfläche hat dann überall für die mittlere Krümmung dasselbe Vorzeichen. Andererseits hat die betrachtete Stelle für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v_0 = 0{,}3657 \sqrt{g x_0}$$

ihren größten Abstand von der Ausflußöffnung, nämlich:

$$y_{max} = 0{,}2675\, x_0.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die Stelle, an der die mittlere Krümmung der Strahloberfläche ihr Vorzeichen wechselt, sehr nahe an der Ausflußöffnung liegt und höchstens einen Abstand von ihr haben kann, der den 7,5. Teil des Öffnungsdurchmessers beträgt. Für denjenigen Teil der Strahloberfläche, der

zwischen der Ausflußöffnung und der zuletzt betrachteten Stelle von der mittleren Krümmung Null liegt, ist die mittlere Krümmung entsprechend der obigen Vorzeichenfestsetzung positiv, für den ganzen übrigen Teil negativ. Das würde bedeuten, daß in unmittelbarer Nähe der Ausflußöffnung der Kohäsionsdruck nach außen, jenseits der Stelle, wo die mittlere Krümmung Null ist, aber nach innen wirkt. Die Oberflächenspannung müßte also in dem Teil, wo der Kohäsionsdruck nach außen gerichtet ist, den Strahlquerschnitt vergrößern, im übrigen Strahlteile aber, da er dort nach innen wirkt, den Querschnitt verkleinern. Diese Überlegung stimmt aber nicht mit den tatsächlichen Verhältnissen überein, denn die experimentelle Untersuchung zeigt, daß der gemessene Strahlquerschnitt überall größer ist als der nach der Weisbachschen Gleichung berechnete. Das Fehlerhafte bei der letzten Betrachtung scheint mir darin zu liegen, daß das Problem gleichsam als ein statisches aufgefaßt wurde. Wir haben hier nämlich nicht untersucht, welchen Einfluß die Oberflächenspannung auf die Strahlform hat, sondern auf eine gleichsam ruhende Flüssigkeitsmasse, die die Gestalt eines unter der Wirkung der Schwerkraft ausfließenden Flüssigkeitsstrahles hat. Die Oberfläche bildet sich vielmehr fortwährend aus neuer Flüssigkeit. Jede aus der Ausflußöffnung austretende Flüssigkeitsmasse muß eine neue Oberfläche bilden, die sich, während sie den Strahl durchfließt, fortwährend in gesetzmäßiger Weise umbildet. Da die Oberflächenspannung aber jeder Oberflächenvergrößerung entgegen wirkt, kann eine solche nur auf Kosten der kinetischen Energie der Flüssigkeit erfolgen. Diese auf dem Energieprinzip beruhende Überlegung hat vor den Betrachtungen über die Krümmungsverhältnisse den Vorzug, daß sie zu einem verhältnismäßig einfachen Ansatz führt, der den wirklichen Verhältnissen näher kommt.

b) Ableitung der Gleichung für die Strahlform unter Berücksichtigung der Schwerkraft und der Oberflächenspannung.

Es kommt also im zweiten Ansatz darauf an, neben der Schwerkraft noch die Oberflächenspannung in die Formel einzuführen. Dies ermöglicht in einfachster Form folgende von Prof. Dr. König herrührende Überlegung. Nicht die gesamte Arbeit, welche die Schwerkraft leistet, findet ihr Äqui-

valent in dem Zuwachs der lebendigen Kraft der Flüssigkeitsteilchen, sondern ein Teil derselben wird den Kapillarkräften gegenüber zur Vergrößerung der Strahloberfläche verbraucht. Diesen Teil werde ich kurz die Kapillararbeit nennen. Nach dem Energieprinzip besteht folgende Wortgleichung:

Schwerarbeit — Kapillararbeit = Zuwachs der lebendigen Kraft.

Da die Kapillararbeit gleich dem Produkt aus der Kapillarkonstanten α und der Oberflächenvergrößerung dO ist, so besteht folgende Gleichung:

$$mg\,dy = mv\,dv + \alpha\,dO, \tag{5}$$

in der y die Fallstrecke, m die Masse des Volums V und v die Geschwindigkeit bedeuten. Der weiteren Betrachtung lege ich einen ganz niederen Flüssigkeitszylinder von dem Radius x und der Höhe h zugrunde. Ist ferner σ die Dichte, so bestehen folgende Beziehungen:

$$V = \frac{m}{\sigma} \quad \text{und} \quad V = q \cdot h = \pi x^2 h.$$

Die Mantelfläche des Zylinders ist dann:

$$O = 2\pi x h = \frac{2V}{x} = \frac{2m}{\sigma x}$$

und somit die Oberflächenänderung:

$$dO = -\frac{2m}{\sigma x^2}\,dx.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (5) dieser Ableitung ein, berücksichtigt noch die Kontinuitätsbedingung: $v \cdot q = v_0 q_0$ und läßt die y-Achse so mit der Zylinderachse zusammenfallen, daß ihre positive Richtung die Richtung der Flüssigkeitsbewegung angibt, dann erhält man:

$$mg\,dy = -\frac{m v_0^2 q_0^2\,dq}{q^3} - \frac{2m\alpha\,dx}{\sigma x^2}.$$

Wenn man ferner q und q_0 durch x und x_0 ausdrückt und gleichzeitig einige Umformungen vornimmt, bekommt man folgende Differentialgleichung:

$$g\,dy = -\frac{2v_0^2 x_0^4\,dx}{x^5} - \frac{2\alpha}{\sigma x^2}\,dx.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung ist die Gleichung der Meridiankurve des Flüssigkeitsstrahles:

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^4 - 1\right] + \frac{2\alpha}{\sigma x_0 g}\left[\frac{x_0}{x} - 1\right]. \tag{6}$$

Ihre rechte Seite ist eine zweigliederige Summe, deren erstes Glied nichts weiter als die rechte Seite der Weisbachschen Gleichung (2) ist. Das zweite Glied ist im Gegensatz zum ersten von der Ausflußgeschwindigkeit völlig unabhängig und enthält neben der Schwerebeschleunigung und dem Verhältnis x_0/x noch die Kapillarkonstante a und die Dichte σ. Für $a = 0$ verschwindet dieses Glied und die Gleichung geht in die Weisbachsche Gleichung (2) über. Für einen bestimmten x-Wert erhält man die ihm nach dem zweiten Ansatz zugehörige Ordinate y_2, indem man zu der nach der Weisbachschen Gleichung berechneten Ordinate y_1 noch das Glied

$$\frac{2a}{\sigma x_0 g}\left(\frac{x_0}{x} - 1\right),$$

hinzufügt, was die numerische Ausrechnung wesentlich vereinfacht. Aus dieser Betrachtung geht außerdem hervor, daß der aus dem Ansatz mit Berücksichtigung der Oberflächenspannung berechnete Strahlquerschnitt in der Tat größer ist als der nach der Weisbachschen Formel für denselben Abstand von der Ausflußöffnung sich ergebende Querschnitt.

Experimenteller Teil.

a) Versuchsbedingungen.

Bei der Ableitung der Meridiankurvengleichung wurde stillschweigend angenommen, daß die Flüssigkeitsbewegung stationär und die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen längs des ganzen Querschnittes der Ausflußöffnung der Größe und Richtung nach dieselbe sei. Die erste Voraussetzung läßt sich annähernd dadurch erfüllen, daß man ein weites Ausflußgefäß wählt, die zweite durch Anwendung eines Ausflußrohres von kreisförmigem Querschnitt. Die Geschwindigkeitsverteilung in der Ausflußöffnung und in dem oberen Strahlteil wurde mit Sonde und Manometer untersucht. Es zeigte sich, wie zu erwarten war, daß die Geschwindigkeit in der Mitte der Öffnung am größten und nach dem Rande zu zunächst allmählich, in nächster Nähe dagegen rasch abnimmt. Ähnlich ist die Verteilung im oberen Teil des freien Flüssigkeitsstrahles bis zu einem Abstand, der ungefähr dem Durchmesser der Ausflußöffnung gleichkommt, wo die Geschwindigkeitsunterschiede verschwinden. Wenn auch die Messungen mit der

Sonde keine völlig einwandfreien Resultate liefern, so geben sie doch annähernd ein Bild über die Geschwindigkeitsverteilung und im voraus einen Anhaltspunkt, wo eventuell größere Abweichungen zu erwarten sind.

b) Ausflußrohr und Ausflußgeschwindigkeit.

Als Ausflußröhren wurden Messingröhren von 15—80 cm Länge in drei verschiedenen Weiten, nämlich: 0,906, 1,114 und 1,578 cm benutzt. Der Rand der Ausflußöffnung wurde konisch von außen nach innen so abgedreht, daß die lichte Weite unverändert blieb und die Wandstärke höchstens 0,1—0,2 mm betrug.

Die Ausflußgeschwindigkeit wurde ausschließlich aus der Ausflußmenge M in der Zeiteinheit und dem Querschnitt Q der Ausflußöffnung nach der Beziehung:

$$v_m = M/Q$$

bestimmt.

c) Messung der Strahlform.

All die Schwierigkeiten, die die Messung am Strahle selbst mit sich bringt, konnten dadurch umgangen werden, daß die Ausmessung an seiner photographischen Momentaufnahme vorgenommen wurde. Um die Aufnahme (vgl. Fig. 1, S. 255) in genau derselben Größe, die der Strahl selbst hat, zu erhalten, wurde mit parallelem Licht ohne Kamera gearbeitet. Die Versuchsanordnung war folgende: ein Bündel Sonnenstrahlen fiel auf einen ebenen, silberbelegten Spiegel und wurde von da auf einen kleinen Projektionskopf geworfen und von diesem im Brennpunkte vereinigt. An dieser Stelle befand sich eine Blende mit feiner Öffnung und davor ein Momentverschluß. Ein zweiter Projektionskopf mit sehr großer Öffnung wurde so aufgestellt, daß sein Brennpunkt in die Blendenöffnung fiel. Die Strahlen mußten also, nachdem sie den zweiten Projektionskopf passiert hatten, untereinander parallel sein, was außerdem auf die üblichen Arten geprüft wurde. Bei späteren Versuchen wurde an Stelle der Blende eine Funkenstrecke aus Zinkelektroden gesetzt und die Aufnahme mit dem Funken einiger Leidener Flaschen beim Öffnen des Primärstromes eines Induktoriums gemacht. In dieses Parallelstrahlenbündel wurde dann der zu photographierende Flüssigkeitsstrahl und unmittelbar dahinter die photographische

Platte gebracht. Das Photogramm ist also das Schattenbild des Strahles auf der Platte. Daß die Strahlen parallel waren, konnte auch aus folgendem Vorversuch geschlossen werden. Ein kurzes Ausflußrohr, das vorher an verschiedenen Stellen gemessen worden war, wurde auf die angegebene Art aufgenommen. Die Ausmessungen seines Photogrammes stimmten, soweit die Genauigkeit des Kathetometers es zuließ, mit denjenigen des Originals vollständig überein. Daraus konnte ferner der für die folgenden Ausmessungen überaus wichtige Schluß gezogen werden, daß die beim Entwickeln und Fixieren der Platte eintretende Schichtverziehung nur sehr gering ist. Die Ausmessungen wurden mit dem Kathetometer ausgeführt, das anstatt des Fernrohres mit einem schwach vergrößernden Mikroskop versehen worden war.

Vergleich der Versuchsresultate mit den berechneten Werten.

In den folgenden Tabellen werde ich einige der Versuchsreihen wiedergeben, die auf die zuletzt angegebene Weise erhalten wurden. In der ersten Spalte steht der Abstand y von der Ausflußöffnung. Die zweite Kolumne enthält den zu-

Tabelle 1.

Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7{,}881$ cm/sec,
Radius der Ausflußöffnung $x_0 = 0{,}789$ cm.

Abstand v. d. Ausflußöffnung y (in cm)	Berechnet nach Weisbach x_0 (in cm)	Berechnet u. Berücks. d. Oberfl. x_1 (in cm)	gemessen x_2 (in cm)	Abweichung $x_2 - x_0$ (in cm)	Abweichung $x_2 - x_1$ (in cm)
0,0000	0,789	0,789	0,795	0,006	0,006
0,0168	0,709	0,750	0,763	0,054	0,013
0,0434	0,636	0,700	0,729	0,093	0,029
0,0775	0,579	0,650	0,688	0,109	0,038
0,1225	0,531	0,600	0,648	0,117	0,048
0,1846	0,488	0,550	0,599	0,111	0,049
0,2740	0,448	0,500	0,542	0,094	0,042
0,4100	0,408	0,450	0,489	0,081	0,039
0,6313	0,369	0,400	0,425	0,056	0,025
1,0226	0,328	0,350	0,363	0,035	0,013
1,7896	0,286	0,300	0,306	0,020	0,006
2,4645	0,265	0,275	0,277	0,012	0,002
3,5128	0,242	0,250	0,251	0,009	0,001
5,2230	0,220	0,225	0,226	0,006	0,001
8,1810	0,196	0,200	0,201	0,005	0,001

Tabelle 2.

Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = 5{,}643$ cm/sec,
Radius der Ausflußöffnung $x_0 = 0{,}572$ cm.

Abstand v. d. Ausfluß-öffnung y (in cm)	Berechnet nach Weißbach x_0 (in cm)	Berechnet u. Berücks. d. Oberfl. x_1 (in cm)	gemessen x_2 (in cm)	Abweichung $(x_2 - x_0)$ (in cm)	Abweichung $(x_2 - x_1)$ (in cm)
0,0000	0,572	0,572	0,577	0,005	0,005
0,0493	0,404	0,500	0,514	0,110	0,014
0,0972	0,352	0,450	0,471	0,119	0,021
0,1643	0,313	0,400	0,426	0,113	0,026
0,2657	0,280	0,350	0,374	0,094	0,024
0,4357	0,249	0,300	0,316	0,067	0,016
0,7659	0,217	0,250	0,255	0,038	0,005
1,0655	0,200	0,225	0,227	0,027	0,002
1,5567	0,182	0,200	0,202	0,020	0,002
2,4300	0,163	0,175	0,176	0,013	0,001
4,2317	0,142	0,150	0,151	0,009	0,001
6,4191	0,134	0,140	0,140	0,006	0,000

Tabelle 3.

Ausflußgeschwindigkeit $v_0 = 7{,}756$ cm/sec,
Radius der Ausflußöffnung $x_0 = 0{,}453$ cm.

Abstand v. d. Ausfluß-öffnung y (in cm)	berechnet nach Weisbach x_0 (in cm)	berechnet u. Berücks. d. Oberfl. x_1 (in cm)	gemessen x_2 (in cm)	Abweichung $(x_2 - x_0)$ (in cm)	Abweichung $(x_2 - x_1)$ (in cm)
0,0000	0,453	0,453	0,467	0,014	0,014
0,0636	0,342	0,400	0,418	0,076	0,018
0,1528	0,290	0,350	0,375	0,085	0,025
0,2976	0,250	0,300	0,312	0,062	0,012
0,5687	0,215	0,250	0,254	0,039	0,004
1,1950	0,179	0,200	0,201	0,022	0,001
1,8716	0,161	0,175	0,176	0,015	0,001
3,1881	0,142	0,150	0,150	0,008	0,000
4,6360	0,129	0,135	0,135	0,006	0,000
6,1258	0,120	0,125	0,125	0,005	0,000
7,1138	0,116	0,120	0,121	0,005	0,001

gehörigen nach der Weißbachschen Formel berechneten Radius x_0 des Strahles und die dritte den unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung berechneten Radius x_1. In der vierten Spalte dagegen steht der aus dem gemessenen Strahldurchmesser erhaltene Radius x_2. Die letzten beiden

Kolumnen endlich enthalten die Abweichungen dieses Wertes von den berechneten Werten. Der bei der Berechnung von x_1 zugrunde gelegte Wert der Kapillarkonstanten a ist der aus den Methoden der Lamellenspannung und der Steighöhe gefundene Mittelwert für das benutzte destillierte Wasser. Er beträgt $a = 73{,}89$ dyn/cm.

Die Tabellen zeigen, daß die unter Berücksichtigung der Oberflächenspannung berechneten x-Werte den gemessenen bedeutend näher kommen als die nach der Weisbachschen Formel gefundenen Werte. In einer Entfernung von der Ausflußöffnung, die etwas größer ist als der Durchmesser, stimmen jene Werte sehr gut mit den gemessenen Werten überein. Allein in nächster Nähe sind die Abweichungen von den gemessenen Werten sehr bedeutend. Die Ursachen, welche jene Abweichungen bedingen, sind im wesentlichen folgende:

Einmal wird der Strahlquerschnitt unmittelbar an der Ausflußöffnung infolge der Adhäsion der Flüssigkeit an der Rohrwand etwas vergrößert. Dieser von der Adhäsion herrührende Fehler kann wohl durch das konische Abdrehen der Ausflußröhre verkleinert, nie aber, wie aus den vorstehenden Tabellen für $y = 0$ deutlich hervorgeht, völlig beseitigt werden. Die durch die Adhäsion bedingten Abweichungen betragen in den angeführten Beispielen für $y = 0$: 0,006; 0,005 cm und im dritten Fall, wo die Wandstärke weit größer war als in den beiden anderen Fällen, sogar 0,014 cm. Wohl ließe sich dieser Übelstand noch weiter dadurch abschwächen, daß man den Rand der Ausflußöffnung ein wenig einfettet. Weil aber dadurch die Strahloberfläche leicht verunreinigt und die Oberflächenspannung herabgesetzt wird, wurde bei den Versuchen davon Abstand genommen.

Ein weiterer Umstand, der mit als Ursache für diese Abweichungen angeführt werden muß, ist die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung in der Ausflußöffnung selbst und in den Strahlquerschnitten in ihrer Nähe. Daß ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeitsverteilung und diesen Abweichungen besteht, geht schon daraus hervor, daß in einem Abstand von der Ausflußöffnung von der Größe ihres Durchmessers, wo mit Sonde und Manometer keine Ungleichmäßigkeit in der Geschwindigkeitsverteilung mehr festgestellt werden konnte, auch die Abweichungen kleiner werden.

Daß aber die eben angeführten Tatsachen zur Erklärung der beobachteten Abweichungen keineswegs ausreichen, ergibt sich daraus, daß auch bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten, wo die Geschwindigkeitsverteilung ziemlich gleichmäßig ist, trotzdem große Abweichungen eintraten. Zur vollständigen Erklärung dieser Erscheinung muß noch die Wirkung der Massenträgheit herangezogen werden. Die Flüssigkeitsteilchen, die sich in der Ausflußröhre parallel zueinander bewegen, suchen infolge ihrer lebendigen Kraft beim Austritt aus der Ausflußröhre ihre Bewegungsrichtung beizubehalten. Daher rühren zum großen Teil die beträchtlichen Abweichungen. Sie werden um so größer sein, je größer einerseits die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen und andererseits die Richtungsänderung ist, die sie beim Austritt aus der Röhre erfahren. Da aber bei großer Ausflußgeschwindigkeit selbst ein Flüssigkeitsteilchen, das nahe am Rande der Ausflußöffnung austritt, nur wenig seine Bewegungsrichtung zu ändern braucht, so wird trotz seiner großen lebendigen Kraft die durch seine Trägheit bedingte Abweichung nur klein sein. Die beobachteten Abweichungen werden also bei großen Ausflußgeschwindigkeiten größtenteils von der ungleichmäßigen Geschwindigkeitsverteilung herrühren. Betrachten wir dagegen ein entsprechendes Teilchen bei einem Strahl von sehr kleiner Ausflußgeschwindigkeit, so sehen wir, daß es seine Bewegungsrichtung um nahezu 90° ändern muß. Es ist daher klar, daß in diesem Falle selbst eine geringe lebendige Kraft der Flüssigkeitsteilchen genügt, um eine beträchtliche Vergrößerung des Strahlquerschnittes herbeizuführen. Wir haben also hier beim Ausfluß aus Röhren eine Erscheinung kennen gelernt, die geradezu das Gegenstück zur Contractio venae bildet, welche beim Ausfluß aus Öffnungen in dünnwandigen Gefäßen auftritt. Während in dem letzten Fall die von allen Seiten nach der Ausflußöffnung strömenden Flüssigkeitsteilchen je nach der Größe der lebendigen Kraft ihrer seitlichen, d. h. nach der Strahlachse gerichteten Bewegung eine mehr oder minder große Verkleinerung des Strahlquerschnittes bedingen, tritt beim Ausfluß aus Röhren infolge der gleichgerichteten Bewegung der Flüssigkeitsteilchen eine Querschnittsvergrößerung ein. Sie wird noch beträchtlich durch die Adhäsion an der Ausflußöffnung und die Oberflächenspannung der Flüssigkeiten vergrößert.

Vielleicht rührt auch ein Teil der Abweichungen von den größeren Werten der Kapillarkonstanten her, die Lenard[1]) bei frisch gebildeten Oberflächen an schwingenden Tropfen beobachtete. Es ist schade, daß die beträchtlichen Abweichungen in der Nähe der Ausflußöffnung es unmöglich machen, auf der Gestalt der Flüssigkeitsstrahlen eine Methode zur Bestimmung der Kapillarkonstanten zu gründen. Denn gerade auf diesem Wege war zu hoffen, der interessanten Frage nach dem Anfangswerte der Kapillarkonstanten und ihrer zeitlichen Abnahme auf den normalen Wert näher zu kommen.

Aber auch in größerer Entfernung von der Ausflußöffnung bestehen noch kleine Abweichungen, die wohl zum Teil von der inneren Reibung der Flüssigkeit herrühren. Auch dieser Strahlteil eignet sich zur Bestimmung der Kapillarkonstanten deswegen nicht, weil hier bereits Fehler von einem hundertstel Millimeter in der Messung des Strahldurchmessers ganz beträchtlich herausfallende Werte der Kapillarkonstanten hervorrufen.

C. Die Auflösung des Strahles in Tropfen.

In einer gewissen Entfernung, die von der Größe der Ausflußgeschwindigkeit und der Ausflußöffnung abhängt, ändert der Strahl plötzlich Gestalt und Aussehen. Während er in seinem oberen Teil vollständig klar und durchsichtig ist, ist er in dem unteren Teil trüb und unruhig. Anstatt daß sich sein Querschnitt immer mehr verkleinert, nimmt er hier periodisch zu und ab, bis sich der ganze Strahl in eine Reihe einzelner Tropfen auflöst. Durch die Methode der momentanen Beleuchtung hat Savart[2]) und nach ihm Magnus[3]) die Beschaffenheit dieses trüben Strahlteiles untersucht und festgestellt, daß er aus lauter einzelnen Tropfen besteht, die um ihre kugelförmige Gleichgewichtsgestalt Schwingungen ausführen. Den Grund für die Auflösung des Strahles sah man anfangs in der infolge der Schwerkraft mit der Entfernung von der Ausflußöffnung wachsenden Geschwindigkeit. Bei der Untersuchung des kontinuierlichen Strahlteiles bei momentaner Beleuchtung beob-

1) Lenard, Sitzungsberichte der Heidelberger Akad. 1910. 18. Abh.

2) Savart, Ann. d. Chim. et de Phys. 53. S. 337. 1833; Pogg. Ann. 33. S. 451. 1834.

3) Magnus, Pogg. Ann. 95. S. 1. 1855; 106. S. 1. 1859.

achtete Savart auf dem unteren Teil desselben abwechselnd Anschwellungen und Einschnürungen. Diese Erscheinung zeigt auch die dieser Arbeit beigefügte photographische Momentaufnahme Nr. 3, auf die ich erst später ausführlich eingehen werde. Die Ursache, warum diese Anschwellungen das Zerfallen des Strahles bewirken, erkannte Plateau[1]) in der Oberflächenspannung. Seine experimentellen Ergebnisse wurden von Hagen[2]) und später von Lord Rayleigh[3]) auf theoretischem Wege bestätigt. In seiner Abhandlung: „On the Instability of Jets" zeigte Lord Rayleigh in völliger Übereinstimmung mit Plateaus Versuchen, daß unter Wirkung der Oberflächenspannung jede wellenartige Anschwellung, deren Länge größer als der Strahlumfang ist, die Abschnürung eines Tropfens herbeiführt, und ferner, daß sie dem Zerfall des Strahles am günstigsten ist, wenn sie $4^1/_2$ mal so groß wie der Durchmesser des Strahles an der Zerfallsstelle ist.

Zunächst suchte man die Entstehungsursache dieser Anschwellungen auf dem Flüssigkeitsstrahle in der Wirkung der Schwerkraft, dann in den von außen kommenden Erschütterungen, die fortwährend das Ausflußgefäß treffen. Wie Savart gezeigt hat, können diese Erschütterungen auch durch das Auffallen der Tropfen, in die der Strahl zerfällt, selbst bedingt werden. Andere Forscher dagegen suchten in den mannigfachen Bewegungen, die beim Ausfluß im Innern der Flüssigkeit selbst, im Ausflußgefäß sowohl wie im Strahl entstehen, den Ursprung der Störung. So sah Abendroth[4]) in der Contractio venae beim Ausfluß aus dünnwandigen Öffnungen, in der Reibung an der Rohrwand beim Ausfluß aus Ansatzröhren, Lord Rayleigh im Auftreten von Wirbelbewegungen, die infolge der Unebenheiten des Gefäßbodens und der Röhre entstehen, die erste Ursache für die Störungswellen. Durch erschütterungsfreies Aufhängen des Ausflußgefäßes suchte Lord Rayleigh vergeblich die Frage zu entscheiden, ob der Ursprung der Störungen außerhalb oder innerhalb der Flüssigkeit zu suchen wäre.

1) Plateau, Statique des Liquides; Ann. d. Chem. u. Pharm. 78. S. 157. 1851.

2) Hagen, Pogg. Ann. 80. S. 559. 1850.

3) Lord Rayleigh, Proc. Lond. Math. Soc. 10. S. 4. 1878.

4) Abendroth, Über elektrisierte Flüssigkeitsstrahlen. Programm des Gymnasiums zum heilgen Kreuz, Dresden 1874.

Eine hiervon völlig abweichende, aber an und für sich sehr originelle Ansicht entwickelte Buff[1]) in den Liebigschen Annalen. Die Beobachtung des Abtropfens aus einer Röhre zeigte ihm, daß immer nach dem Ablösen eines Tropfens der zurückbleibende zu einer Spitze ausgezogene Teil der Flüssigkeit infolge der Adhäsion und der Oberflächenspannung nach der Öffnung zurückgezogen wird und dann noch eine Anzahl Schwingungen ausführt. „Es scheint mir", so führt Buff aus, „daß die Ablösung der Tropfen beim ausfließenden Strahl in ganz ähnlicher Weise vor sich geht. Nur muß, da die hinteren Wasserteilchen den vorderen fast mit der gleichen Geschwindigkeit folgen oder richtiger, da der Unterschied ihrer Geschwindigkeit nur allmählich zunimmt, eine längere Wassersäule ausgezogen werden, bis endlich das Gewicht des sich bildenden Tropfens den Zusammenhang überwiegt. Durch das vermöge der Kapillarkräfte bewirkte Zurückspringen der im Augenblick, da der Tropfen abreißt, zu einem dünnen Faden ausgezogenen Flüssigkeit gegen ihren nach oben hin dickeren Stamm werden dann die erwähnten wellenartigen Anschwellungen am unteren Ende des klaren Teiles und dadurch die Bildung und Ablösung eines 2. Tropfens usw. herbeigeführt." Wie man sich auch das Entstehen des ersten Tropfens denken mag — die Erklärung, wie das weitere Tropfenspiel durch ihn in Gang gebracht wird, ist in der Tat sehr einleuchtend. Um aber die Richtigkeit dieser Ansicht prüfen zu können, ist ein eingehendes Studium der Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen notwendig.

Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen.

Mathiessen und Ahrendt[2]) haben sich zuerst mit Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen beschäftigt. Ihre Versuche beschränkten sich freilich auf jene Systeme stationärer Wellen, die dann entstehen, wenn man eine Spitze in nicht allzu großer Entfernung von der Ausflußöffnung in die Strahloberfläche eintauchen läßt. Dieses Wellensystem tritt aber auch dann auf, wenn der Strahl gegen einen festen Körper oder in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß fließt.

---

1) Buff, Ann d. Pharm. 78. S. 162. 1851.
2) Ahrendt, Rep. d. Phys. 24. S. 318. 1888.

Die Ahrendtschen Versuche wurden an horizontal ausfließenden Strahlen angestellt, weil auf dem horizontalen Teil derselben sich Wellen von gleicher Länge ausbilden. Die Versuche hatten die Aufgabe, das Thomsonsche Gesetz der Kapillarwellenbewegung experimentell zu prüfen. Nach dieser Theorie ist nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2\pi a}{\lambda}}, \tag{7}$$

worin a die Kapillarkonstante und λ die Wellenlänge bedeuten. Damit sich ein stationäres Wellensystem ausbilden kann, müssen die Wellen der Strömungsrichtung der Flüssigkeit entgegenlaufen und eine solche Länge besitzen, daß ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Ausflußgeschwindigkeit ist. Nach dem Torricellischen Theorem ist dieselbe aber $v = \sqrt{2gh}$, in der h die Druckhöhe bedeutet. Aus der Vereinigung dieser Formel mit der Thomsonschen Gleichung erhält man folgende zwischen Wellenlänge und Druckhöhe bestehende Beziehung:

$$\lambda \cdot h = \frac{\pi a}{g} = \text{const.}$$

Um also die Richtigkeit des Thomsonschen Gesetzes zu prüfen, konnte sich Ahrendt darauf beschränken, die Konstanz des Produktes $\lambda \cdot h$ nachzuweisen und zu zeigen, daß diese Konstante den nach der Theorie sich ergebenden Wert $\pi a/g$ hat. Die Ahrendtschen Versuche bestätigen in der Tat annähernd die Konstanz von $\lambda \cdot h$. Allein die Konstante selbst ist bedeutend größer als der theoretische Wert 0,232. Nach den Versuchen hängt ihre Größe von der Entfernung der eintauchenden Spitze von der Ausflußöffnung ab und beträgt für den Abstand von 1 cm 0,523, von 2 cm 0,369 und von 8 cm 0,293. Die Erklärung dafür suchen Mathiessen und Ahrendt in der Verzögerung, welche die in der Mantelfläche befindlichen Teilchen durch Reibung und Adhäsion an der Wand des Ausflußrohres erleiden.

Allein ein großes Bedenken habe ich gegenüber dieser Arbeit, denn in ihr ist die Thomsonsche Theorie der Kapillarwellen, die nur für ebene Flüssigkeitsoberflächen bei unendlich großer Flüssigkeitstiefe abgeleitet ist, ohne weiteres auf Kapillarwellen auf zylinderförmigen Strahloberflächen übertragen, und

es ist in ihr die so nahe liegende Frage überhaupt nicht erörtert, ob bzw. wie weit das erlaubt ist.

Ableitung einer Gleichung für Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen.

Es handelt sich also für mich darum, eine der Thomsonschen Gleichung entsprechende Beziehung zu erhalten, die streng für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen gültig ist. Zu einer solchen Gleichung gelangt man, wenn man von Betrachtungen ausgeht, die Lord Rayleigh in seiner Abhandlung: „On the Instability of Jets" anstellte. Hier behandelte er die unter Einfluß der Oberflächenspannung erfolgenden Schwingungen eines ruhenden Flüssigkeitszylinders. Streng gilt diese Ableitung aber nur für ringförmig den Strahl umschließende Wellen. Solche Wellen erhält man besonders schön, wenn man sie nicht durch eine in die Flüssigkeitsoberfläche eintauchende Spitze, sondern durch das Auftreffen des Strahles auf irgend ein Hindernis erzeugt. Wie ich schon oben andeutete, ist dieses so entstehende Wellensystem kein stehendes, sondern besteht aus stationären Wellen. Man muß sie nämlich als fortschreitende Wellen auffassen, die sich auf einem Medium fortpflanzen, das sich selbst mit der gleichen Geschwindigkeit aber in der entgegengesetzten Richtung bewegt. Um die mathematische Behandlung diesem Fall möglichst anpassen zu können, soll vorausgesetzt werden, daß sich Kapillarwellen auf einem Flüssigkeitszylinder fortpflanzen, der sich in entgegengesetzter Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit c bewegt. Die Zylinderachse wollen wir als z-Achse und zwei zu ihr und zueinander senkrecht stehende Richtungen als x- und y-Achse wählen.

Nehmen wir an, daß die Kapillarwellen in der positiven Richtung der z-Achse, der Flüssigkeitszylinder dagegen in der entgegengesetzten Richtung sich bewegt, so besitzt das für diese Flüssigkeitsbewegung geltende Geschwindigkeitspotential die Form:

$$\varphi = \psi \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) + c z,$$

In dieser Gleichung ist ψ eine Funktion von r bzw. von x und y, die noch so zu wählen ist, daß die Funktion der Kontinuitätsbedingung:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

genügt.

Dies ist aber dann der Fall, wenn ψ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \psi\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = 0$$

ist. Als Lösung dieser partiellen Differentialgleichung erhält man:

$$\psi = \gamma \cdot J_0\left(\frac{i\,2\pi r}{\lambda}\right),$$

in der γ eine Konstante, r der Radius des Zylinders und $J_0(x)$ das Symbol für die Besselsche Funktion nullter Ordnung:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + - \ldots$$

bedeuten.

Das Geschwindigkeitspotential für die betrachtete Bewegung erhält somit die endgültige Gestalt:

$$\varphi = \gamma \cdot J_0\left(\frac{2\pi i r}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) + cz.$$

Die Gleichung für die durch die Kapillarwellen deformierte Zylinderoberfläche hat die Form:

$$r = a + \eta,$$

worin a der mittlere Radius und η eine Funktion von z und der Zeit t bedeuten. Die Störungsfunktion η erhält man aus der Beziehung:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \left[-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right] \text{ für } r = a \text{ zu: } \eta = -\gamma\,\frac{2\pi i}{\lambda} J_0'\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right) \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi}{\lambda} z\right).$$

Um die Schwingungszahl $n = 2\pi/T$ zu erhalten, kann man nach einer Methode, die im Lehrbuch der Hydrodynamik von Lamb[1]) angegeben ist, von der Oberflächenbedingung:

$$p - p_0 = \alpha\,(1/R_1 + 1/R_2)$$

1) Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsche Ausgabe von Dr. Friedel, B. G. Teubner, 1907, S. 551.

ausgehen, in der $p - p_0$ die Drucke zu beiden Seiten der Strahloberfläche und $1/R_1 + 1/R_2$ ihre mittlere Krümmung an der betrachteten Stelle bedeuten. Nach ihr ergibt sich für die Schwingungszahl n dieselbe Gleichung:

$$n^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{a}{\varrho a^3} \cdot \frac{2\pi i a}{\lambda} \cdot \frac{J_0'\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}{J_0\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)} \left[\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 - 1\right],$$

die Lord Rayleigh für die Schwingungen eines ruhenden Flüssigkeitszylinders auf einem anderen Wege erhalten hat.

Aus dieser Gleichung und der Beziehung $v = n \cdot \lambda$ erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf zylindrischen Strahloberflächen:

$$(8) \qquad v = \sqrt{\frac{i J_0'\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}{J_0\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi a}{\varrho \cdot \lambda}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 a^2}}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß, wie auch zu erwarten war, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine sehr komplizierte Funktion des Zylinderradius ist. Ihre rechte Seite ist ein Produkt aus drei Faktoren, von denen der zweite Faktor von dem Zylinderradius völlig unabhängig und mit der rechten Seite der Thomsonschen Formel identisch ist. Da die ebene Flüssigkeitsoberfläche auch als Zylinderoberfläche von unendlich großem Radius aufgefaßt werden kann, so muß die obige Gleichung für $a = \infty$ als Spezialfall die Thomsonsche Gleichung ergeben. Dies ist auch in der Tat der Fall, denn für $a = \infty$ nehmen die beiden übrigen Faktoren den Wert 1 an. Im ersten Faktor tritt sowohl im Zähler wie im Nenner des Bruches das Verhältnis des Zylinderumfanges zur Wellenlänge als Argument zweier Besselscher Funktionen, im 3. Faktor dagegen der reziproke Wert dieses Verhältnisses aber in einfacher Weise auf. Der Faktor

$$\sqrt{\frac{i \cdot J_0'}{J_0}}$$

ist immer ein echter Bruch, dessen Wert von 0 bis 1 wächst, während das Argument alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft.

Zur Berechnung dieses Ausdruckes wurden die Tafeln für Besselsche Funktionen von rein imaginärem Argument benutzt,

Argument x	$\frac{i \cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)}$	$\sqrt{\frac{i \cdot J_0'(ix)}{J_0(ix)}}$
0,0	0,0000	0,0000
1,0	0,4464	0,6681
2,0	0,6978	0,8353
3,0	0,8100	0,9000
3,6	0,8462	0,9199
4,0	0,8636	0,9293
4,6	0,8832	0,9398
5,0	0,8934	0,9452
5,6	0,9056	0,9517
6,0	0,9124	0,9552
7,0	0,9255	0,9620
8,0	0,9352	0,9671
9,0	0,9428	0,9710
10,0	0,9486	0,9740
11,0	0,9534	0,9764
.	.	.
.	.	.
.	.	.
∞	1,0000	1,0000

die in den Jahnke-Emdeschen[1]) Funktionentafeln zusammengestellt sind. Auch der 3. Faktor

$$\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 a^2}}$$

ist für alle Werte von $\lambda < 2\pi a$ kleiner als 1. Wir sehen somit, daß für alle diese Wellenlängen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kapillarwellen auf Strahloberflächen kleiner ist als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für entsprechend lange Wellen auf ebenen Flüssigkeitsoberflächen. Und zwar ist der Unterschied der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten um so größer, je kleiner das Verhältnis $\frac{2\pi a}{\lambda}$ ist.

Für die Wellenlänge λ, die gleich dem Strahlumfang ist, wird der 3. Faktor Null, in diesem Falle ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = 0$ und zwar ganz unabhängig von der Natur, d. h. der Dichte und der Kapillarkonstanten der Flüssigkeit.

Für alle Wellenlängen aber, welche größer als der Strahlumfang sind, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginär. Wir haben es also hier nicht mehr mit richtigen Wellen zu

1) Jahnke-Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. B. G. Teubner 1909.

tun, da sie keine eigene Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, sondern mit wellenartigen Gebilden, denen die Flüssigkeitsströmung als Transportmittel dient. Sie sind es, die nach der Lord Rayleighschen Theorie das Zerfallen des Strahles in Tropfen bewirken.

Die Ahrendtschen Versuche von diesem Ergebnis aus betrachtet.

Durch Kombination des Thomsonschen Gesetzes mit der Torricellischen Formel erhielt man, wie ich oben ausführlich zeigte, die Beziehung:

$$\lambda \cdot h = \frac{a \cdot \pi}{\varrho \cdot g} = \text{const},$$

die Ahrendt seinen Versuchen zugrunde legte. Benutzt man aber an Stelle des Thomsonschen Gesetzes die oben nach der Lord Rayleighschen Theorie über Strahlschwingungen abgeleitete Gleichung, so findet man, daß das Produkt $\lambda \cdot h$ keineswegs eine Konstante, sondern eine Funktion der Wellenlänge und des Strahlradius ist:

$$\lambda \cdot h = \frac{i J_0'\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)}{J_0\left(\frac{2\pi i a}{\lambda}\right)} \cdot \frac{a\pi}{\varrho \cdot g}\left(1 - \frac{\lambda^2}{4\pi^2 a^2}\right).$$

Nur sobald die Wellenlänge klein gegenüber dem Strahlumfang ist, ist die rechte Seite nicht wesentlich kleiner als die Konstante

$$\frac{a \cdot \pi}{\varrho \cdot g}.$$

Da in der Tat bei den Versuchen von Ahrendt diese Forderung annähernd erfüllt ist (von 25 Angaben ist bei 20 Angaben die Wellenlänge kleiner als der zehnte Teil des Strahlumfanges), so erklärt es sich, daß seine Versuche eine annähernde Konstanz von $\lambda \cdot h$ wenigstens für jede bestimmte Entfernung von der Ausflußöffnung ergeben haben. Wenn man aber die einzelnen Werte, die Ahrendt für dieses Produkt bei einer bestimmten Entfernung gefunden hat, untereinander vergleicht, so sieht man, wie sehr doch die Werte schwanken und wie bedeutend die äußersten Werte z. B. für den Abstand von 1 cm von der Ausflußöffnung 0,490 und 0,550 von dem Mittelwert 0,523 für diese Entfernung abweichen. Diese Schwankung rührt

aber vor allem von den Ungenauigkeiten her, die die Messung der Wellenlänge am Strahle selbst mit sich bringt. Eine genauere Messung derselben hätte sicherlich auch bei den Ahrendtschen Versuchen schon eine, wenn auch geringe Abnahme des Produktes mit wachsender Wellenlänge ergeben müssen, von der aber bei seinen Resultaten nicht die geringste Andeutung zu erkennen ist.

Experimentelle Untersuchung des Gesetzes.

Um schöne ringförmige Kapillarwellen zu erhalten, ließ ich den Strahl gegen ein Hindernis fließen. Diese Erzeugungsweise läßt sich aber nur mit Vorteil bei dem vertikal nach unten fließenden Strahl verwenden. Beim horizontal ausfließenden Strahle stört die von dem Hindernis abfließende Flüssigkeit meist den Strahl selbst und deformiert mehr oder weniger das entstehende Wellensystem. Andererseits gleicht sich auch die Verzögerung, die die Flüssigkeitsteilchen in der Mantelfläche in der Nähe der Ausflußöffnung besitzen, bei dem fallenden Strahl bedeutend schneller aus als bei dem horizontal ausfließenden. Diese beiden Umstände veranlaßten mich, die Versuche an dem fallenden Strahl vorzunehmen, trotzdem ich hier die verschiedenen Längen der einzelnen Wellen mit in Kauf nehmen mußte. Als Hindernis konnte in diesem Falle der Spiegel eines mit Wasser gefüllten Gefäßes dienen. Die Messung der Wellenlänge und der Strahldicke wurden wieder mit dem Kathetometer, aber nicht direkt am Strahle selbst, sondern an der photographischen Momentaufnahme vorgenommen. Die Aufnahme erfolgte ganz in derselben Weise, wie bei der Untersuchung der Strahlform. Nur wurde diesmal ausschließlich als Lichtquelle der zwischen zwei Zinkelektroden übergehende Funke einiger Leidner Flaschen benutzt. Daher konnte die bei längerer Belichtung sehr störende Unschärfe des Bildes, welche durch das unvermeidliche Zittern und Hinundherschwanken des Wellensystems hervorgerufen wird, gänzlich beseitigt werden. Auf jeder photographischen Platte wurden zwei zusammengehörige Aufnahmen gemacht. Zuerst wurde der Strahl mit und unmittelbar darauf ohne Wellensystem aufgenommen (vgl. Fig. 2 und 1).

Die zweite Aufnahme diente zur Geschwindigkeitsbestimmung an den verschiedenen Strahlstellen. Die Geschwindig-

keit wurde nämlich aus der Ausflußmenge und dem an der zweiten Aufnahme gemessenen Strahldurchmesser (bzw. dem daraus berechneten Strahlquerschnitt) an der betrachteten Stelle bestimmt. Dieser Strahldurchmesser stimmte im großen Ganzen mit dem arithmetischen Mittel aus den Durchmessern des durch die Wellen deformierten Strahles für die betrachtete Welle überein. Abweichungen traten nur bei der ersten bzw. auch hier und da bei der zweiten Welle vom Hindernis aus gerechnet ein, die, wie schon Ahrendt bemerkte, länger sind, als sie im Vergleich mit den übrigen sein sollten. Sie wurden daher bei den Messungen fortgelassen. Die Zahl der Wellen, die auf einmal gemessen werden konnte, richtete sich nach der Wellenlänge. Bei den kleinsten Wellen konnten 4 bis 5 Wellen zur Bestimmung der mittleren Wellenlänge, bei den größten dagegen nur eine benutzt werden. In dem letzten Falle wurde die Wellenlänge aus dem arithmetischen Mittel aus 5 verschiedenen Messungen bestimmt.

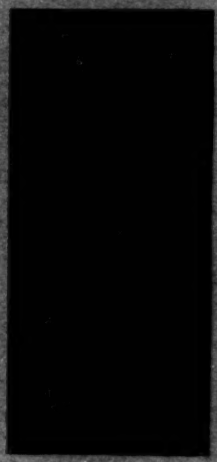


Fig. 1.

Die Versuchsresultate habe ich in folgender Tabelle wiedergegeben. In der ersten Spalte befindet sich die Wellenlänge λ, in der zweiten der mittlere Radius des Strahles der betreffenden Stelle, an der sich die Welle ausbildet. In der dritten Spalte habe ich das Verhältnis des Strahlumfanges zur Wellenlänge angegeben. Die vierte Spalte enthält die nach der Thomsonschen Gleichung aus der Kapillarkonstanten und der Wellenlänge berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_1 der Kapillarwelle, die fünfte, die nach der oben abgeleiteten Gleichung aus den eben angeführten beiden Größen und dem Strahlradius berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit v. In der sechsten Spalte endlich steht die aus der Ausflußmenge und dem betreffenden Strahlquerschnitt

Fig. 2.

sich ergebende mittlere Geschwindigkeit v_m. Da die Verzögerung der Flüssigkeitsteilchen in der Mantelfläche sich bei dem fallenden Strahl sehr schnell ausgleicht und die Wellen in hinreichender Entfernung von der Ausflußöffnung entstehen, so weicht die so bestimmte mittlere Geschwindigkeit nicht wesentlich von der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen in der Mantelfläche ab.

Ein Vergleich der drei letzten Spalten der folgenden Tabelle zeigt uns, um wieviel besser die Fortpflanzungs-

Wellenlänge λ gemessen cm	Strahlradius a gemessen cm	$\frac{2\pi a}{\lambda}$ berechnet	Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach Thomson v_p berechnet cm/sec	Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach Gleichung (8) v berechnet cm/sec	Mittlere Geschwindigkeit v_m gemessen cm/sec
0,074	0,1767	15,00	79,21	77,43	77,07
0,077	0,070	5,71	77,65	72,83	71,40
0,083	0,071	5,37	74,79	69,75	69,46
0,107	0,079	4,64	65,87	60,48	60,89
0,116	0,0855	4,63	63,26	58,08	57,22
0,121	0,1215	6,31	61,93	58,55	58,84
0,129	0,123	5,99	59,99	56,49	56,12
0,131	0,0878	4,21	59,53	53,85	53,33
0,138	0,1245	5,67	58,00	54,37	54,05
0,143	0,090	3,95	56,98	51,16	50,82
0,173	0,095	3,45	51,80	45,36	45,61
0,194	0,2275	7,37	48,92	46,72	46,50
0,202	0,1395	4,34	47,84	43,63	43,62
0,2285	0,127	3,49	45,08	39,57	39,51
0,234	0,2395	6,43	44,54	42,16	41,95
0,243	0,148	3,83	43,71	39,04	38,92
0,388	0,150	2,43	34,59	27,21	28,30

geschwindigkeit, welche nach der für die Kapillarwellen auf Flüssigkeitsstrahlen geltenden Formel berechnet worden ist, mit der mittleren Geschwindigkeit an der betreffenden Strahlstelle übereinstimmt, als die nach dem Thomsonschen Gesetz berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Zugleich bestätigt die Tabelle, daß die Abweichungen von dem Thomsonschen Gesetz um so bedeutender werden, je größer die Wellenlänge verglichen mit dem Strahlumfange ist, d. h. je kleiner das Verhältnis $2\pi r/\lambda$ ist. Leider ist es mir nicht ge-

lungen, auf dem fallenden Strahl Wellen zu erhalten, für die das Verhältnis kleiner als 2,43 ist.

Damit nämlich das Verhältnis $2\pi a/\lambda$ so klein wie möglich wird, muß man den Strahlradius möglichst klein und die Wellenlänge möglichst groß machen. Jenes erreicht man dadurch, daß man den Durchmesser der Ausflußröhre sehr klein wählt, dieses durch Anwenden einer möglichst kleinen Ausflußgeschwindigkeit und durch Heranrücken des Wellensystems an die Ausflußöffnung. Bei der Ausführung treten aber eine Reihe von Schwierigkeiten auf, die in verschiedenen Umständen ihren Grund haben. Einmal muß die Ausflußgeschwindigkeit, bei der gerade noch ein Strahl und nicht ein Abtropfen entsteht, um so größer sein, je kleiner der Durchmesser der Ausflußröhre wird. Ferner verkleinert sich bei dem fallenden Strahl der Querschnitt in der Nähe der Ausflußöffnung, wo die Geschwindigkeit noch klein ist, so stark, daß dieser Strahlteil auch nicht annähernd als zylindrisch angesehen werden kann. Es gilt daher für Wellen, die auf diesem Strahlteil entstehen, nicht mehr streng die obige Formel. Andererseits ist auch die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit und ferner die Messung der Wellenlänge sehr ungenau, da die Wellen in diesem Strahlstück nicht mehr sehr scharf ausgeprägt sind. Diese Ungenauigkeit zeigt sich auch schon bei der letzten Angabe der Tabelle, wo das Verhältnis $2\pi a/\lambda = 2{,}43$ ist.

Bis zu einem gewissen Grade geben diese experimentell gefundenen Resultate auch eine Bestätigung für die Richtigkeit der Lord Rayleighschen Theorie über die Instabilität der Flüssigkeitsstrahlen.

Anwendung dieser Ergebnisse auf die Buffsche Ansicht des Strahlzerfalls.

Nach der Buffschen Ansicht rühren die auf dem unteren Teil des kontinuierlichen Strahlstückes auftretenden wellenartigen Anschwellungen, welche bei Funkenlicht sichtbar werden und das Zerfallen des Strahles bewirken, von den Schwingungen des Strahlendes her, die durch den zuletzt abgerissenen Tropfen veranlaßt werden.

Wellen, die sich von der Auflösungsstelle aus auf dem fallenden Strahle gegen die Flüssigkeitsströmung nach oben bewegen können, müssen eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit

haben, die größer ist als die Strömungsgeschwindigkeit daselbst. Ihre Länge muß also kleiner sein als die der stationären Wellen in der Nähe der Auflösungsstelle. Alle Wellen, deren Wellenlänge größer ist als die der stationären, können gegen die Flüssigkeitsbewegung sich nicht fortpflanzen, sondern werden von ihr mitgenommen. Da die stationären Wellen in der Nähe der betrachteten Stelle bereits mikroskopisch klein sind, können die langen wellenartigen Anschwellungen, die Savart auf dem unteren Strahlstück beobachtete, nicht von den Schwingungen des Strahlendes herrühren. Daß aber kleinere Wellen auf diese Weise zustande kommen können, zeigt die photographische

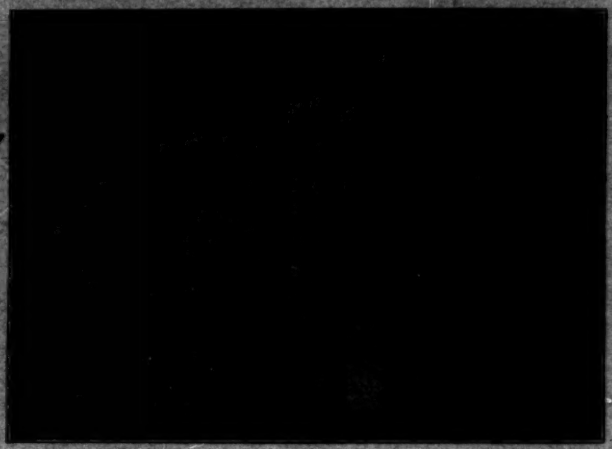


Fig. 8.

Momentaufnahme Fig. 8. Die hierbei verwendete Anordnung unterschied sich von den früher benutzten nur dadurch, daß die photographische Platte, welche an einem Pendel befestigt war, während eines Funkens sich hinter dem Strahle vorbeibewegte. Dadurch wurde eine kinematographische Aufnahme des Auflösungsvorganges erzielt. Bei dem beigefügten Photogramm folgen die einzelnen Aufnahmen zeitlich von links nach rechts aufeinander. Sie zeigen uns auf dem kontinuierlichen Strahlteile die Savartschen Anschwellungen, die von oben nach unten, d. h. mit zunehmender Entfernung von der Ausflußöffnung immer dicker werden. Diese Dickenzunahme erfolgt, wie man aus drei aufeinander folgenden Aufnahmen deutlich erkennt, sehr rasch, besonders wenn man bedenkt, daß

der ganzen Gruppe von Aufnahmen eine Zeitdauer von nicht ganz einer zehntel Sekunde entspricht. Zwei aufeinander folgende Anschwellungen sind durch einen dünnen Flüssigkeitsfaden miteinander verbunden, den Savart als Einschnürung bezeichnet hat. Sobald eine Anschwellung eine bestimmte Größe erlangt hat, löst sie sich in Form eines Tropfens vom Strahle los. Dabei wird der zurückbleibende dünne Flüssigkeitsfaden zu einer feinen Spitze ausgezogen, die dann nach Buff eine Anzahl von Schwingungen ausführt. Dies erkennt man an den Kapillarwellen, mit denen sich dieser Strahlteil in den folgenden Aufnahmen bedeckt hat. Diese Wellen aber führen nicht, wie Buff meinte, das Abreißen des folgenden Tropfens herbei. Das besorgt vielmehr die nächste Anschwellung, welche auf den vorhergehenden Aufnahmen strahlaufwärts bereits erkennbar ist und die mit den Schwingungen des Strahles gar nichts zu tun hat. Gleichzeitig mit dem Lostrennen von dem Flüssigkeitsstrahl löst sie sich auch von den zuletzt betrachteten, mit Wellen bedeckten Flüssigkeitsfaden. Aus der Anschwellung wird ein um seine kugelförmige Gleichgewichtsgestalt schwingender Tropfen. Aus dem Flüssigkeitsfaden entsteht ein einer Perlenkette ähnliches Gebilde, das nach einer Anzahl eigentümlicher Gestaltsveränderungen oft in zwei Tropfen zerfällt.

Diese Beobachtungen stimmen auch mit den oben angestellten theoretischen Erwägungen überein. Die Anschwellungen haben, da ihre Länge größer als der Strahlumfang ist, keine eigene Fortpflanzungsgeschwindigkeit, sondern müssen die Strömung selbst als Transportmittel benutzen. Daraus folgt aber, daß sie nicht, wie Buff annahm, durch die Schwingungen des Strahlendes hervorgerufen, sondern von der Ausflußöffnung her von dem Flüssigkeitsstrahl mitgenommen werden.

(Eingegangen 1. Juni 1919.)

3. *Über die Änderung der Thermokraft und der elektrischen Leitfähigkeit einer Kalium-Natriumlegierung beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand;*

von K. Siebel.

I. Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) wurde durch Untersuchungen an einer Reihe von reinen Metallen und Legierungen die lange umstrittene Frage nach dem thermoelektrischen Verhalten der Metalle beim Schmelzen für die untersuchten Metalle dahin entschieden, daß ohne Ausnahme beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand und umgekehrt eine, wenn auch oft sehr kleine, mehr oder minder sprunghafte Änderung in der Thermospannung auftritt. Es ergab sich, daß diese Unregelmäßigkeiten in drei verschiedene Erscheinungen zerfielen. Trägt man die gemessenen Thermospannungen als Ordinaten und die zugehörigen Temperaturen der variablen Lötstelle des Thermokreises als Abszissen auf, so zeigten sich bei der so hergestellten Thermokurve:

1. In der Umgebung der Temperatur des Schmelzpunktes unstetig zwischen großen und kleinen Werten schwankende Spannungen. Der so entstehende Teil des Kurvenbildes wurde in der früheren Arbeit als „allgemeine Schmelzgebietsfigur" bezeichnet. Dieselbe ist nur eine Folge der beim Wechsel des Aggregatzustandes auftretenden latenten Wärmemengen.

2. Eine Richtungsänderung der Thermokurven am Schmelzpunkte, die sich aber so allmählich vollzieht, daß der Kurvenverlauf stetig zu bleiben scheint.

3. Eine mehr oder minder plötzliche Parallelverschiebung des einen Astes der Thermokurve (wenn man die Ordinate der Spannung am Schmelzpunkte als Trennungslinie der beiden

1) K. Siebel, Dissertation Kiel 1914 und Ann. d. Phys. (4) 45. S. 839. 1914.

Äste betrachtet). Meist ist mit dieser Parallelverschiebung auch noch eine Richtungsänderung verbunden.

Die beiden letzten Erscheinungen sind rein thermoelektrischer Natur. Die nähere Diskussion derselben führte zu dem Resultate, daß im Augenblick des Schmelzens eines Metalles zu der bereits vorhandenen Thermospannung gegen das Vergleichsmetall zwischen noch festem und bereits geschmolzenem Metall eine thermoelektrische Zusatzspannung auftritt, die durchweg vom flüssigen zum festen Teil des Metalles gerichtet ist. Auch wurde damals schon mit Hilfe einer von A. Bernoulli[1]) abgeleiteten Formel diese hypothetische Zusatzspannung berechnet und mit den gemessenen Größen in verhältnismäßig guter Übereinstimmung gefunden. Nach dem betreffenden elektronentheoretischen Ausdruck in der von mir auf feste und flüssige Phase eines Metalles angewandten Form:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{R}{2F}\left(\frac{3}{2}\ln\frac{v_2}{v_1}\right),$$

wo R die Gaskonstante $= 8{,}316 \cdot 10^7$ Erg/Grad, F die Ladung eines Mols $= 9647$ elektromagn. Einh. und V_1 und V_2 die Atomvolumina der beiden im Thermokreis verbundenen Metalle bedeuten, ergibt sich diese Zusatzspannung als Folge der plötzlichen Änderung des Atomvolumens im Augenblicke des Schmelzens der Metalle. Das Zustandekommen jener Spannung wurde also in Verbindung gebracht mit der am Schmelzpunkte eintretenden sprunghaften Volumänderung. Wie J. Koenigsberger[2]) wohl mit Recht bemerkt, ist allerdings die Anwendung jener aus quantentheoretischen Überlegungen abgeleiteten Formel auf ein flüssiges Metall nicht einwandfrei. Am Schluß dieser Arbeit wird gezeigt werden, wie dasselbe Resultat auch ohne Benutzung der Bernouillischen Formel zwanglos herauskommt.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchungen an einer Kalium-Natriumlegierung war einmal der, die oben geschilderten früheren Ergebnisse nochmals zu prüfen, vor allem aber sollte durch eine an demselben Metallmaterial vorgenommene Untersuchung der elektrischen Leitfähigkeit die hierbei zu erwartende sprunghafte Änderung beim Wechsel des Aggregat-

1) A. L. Bernouilli, Verh. d. Deutsch. Physikal. Ges. 13. S. 573. 1911.

2) J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. 47. S. 563. 1915.

zustandes in Vergleich gesetzt werden zu der der Thermokraft. Schließlich noch sollte versucht werden, aus der durch die Untersuchungen von Hagen[1] bekannten Volumänderung beim Schmelzen der Kalium-Natriumlegierung Schlüsse zu ziehen über einen vermuteten Zusammenhang zwischen sprunghafter Volumänderung beim Schmelzen bzw. Erstarren eines Metalles einerseits und sprunghafter Änderung der Thermokraft und Leitfähigkeit beim Wechsel des Aggregatzustandes andererseits.

Benutzt wurde die äußerst interessante Kalium-Natriumlegierung, die die beiden Komponenten Kalium und Natrium in atomarem Verhältnis 39:23 enthält. Hagen findet für diese äußerlich ganz quecksilberähnliche Legierung, die bei Zimmertemperatur flüssig ist, einen Schmelzpunkt von $+4{,}5°$ C und ein spezifisches Gewicht des flüssigen Metalles bei der Schmelztemperatur von 0,8905 und für das feste Metall bei 0° von 0,8994. Nach dem Vorgang von Hagen wurde die Legierung derart hergestellt, daß die gut von anhaftendem Petroleum gereinigten, genau abgewogenen Stücke Kalium und Natrium schnell in einen Kolben gebracht wurden, der darauf evakuiert und zugeschmolzen wurde. Durch langsames Erwärmen wurden die Komponenten zusammengeschmolzen; durch Überfließenlassen der abgekühlten Legierung in einen an den ersten angeblasenen Kolben wurde das Metall von den Schlacken gereinigt, die vollständig im ersten Kolben zurückblieben.

Ungemein schwierig war es, eine Legierung von genau der vorgeschriebenen Zusammensetzung herzustellen, da bei der beschriebenen Art der Bereitung das nicht mehr von Petroleum geschützte Metall immerhin einige Zeit hindurch in Berührung mit der Luft stand, wobei besonders das Kalium angegriffen wurde.[2]) Man tut deshalb bei der Herstellung der Legierung gut, von vornherein etwas mehr Kalium zu nehmen, als vorgeschrieben. Genau die atomare Zusammensetzung zu treffen, ist also ziemlich vom Zufall abhängig. Da es bei der vorliegenden Arbeit hauptsächlich nur darauf ankam, die betreffenden Messungen an ein und derselben Legierung vorzunehmen, wurde nach verschiedenen Versuchen

1) Hagen, Ann. d. Phys. 19. S. 436. 1883.

2) Nach H. Hörig, Ann. d. Phys. 28. S. 371. 1909, kann die fertige Legierung von Merck, Darmstadt, bezogen werden.

eine Komposition gewählt, die als Resultat einer Reihe von Bestimmungen des „Haltepunktes" mittels genau geeichter Kupfer-Konstantan-Thermoelemente einen Schmelzpunkt von + 6,5° C ergab, also 2° C höher als bei der von Hagen benutzten Legierung. Da sehr geringe Änderungen in der Zusammensetzung den Schmelzpunkt erheblich beeinflussen, so kann die Zusammensetzung meiner Legierung nur sehr wenig von der Hagenschen abweichen. Einige nach Beendigung der eigentlichen Messungen angestellten Bestimmungen des spezifischen Gewichts durch Auswägen kleiner Mengen der Legierung, die unter Petroleumschutz in enge, kalibrierte Glasröhrchen hineingesogen wurde, ergaben im Mittel bei 18° ein spezifisches Gewicht von 0,8880, d. h. eine Zahl, die nur einen Unterschied von 0,0009 gegen die Hagensche aufweist. Denn aus der bei + 4,5° gegebenen Dichte = 0,8905 und dem ebenfalls gegebenen kubischen Ausdehnungskoeffizienten der flüssigen Legierung = 0,0002861 ergibt sich die Dichte der Hagenschen Legierung bei 18° C zu 0,8871. Auch hieraus ergibt sich also, daß die Abweichung in der Zusammensetzung zwischen der Hagenschen und der von mir untersuchten Legierung nur geringfügig ist.

II. Messung der Thermospannung zwischen (Kalium-Natrium) und Konstantan und Bestimmung des spezifischen elektrischen Widerstandes.

Versuchsanordnung.

Die zweckmäßige Konstruktion des Gefäßes, das das zu untersuchende Metall aufnehmen sollte, bot große Schwierigkeiten. Wie verschiedene Versuche ergaben, war vor allem für möglichste Beseitigung aller Sauerstoff- und Feuchtigkeitsspuren zu sorgen und auch jede Berührung des Metalles mit Hahnfett zu vermeiden; sonst überzog sich das Metall sofort mit einer Haut, und während es sonst in Kugeln von oft 1 cm Durchmesser zusammenfloß, haftete es jetzt an den Wänden der Glasgefäße und gab in Berührung mit anderen Metallen sehr schlechten Kontakt. Auch erschien eine Untersuchung bei Bedeckung mit Petroleum oder ähnlichen Stoffen nicht zweckmäßig, da bei Erschütterungen ein Abspalten von kleinen Metallkügelchen und ein Vermischen derselben mit Petroleum wegen des geringen Dichteunterschiedes nicht zu vermeiden

war. Es wurde deshalb die in untenstehender Fig. 1 skizzierte Versuchsanordnung gewählt.

In dem Kolben A wurde in der oben geschilderten Weise die Legierung hergestellt und nach B übergegossen. Durch den Hahn H_1 wurde dann das völlig blanke Metall in das Meßgefäß K übergeleitet. Dieses bestand aus einem Rohr von ca. 3 mm innerer Weite, das in der gezeichneten Form gebogen war, um bei Bestimmung der Thermokraft die beiden Seiten in verschiedene Temperaturbäder tauchen zu können. An beiden Enden von K waren zwei weite Glasrohre angesetzt, die durch ein Verbindungsrohr mit dem Hahn H_2 verbunden waren, um den Gasresten beim Einfüllen des Metalles einen Ausgleich zu gestatten. Durch zwei genau passende Vulkanfiberstopfen V_1 und V_2 wurden die Kupfer-Konstantan-Thermoelemente Th

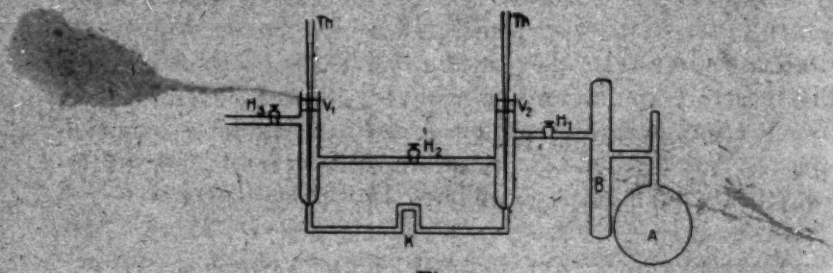


Fig. 1.

eingeführt, die auf diese Weise einen festen Halt bekamen, was bei der Messung der Leitfähigkeit, wo die Drähte der Thermoelemente zur Stromzuführung dienten, unbedingt erforderlich war. Die Stopfen wurden oben gut mit Siegellack vergossen. Die beiden Thermoelemente waren untereinander bis zur Lötstelle durch Glasröhrchen isoliert und diese, um das Eindringen und Hochsteigen des flüssigen Metalles zu verhindern, unten durch einen Tropfen Siegellack verschlossen. Durch den Hahn H_3 wurde die ganze Apparatur vor Überfüllen des Metalles aus B nach K möglichst weit evakuiert.

Die Messung der Thermospannung verlief folgendermaßen:

Die Enden des Meßgefäßes K standen mit je der Hälfte der Metallmasse in einem Petroleum- bzw. Sandbade. Das Petroleumbad wurde durch Kohlendioxydschnee mit Äther auf etwa $-50°$ C gebracht, das Sandbad durch Bunsenbrenner auf konstant $+37{,}9°$ C gehalten. Die Benutzung von Petroleum

bzw. Sandbad war für den Fall des Zerbrechens des Meßgefäßes erforderlich wegen der leichten Brennbarkeit der Legierung bzw. der Explosionsgefahr bei Berührung des Metalles mit sauerstoffhaltigen Flüssigkeitsbädern. Bei ganz langsamer Wiedererwärmung des Petroleumbades bis auf $+40^{\circ}$ C und bei konstant gehaltener Temperatur des Sandbades wurde so die Thermospannung zwischen -40° und $+40^{\circ}$ C bestimmt. Die Temperatur der konstanten Lötstelle schwankte während der etwa 8 Stunden dauernden Messung nur um $2{,}5^{\circ}$ in den äußersten Grenzen. Diese ganz langsamen Schwankungen wurden als Korrektur berücksichtigt.

Die Temperatur der beiden Lötstellen wurde mittels der beiden Kupfer-Konstantan-Thermoelemente *Th* an einem Siemensschen Millivoltmeter (1 Skt. = 0,0001 Volt) bestimmt. Die beiden Konstantandrähte der Thermoelemente dienten gleichzeitig als Vergleichsmetall, gegen das die Thermospannung (KNa)-Konstantan gemessen wurde. Zu diesem Zweck konnten die beiden Thermoelemente ausgeschaltet und an die Enden der Konstantandrähte eine kompensierende bekannte Spannung, die von den Enden eines Nebenschlusses von $^1/_{99}\,\Omega$ abgenommen wurde, angelegt werden. In den Kompensationskreis war ein Siemensscher Drehspulgalvanometer eingeschaltet. Die Empfindlichkeit der ganzen Anordnung war derart, daß $0{,}1 \cdot 10^{-6}$ Volt noch gut gemessen werden konnte.

Die Messung des Widerstandes geschah mit derselben Apparatur und derselben Metallmasse. Gemessen wurde der Widerstand zwischen den beiden Berührungsstellen der Legierung mit den Thermoelementen. Da diese beiden mit Ausnahme der äußersten Spitze gegen das Metall isoliert waren, hatte das Steigen oder Fallen des Metallspiegels durch Temperaturänderung keinen Einfluß auf die Widerstandskapazität des Meßgefäßes. Die Widerstandskapazität war vor Beginn der Messungen durch Bestimmung des Widerstandes einer Quecksilberfüllung zu $172{,}84\ \mathrm{cm}^{-1}$ ermittelt worden. Der Widerstand wurde nach der Abzweigungsmethode bestimmt, indem derselbe konstante Strom (von 0,01138 Amp. in der unten mitgeteilten Messung) nacheinander durch einen Widerstand von $^1/_{99}\,\Omega$ und mittels der Konstantandrähte der Thermoelemente durch die Legierung geleitet wurde. An die Enden des Widerstandes $^1/_{99}\,\Omega$ und mittels der Kupferdrähte der

Thermoelemente an die Enden von K konnte ein Siemens-Drehspulgalvanometer mit 100 Ω Vorschaltwiderstand gelegt werden, das so als Voltmeter diente. Nach dieser Methode konnte eine Änderung des Widerstandes von 10^{-5} Ω noch genau gemessen werden. Das ganze Gefäß K wurde in ein Petroleumbad getaucht, das durch Kohlendioxyd und Äther auf etwa -70° C abgekühlt wurde. Da die dann beginnende Wiedererwärmung des Bades durch geeigneten Wärmeschutz sehr verzögert wurde (Dauer der Erwärmung um 1° war etwa 7 Minuten), so konnte die Badtemperatur mit der des Metalles als übereinstimmend angenommen werden. Durch dauerndes Rühren wurde für gleichmäßige Temperaturverteilung gesorgt. Die Temperatur wurde durch ein Normal-Pentanthermometer gemessen.

Ergebnisse und Folgerungen.

Die Ergebnisse der Messungen sind in den beiden folgenden Tabellen I und II zusammengestellt. Die beiden Kurven geben ein deutliches Bild von dem Verhalten der Thermospannung und des elektrischen Widerstandes in der Umgebung der Schmelztemperatur der untersuchten Legierung.

Tabelle I.

Thermospannung von K/Na gegen Konstantan zwischen -40° und $+40^{\circ}$ C. Temperatur der konstanten Lötstelle $-37{,}9^{\circ}$ C.

Variable Lötstelle $^{\circ}$ C	Thermospannung in 10^{-6} Volt	Variable Lötstelle $^{\circ}$ C	Thermospannung in 10^{-6} Volt
− 39,7	2709	− 6,5	1480
− 34,5	2510	− 4,4	1430
− 25,9	2200	− 2,3	1380
− 25,3	2180	− 1,7	1348
− 23,4	2110	− 0,5	1324
− 22,4	2070	− 0,4	1300
− 20,2	1986	+ 1,6	1260
− 19,1	1938	+ 2,7	1224
− 17,4	1878	+ 3,1	1192
− 15,7	1818	+ 3,3	1178
− 14,9	1778	+ 3,8	1160
− 13,5	1740	+ 4,5	1140
− 12,3	1700	+ 5,2	1122
− 11,7	1664	+ 5,2	1106
− 10,6	1632	+ 5,3	1092
− 9,4	1580	+ 5,3	1080
− 7,1	1520	+ 5,5	1064

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Variable Lötstelle °C	Thermospannung in 10^{-6} Volt	Variable Lötstelle °C	Thermospannung in 10^{-6} Volt
+ 5,7	1054	+ 19,7	660
+ 6,4	1038	+ 22,2	575
+ 7,4	1022	+ 22,2	575
+ 8,0	1004	+ 23,4	520
+ 9,9	982	+ 24,8	470
+ 10,6	938	+ 28,7	336
+ 12,3	882	+ 29,7	284
+ 13,3	854	+ 32,0	220
+ 14,0	838	+ 33,7	150
+ 15,1	800	+ 38,0	0
+ 16,9	761	+ 38,0	0
+ 17,6	720		

Tabelle II.

Elektrischer Widerstand von K/Na zwischen − 60° C und + 40° C
Widerstandskapazität = 172,84 cm^{-1}.

°C	W . 10^{-5}	σ . 10^{-6}	°C	W . 10^{-5}	σ . 10^{-6}
− 59	174	10,3	+ 6	432	25,0
− 56	184	10,6	+ 6	432	25,0
− 54	187	10,8	+ 6,5	448	26,0
− 53	185	10,7	+ 7	470	27,2
− 50	195	11,3	+ 7	472	27,3
− 48	197	11,4	+ 8	549	31,8
− 44	200	11,6	+ 8	565	32,7
− 42	206	11,9	+ 8,5	681	39,4
− 40	207	11,98	+ 9	699	40,4
− 37	214	12,4	+ 9,5	705	40,8
− 35	217	12,6	+ 10	707	40,9
− 30	225	13,0	+ 10	707	40,9
− 25	235	13,6	+ 11	709	40,1
− 20	243	14,1	+ 12	715	41,4
− 18	245	14,2	+ 14	715	41,4
− 15	255	14,8	+ 15	723	41,8
− 10	270	15,6	+ 15	723	41,8
− 9	274	15,9	+ 18	726	42,0
− 7	329	19,0	+ 20	726	42,0
− 6	326	18,9	+ 20	726	42,0
− 5	337	19,5	+ 25	727	42,1
− 2	348	20,1	+ 25	727	42,1
− 0	355	20,5	+ 30	737	42,6
+ 2	370	21,4	+ 30	737	42,6
+ 3	381	22,0	+ 35	746	43,2
+ 4	388	22,5	+ 35	744	43,1
+ 4	388	22,5	+ 40	748	43,3
+ 5	408	23,6	+ 40	748	43,3
+ 5	405	23,4			

1. Die Thermospannung:

Von $-40°$ bis $-10°$ verläuft die Thermospannungskurve fast völlig gradlinig mit einer Neigung, die durch $\frac{dE}{dT} = 37 \cdot 10^{-6}$ V gegeben ist. Bei $-10°$ beginnt die Kurve flacher zu werden. Bei $-3°$ tritt die „Schmelzgebietsfigur" auf mit drei scharfen Knicken. Am Schmelzpunkte selbst tritt ein ziemlich plötzlicher Abfall von etwa $70 \cdot 10^{-6}$ Volt auf, der aber wohl noch als Teil der Schmelzgebietsfigur zu betrachten ist. Nach Überwindung dieser Unstetigkeiten geht die Kurve allmählich wieder in ungefähr die alte Richtung über und hat von $-18°$ ab wieder geradlinigen Verlauf mit einem $dE/dT = 35{,}3 \cdot 10^{-6}$ Volt. Wie nach meinen früheren Erfahrungen zu erwarten war, hat also die sehr weiche und unkristalline Legierung beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand nur die unbedeutende Verkleinerung der Thermokraft von $1{,}7 \cdot 10^{-6}$ Volt erlitten. Außerdem hat der Kurvenast für das flüssige Metall, wie aus Vergleich mit dem punktiert über das Schmelzgebiet hinaus fortgesetzten Ast für das feste Metall zu ersehen ist, eine Parallelverschiebung von etwa $142 \cdot 10^{-6}$ Volt nach oben erlitten. Der Thermostrom fließt an der warmen Lötstelle vom Konstantan zum Kalium-Natrium. Besteht auch bei Kalium-Natrium zwischen festem und flüssigem Metall der oben erwähnte thermoelektrische Zusatzstrom, so müßte also bei den tiefen Temperaturen der variablen Lötstelle unterhalb von $-6{,}5°$ dieser Strom in gleicher Richtung wie der Hauptstrom fließen, also diesen verstärken. Im Augenblicke der Verflüssigung der ganzen Metallmasse hört die Zusatzspannung auf, d. h. dE/dT ist jetzt um den Betrag der Thermokraft zwischen fester und flüssiger Phase verkleinert. Die Parallelverschiebung der beiden Kurvenäste erklärt sich dann zwanglos daraus, daß der Schmelzvorgang sich über das ganze Gebiet von $-10°$ bis $+18°$ erstreckt und daher schon vom Beginn dieses Intervalles an mit langsam abnehmenden dE/dT zu rechnen ist. Durch das kleiner werdende dE/dT wird bewirkt, daß in gleichen Temperaturintervallen die Spannung weniger stark abfällt, als sonst bei einem größeren dE/dT zu erwarten wäre, d. h. die Spannungskurve zeigt für Temperaturen oberhalb des Schmelzpunktes höhere Werte als bei konstantem dE/dT zu erwarten gewesen wäre.

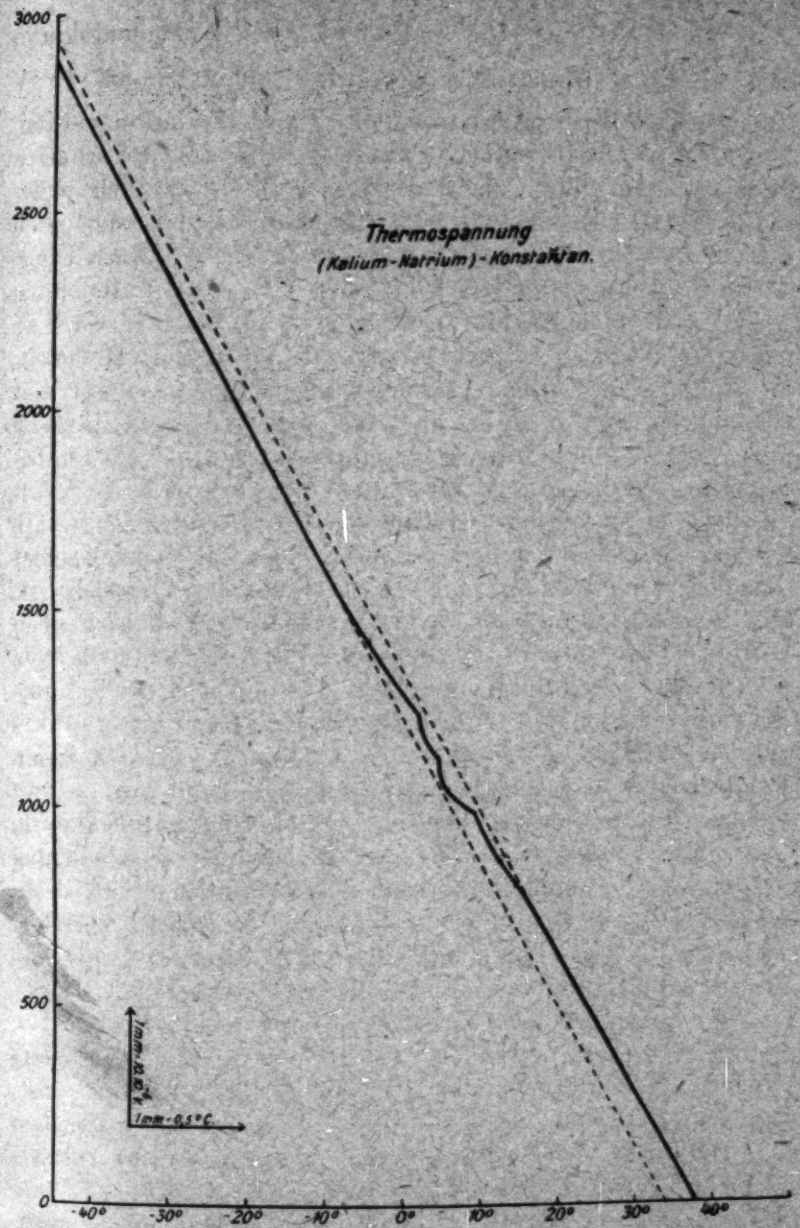

3000
2500
2000
1500
1000
500
0
Thermospannung
(Kalium-Natrium)-Konstantan.
1mm=12,82 μV
1mm=0,5°C
-40°
-30°
-20°
-10°
0°
10°
20°
30°
40°

Fig. 2.

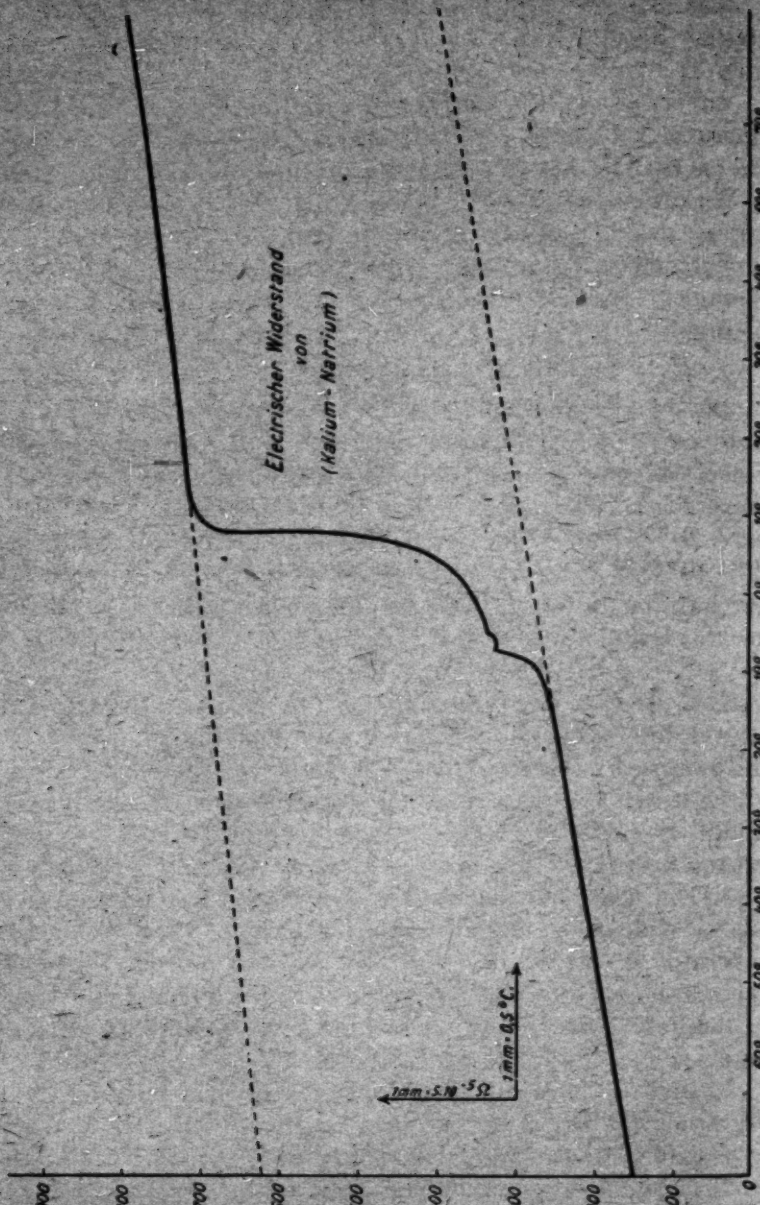

Electrischen Widerstand
von
(Kalium - Natrium)
1mm = 5 N · 5 Ω
1mm = 0,5 °C.
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
70°
60°
50°
40°
30°
20°
10°
0°
10°
20°
30°
40°
50°
60°

Fig. 3.

Aus den Beobachtungen folgt also, daß auch bei der benutzten Kalium-Natriumlegierung eine vom flüssigen zum festen Teil gerichtete Thermokraft besteht.

Zu erwähnen ist noch die Beobachtung Hagens, daß die Legierung sich leicht unterkühlen läßt und zwar bis $-10°$, d. h. bis zu dem Punkte, bis zu dem nach meinen Beobachtungen die Wirkung des Schmelzvorganges sich erstreckt. Auch fand Hagen, daß die Legierung bereits beträchtlich unterhalb der Schmelztemperatur anfängt, eine breiig-körnige Konsistenz zu bekommen. Ähnliches fand ich früher bei einer Wismut-Zinnlegierung.

2. Der elektrische Widerstand:

Der elektrische Widerstand der Kalium-Natriumlegierung wurde zwischen $-60°$ und $+40°$ gemessen. Bis etwa $-20°$ ist der Widerstand eine lineare Temperaturfunktion mit einem Temperaturkoeffizienten $\alpha = 0{,}0097$ zwischen $-60°$ und $-20°$. Bei $-20°$ beginnt dann eine langsame Zunahme von α. Etwa bei $-10°$ tritt nunmehr beim *Widerstand* eine analoge Schmelzfigur auf wie bei der Thermospannung, die sich bis $+2°$ erstreckt, Dann wird α schnell sehr groß, so daß zwischen $+6°$ und $+8°$ ein fast senkrechter Anstieg der Widerstandskurve entsteht. Darauf biegt die Kurve schnell fast rechtwinklig um und verläuft von etwa $18°$ an wieder linear mit einem $\alpha = 0{,}0015$ zwischen $+20°$ und $+40°$ für das flüssige Metall.

Es lassen sich also bei der Messung des elektrischen Widerstandes die analogen Erscheinungen beobachten wie bei der Messung der Thermospannung. Es zeigt sich:

1. Ein unstetiges Schwanken von α zwischen kleinen und großen Werten in unmittelbarer Umgebung der Schmelztemperatur. Ebenso wie bei der Thermospannung kommt diese Erscheinung wohl auf Kosten der Schmelzwärme und der dadurch bewirkten Ungenauigkeit der Temperaturmessung zustande.

2. Eine bedeutende Verschiebung des einen Astes der Widerstandskurve. Diese beträgt z. B. bei $-20°$ $415 \cdot 10^{-5}\ \Omega$; das bedeutet eine Zunahme des Widerstandes um fast 284 Proz.

3. Eine unstetige Änderung von $dW/dT = 17{,}0 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ für das feste Metall auf $dW/dT = 11{,}0 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ für das flüssige Metall, oder eine Änderung von α um 0,0082.

Auch bei der Widerstandsmessung macht sich der Ein-

fluß der Aggregatzustandsänderung schon deutlich bei $-10°$ (ein wenig schon bei $-20°$) und noch bei $+18°$ bemerkbar, in bemerkenswerter Übereinstimmung mit dem Verhalten der Thermospannung. Der spezifische Widerstand, der bei $-60°$ erst $10 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ ist, beträgt bei $+40°$ schon $43{,}3 \cdot 10^{-6}\ \Omega$, statt des bei stetiger Zunahme zu erwartenden Wertes von $20{,}3 \cdot 10^{-6}\ \Omega$.

Zur Kontrolle wurden nach Beendigung der eben beschriebenen Versuche mit derselben Metallmasse noch mehrere Messungen des spezifischen Widerstandes angestellt. Zu diesem Zweck wurden unter Petroleumabschluß einige Glasröhrchen von 1—2 mm Durchmesser durch Ansaugen mit der Legierung gefüllt und der Widerstand dieser Metallfäden nach der Abzweigungsmethode gemessen. Die Widerstandskapazität der benutzten Röhren wurde durch Vergleichsmessungen mit Quecksilber ermittelt. Für eine Temperatur von $+18°$ wurde so ein spezifischer Widerstand der Legierung von $41{,}9 \pm 0{,}3 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ ermittelt, während aus der Hauptmessung sich für $18°$ $\sigma = 42{,}0 \cdot 10^{-6}\ \Omega$ ergeben hatte.

Theoretische Betrachtungen.

Um die beschriebenen Erscheinungen, und zwar zunächst die thermoelektrischen, theoretisch zu deuten, braucht man nur im Sinne der elektronentheoretischen Ableitung des Ausdruckes für die Thermokraft zwischen zwei Metallen anzunehmen, daß dieselbe allein bedingt ist durch die verschiedenen Elektronendichten in den beiden Metallen. Will man speziell die thermoelektrischen Erscheinungen beim Schmelzen des einen Metalles, oder, was nach meiner Auffassung dasselbe ist, will man eine thermoelektrische Potentialdifferenz zwischen fester und flüssiger Phase des gleichen Metalles verständlich machen, so braucht man nur die Annahme einzuführen, daß in einem gegebenen Metalle die von der Masseneinheit getragene Elektronenzahl oder auch die Elektronendichte, d. h. die Anzahl der Elektronen im ccm, direkt proportional ist der augenblicklichen Dichte des Metalles.[1]) Sei also im *festen* Metall bei der Temperatur des Schmelzpunktes die Anzahl der Elektronen N und ändere sich das Volumen eines ccm

1) Vgl. auch J. Koenigsberger, Ann. d. Phys. 47. S. 563. 1915 und K. Siebel, a. a. O., S. 52f.

des Metalles durch den Schmelzvorgang um γ ccm, so ist jetzt im *flüssigen* Metall die Anzahl der Elektronen im ccm nur noch

$$N' = \frac{N}{1+\gamma}.$$

Wir setzen jetzt N und N' in die Formel für die Thermokraft ein:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{2R}{F} \ln \frac{N}{N'},$$

wo R und F die S. 261 genannten Größen bezeichnen. Dieser Ausdruck wird positiv, wenn $N > N'$ ist, d. h. wenn im festen Metall, wie wir ja angenommen hatten, die Zahl der Elektronen im ccm größer ist als im flüssigen Metall. Einem solchen Elektronenüberschuß im festen Metall entspricht aber ein elektrischer Strom, der an der Berührungsstelle von fest und flüssig vom flüssigen zum festen Teil des Metalles fließt.

Es resultiert der auswertbare Ausdruck:

$$\frac{dE}{dT} = \frac{2R}{F} \ln (1+\gamma)$$

Für die Legierung Kalium-Natrium fand Hagen, daß 1 g des festen Metalles bei 0° ein Volumen von 1,1120 ccm hat und 1 g des flüssigen Metalles bei 4,5° ein Volumen von 1,1229. Der Unterschied dieser beiden Werte kann wohl angenähert als die Volumzunahme von 1 g beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand angesehen werden, da die Volumzunahme von 1 ccm des festen Metalles bei einer Temperaturerhöhung von 0° auf 4,5° weniger als 0,001 beträgt, wenn nach Hagen der Ausdehnungskoeffizient des festen Metalles kleiner als der für das flüssige Metall (= 0,0002861) genommen wird. Daraus berechnet sich die Volumzunahme eines ccm beim Schmelzen zu

$$\gamma = 0{,}0098 \text{ ccm.}^{1})$$

Setzt man diesen Wert für γ in obiger Formel ein, so ergibt sich: dE/dT, oder die thermoelektrische Spannung pro Grad zwischen festem und flüssigem Metall zu $1{,}68 \cdot 10^{-6}$ Volt.

Der aus dieser Potentialdifferenz resultierende Strom fließt vom flüssigen zum festen Teil des Metalles. Beobachtet

1) Bei Benutzung des zweiten von Hagen angegebenen Wertes für das Volumen von 1 g bei 0° = 1,1185 ccm würde sich $\gamma = 0{,}0037$ ergeben. An der Größenordnung des Resultates, und auf dies allein kommt es an, würde sich dadurch nichts ändern.

wurde in der Tat eine Verkleinerung der Thermokraft im Augenblick des Schmelzens $= 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ Volt und diese Verkleinerung wurde als plötzliches Aufhören einer Spannung zwischen „fest" und „flüssig" angesprochen, die vom flüssigen zum festen Metall gerichtet ist.

Die eben durchgeführte Betrachtung steht also in qualitativer und bei Berücksichtigung der mannigfachen Störungen der Thermospannung beim Schmelzen auch in überraschend guter quantitativer Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Da bei den meisten wenig kristallinen Metallen, also ausgenommen besonders Wismut und Antimon, der Volumsprung beim Schmelzen annähernd dieselbe Größenordnung hat wie bei Kalium-Natrium, so ist die von mir früher[1]) beobachtete Änderung von dE/dT beim Schmelzen verschiedener Metalle (z. B. Hg $= 2 \cdot 10^{-6}$ Volt, Sn $= 2{,}0 \cdot 10^{-6}$ Volt, Pb $= 5 \cdot 10^{-6}$ Volt usw.) zwanglos aus der eben formulierten Theorie zu erklären. Bei der Winzigkeit der Effekte ist allerdings nicht immer völlige quantitative Übereinstimmung mit der Berechnung zu erwarten, zumal sicher auch noch sekundäre Beeinflussung durch kristalline Struktur usw. vorhanden ist.

Es sei noch bemerkt, daß in analoger Weise wie beim Wechsel des Aggregatzustandes auch bei alleiniger Ausdehnung der Metalle bei Temperaturerhöhung aus der durch den kubischen Ausdehnungskoeffizienten der beiden Metalle gegebenen Abnahme der Elektronendichten die Änderung von dE/dT mit der Temperatur, also $\frac{d^2E}{dT^2}$ sich wird berechnen lassen.

Etwas weniger einfach gestaltet sich eine theoretische Deutung des Sprunges des spezifischen Widerstandes eines Metalles beim Wechsel des Aggregatzustandes. Die elektronentheoretische Formel für den spezifischen Widerstand σ ist:

$$\sigma = \frac{2mv}{ne^2l}, \quad \text{also} \quad \sigma \sim \frac{v}{nl}.$$

Das Verhältnis von σ fest zu σ flüssig, in der Folge als σ und σ' bezeichnet, wird also $\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{n'v'l'}{nvl}$, wo die Größen n die Anzahl der Elektronen im ccm, v die mittleren Geschwindigkeiten und l die freien mittleren Weglängen der Elektronen bedeuten, und die gestrichenen Größen für das flüssige Metall gelten.

1) A. a. O.

Um σ/σ' zu berechnen, müssen also die Verhältnisse n'/n, v/v' und l'/l bestimmt werden.

1. n'/n ergab sich bereits zu $\frac{1}{1+\gamma}$.

2. Nach einem Satz der kinetischen Gastheorie ist bei nicht zu großer Dichte die freie Weglänge umgekehrt proportional der Zahl der sich bewegenden Teilchen in der Volumeinheit. Es wird also

$$\frac{l'}{l} = \frac{n}{n'} = 1 + \gamma.$$

In dem Verhältnis $\frac{1+\gamma}{1}$ wird also die freie Weglänge der Elektronen bei Verflüssigung des Metalles infolge der plötzlichen Volumvergrößerung und der dadurch bedingten Verringerung der Elektronendichte zunehmen. Es kommt aber noch eine zweite Beeinflussung von l durch die Verflüssigung hinzu. Nimmt man an, daß im festen Metall die Moleküle ein starres Raumgitter bilden, und betrachtet man ein einzelnes Elektron, das sich zwischen diesen ruhenden Molekülen bewegt, so ergibt sich nach der kinetischen Gastheorie seine freie Weglänge zu $l = \frac{1}{N r^2 \pi}$, wo hier N die Zahl der Moleküle im ccm, r deren Radius bedeutet. Haben aber die Molekeln eine Relativbewegung zueinander und hat das Elektron die gleiche mittlere Geschwindigkeit und Weglänge wie die Molekeln, so folgt:

$$l' = \frac{3}{4} \frac{1}{N r^2 \pi}.$$

Diesen letzten Fall haben wir, wenn ein Elektron sich zwischen den Molekeln eines *flüssigen* Metalles bewegt. Es wird also

$$\frac{l'}{l} = \frac{3}{4}.$$

3. v^2 und v'^2, d. h. die mittleren Geschwindigkeitsquadrate der Molekeln in einem Gase bei derselben Temperatur verhalten sich umgekehrt wie die Dichten. Auf unsern Fall angewandt, heißt das: Die Geschwindigkeiten der Elektronen im festen und flüssigen Metall verhalten sich umgekehrt wie die Wurzeln aus den Elektronendichten im festen und flüssigen Metall.

$$\frac{v}{v'} = \sqrt{\frac{n'}{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}.$$

Aus 1—3 ergibt sich, daß die Änderung des spezifischen Widerstandes *nicht* abhängig ist von der Änderung der Zahl der Elektronen und der freien Weglänge, soweit diese infolge der Volumänderung zu erwarten ist; denn die beiden Verhältnisse $\frac{n'}{n} = \frac{1}{1+\gamma}$ und $l'/l = 1+\gamma$ sind gleich und reziprok.

Für den Sprung des spezifischen Widerstandes beim Wechsel des Aggregatzustandes bleibt also allein bestimmend einmal die Änderung der freien Weglänge durch den Verflüssigungs- bzw. Erstarrungsvorgang an sich, ohne Rücksicht auf Volumänderung, und zweitens die Änderung der mittleren Geschwindigkeit der Elektronen infolge der Volumänderung. Es ergibt sich also schließlich:

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{n' v l'}{n v' l} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}.$$

Für die untersuchte Kalium-Natrium-Legierung mit einem $\gamma = 0{,}0098$ würde sich berechnen:

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = 0{,}746 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = 1{,}34.$$

Würde man σ aus den gemessenen Werten genau am Schmelzpunkte $+6{,}5^0$ berechnen, so würde sich $\sigma'/\sigma = 1{,}55$ ergeben. Wie aber ein Blick auf die Kurve II zeigt, ist als eigentlicher Sprung des Widerstandes die Differenz zwischen einem auf dem „flüssigen" Kurvenast gemessenen und einem durch Verlängerung des „festen" Kurvenastes durch Extrapolation gewonnenen σ bei etwa -15^0 zu rechnen. Dies würde aber ein

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = 2{,}36 \text{ ergeben.}$$

Der theoretisch gefundene Wert stimmt also wohl der Größenordnung nach mit dem gemessenen überein, aber nicht der wirklichen Größe nach. Bedeutend besser würde, wie die Rechnung zeigt, die Übereinstimmung bei reinem K und Na, für die nach Baedeker[1])

1,39 bzw. 1,34

gemessen wurde, während die Berechnung auch etwa 1,34 ergeben würde. Genaue Berechnungen sind bei den meisten Metallen nicht möglich, da die Angaben über den Volumsprung

1) Baedeker, Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern. S. 34.

beim Schmelzen im allgemeinen ziemlich unsicher sind. Eine weitere Schwierigkeit, die Formel

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{8}{4\sqrt{1+\gamma}}$$

an der Erfahrung zu prüfen, liegt, wie schon gezeigt, in der unsicheren Definition des Sprunges des Widerstandes, da dieser Sprung keineswegs an einer scharf bezeichneten Stelle, dem Schmelzpunkte eintritt, sondern, gestört und unterbrochen durch die unstetigen „Schmelzgebietserscheinungen", sich über ein größeres Temperaturintervall erstreckt. Inwieweit auch noch Inhomogenitäten im festen Metall, die naturgemäß bei der Verflüssigung verschwinden, die Größe des Sprunges beeinflussen, liegt ganz außerhalb aller Erfahrung.

So viel aber, glaube ich, muß man aus obigen Ausführungen entnehmen, daß die aufgestellte Formel im wesentlichen die Änderung des elektrischen Widerstandes beim Wechsel des Aggregatzustandes richtig wiedergibt.

Auf demselben Wege muß sich übrigens auch eine einfache Beziehung zwischen Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes und kubischen Ausdehnungskoeffizienten finden lassen. Doch mag dies einer späteren Arbeit vorbehalten sein.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß auch die Änderung des spezifischen Widerstandes bei Kompression eines Metalles sich dem Sinne nach richtig aus den erläuterten Vorstellungen ergibt.

Man hat mehrfach der gaskinetischen Elektronentheorie den Vorwurf gemacht, daß sie die häufig[1]) beobachtete Verringerung des Widerstandes bei Kompression nicht erklären könne, vielmehr gerade das entgegengesetzte Resultat voraussehen lasse.[2]) Dieser Vorwurf wird aber sofort hinfällig, wenn man, wie oben gezeigt, voraussetzt, daß bei konstanter Temperatur und Beibehaltung desselben Aggregatzustandes die Widerstandsänderung eines Metalles nur abhängt von der Änderung der mittleren Geschwindigkeit der Elektronen, wenn der den Elektronen zur Verfügung stehende Raum sich ändert, z. B. durch Kompression. Es wird

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{v}{v'},$$

1) Z. B. P. W. Bridgemann, Proc. Am. Nat. Acad. **3**. 1917.
2) C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **13**. S. 351. 1916.

wo σ' und v' sich auf das komprimierte Metall beziehen. Oder

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \sqrt{\frac{n'}{n}}.$$

Sei ε die Kompressibilität eines Metalles, also die Volumabnahme von 1 ccm unter dem Drucke 1 Atm. Dann ist

$$n' = \frac{n}{1-\varepsilon}, \quad \text{also} \quad \frac{n'}{n} = \frac{1}{1-\varepsilon},$$

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \sqrt{\frac{1}{1-\varepsilon}} \quad \text{wird} \quad > 1, \quad \text{d. h.} \quad \sigma' < \sigma.$$

Wie die Rechnung zeigt, wird dieser Ausdruck etwas größer als 1, in Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Kiel, Physikalisches Institut, Mai 1919.

Eingegangen 4. Juli 1919.

4. *Zur Hydrodynamik der Hiebtöne;* von *F. Krüger.*

In einer früheren Arbeit[1]) wurde die Entstehung der sogenannten Hiebtöne auf die Wirbelablösung zurückgeführt und unter Zugrundelegung der von Kármánschen Theorie der Stabilität von Systemen geradliniger Wirbel die von Strouhal[2]) gemessene Höhe dieser Töne aus den Beobachtungsdaten der von v. Kármán und Rubach[3]) aufgenommenen Wirbelbilder einer strömenden Flüssigkeit hinter einem Stabe quantitativ in guter Übereinstimmung berechnet. Aus der Theorie ergab sich das empirisch gefundene Gesetz

$$\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.},$$

worin N die Schwingungszahl, U die Strömungsgeschwindigkeit und D die Dicke des Stabes oder Drahtes bedeutet.

Es war mir seinerzeit entgangen, daß der rein formale Zusammenhang dieser drei Größen sich aus den Formeln für die hydrodynamische Ähnlichkeit ergibt, was wohl zuerst Lord Rayleigh[4]) im zweiten Bande seiner Theory of sound, London 1896, S. 413 (in der deutschen Übersetzung der ersten Auflage dieses Werkes fehlt u. a. auch dieses Kapitel) gezeigt hat, was ferner unabhängig M. v. Smolukowski[5]) abgeleitet hat. Dieser auf Dimensionsbetrachtungen begründete Zusammenhang sagt natürlich gar nichts aus über die Natur und Ursache dieser Töne, wie denn auch Lord Rayleigh betont, daß „eine dynamische Theorie noch zu geben sei." Diese

1) F. Krüger und A. Lauth, Ann. d. Phys. 44. S. 801. 1914.

2) V. Strouhal, Wied. Ann. 5. S. 216. 1878.

3) Th. v. Kármán, Göttinger Nachr. S. 541, 1912; Th. v. Kármán und H. Rubach, Physik. Zeitschr. 13. S. 49. 1912.

4) Lord Rayleigh, Theory of sound, 2. edit., Vol. II, S. 413. London 1896.

5) M. v. Smoluchowski, Anzeiger d. Akad. d. Wissenschaft. Krakau. Math.-naturw. Klasse. S. 153. 1903. Phil. Mag. (16) 7. S. 587. 1904.

dynamische Theorie ist erst durch die in der Arbeit von A. Lauth und mir quantitativ entwickelte Wirbeltheorie der Hiebtöne gegeben, von der mir u. a. M. v. Smoluchowski seinerzeit schrieb, daß „sie den Mechanismus derselben völlig aufklärt".

Es kann daher nicht als eine zutreffende Darstellung des Sachverhaltes angesehen werden, wenn Lord Rayleigh in einer neuen Arbeit[1]) schreibt, daß Lauth und ich „die Arbeit Strouhals neu diskutiert hätten" und ohne ein Wort davon zu sagen, daß wir in unserer Arbeit die Wirbeltheorie der Hiebtöne unter Zugrundelegung der v. Kármánschen Arbeit quantitativ entwickelt und an den Experimenten Strouhals bestätigt haben, seinerseits die Beziehung der Wirbelablösung zu den Hiebtönen behandelt und auch die v. Kármánsche Stabilitätsberechnung des Wirbelsystems erwähnt, von einer quantitativen Verknüpfung der hydrodynamischen und akustischen Erscheinungen jedoch absieht.

Er beschreibt in dieser Abhandlung jedoch neuerdings von ihm angestellte Experimente, um zu prüfen, ob die für die akustischen Schwingungen in Luft gefundene Beziehung

$$\frac{N \cdot D}{U} = 0{,}19,$$

auch für die Strömung in Wasser gilt. Die Versuche sind in der Weise angestellt, daß ein Stab, der um eine horizontale, auf Schneiden ruhende Achse schwingen kann und dessen Eigenschwingungsdauer durch die Verstellung eines Gewichtes auf ihm veränderlich ist, mit seinem unteren Ende in strömendes Wasser taucht. Durch die abwechselnde Wirbelablösung auf beiden Seiten wird dieser Stab in Schwingungen senkrecht zur Strömungsrichtung versetzt und zwar dann mit maximaler Amplitude, wenn seine Eigenschwingungsdauer in Übereinstimmung ist mit der Ablösungsdauer der Wirbel, ganz analog wie bei der Resonanz der Drahtschwingungen an Telegraphendrähten oder Äolsharfensaiten mit den Schwingungen der primär erregenden Hiebtöne. Die Werte, welche Lord Rayleigh für den obigen Ausdruck auf diese Weise für drei Stäbe von der Dicke 8,5 mm, 5,0 mm und 3,5 mm findet, sind 0,120 0,133 und 0,128, alles Werte, die gegenüber den von Strouhal akustisch gefundenen erheblich zu klein sind.

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) 29. S. 433. 1915.

So schön diese Anordnung qualitativ die Transversabilität der Schwingungen bei den durch Wirbelablösung bedingten Schwingungen (im Gegensatz zu den Schwingungen der gestrichenen Saiten) demonstriert, so zweifelhaft ist es, ob die spezielle Versuchsanordnung Lord Rayleighs gute, quantitative Resultate erhoffen lassen konnte. Das von ihm benutzte Wasserreservoir bestand aus einem runden Bassin von 36 cm Durchmesser, das auf einem drehbaren Tisch in Umdrehung gesetzt werden konnte. Es wurde mit der Hand in Bewegung gesetzt, indem zwei sich kreuzende Speichen, welche den oberen Teil des Drehtisches bildeten, angestoßen wurden, bis die Umdrehungsgeschwindigkeit konstant war. Sie wurde so reguliert, daß der Vorbeigang von ein oder zwei Speichen in Übereinstimmung mit einer bestimmten Zahl der Schläge eines halbe Sekunden angebenden Metronoms war. Diese jedenfalls etwas primitive Geschwindigkeitsregulierung und -Messung hatte zur Voraussetzung, daß das Wasser mit dem Bassin wie ein fester Körper rotierte. Das kann aber bei der Kleinheit der Wassermassen zweifelhaft werden, wenn der hineingehängte Stab durch seinen Widerstand die Rotation des Wassers hemmt. Diesen Einwand hat denn auch schon Lord Rayleigh selbst erhoben und die Größe des dadurch bedingten Fehlers dadurch zu schätzen versucht, daß er einen zweiten Stab von gleichem Durchmesser wie den ersten (8,5 mm) diesem diametral gegenüberstellte und die jetzt veränderte Strömungsgeschwindigkeit maß, welche den Stab wieder in Resonanzschwingungen versetzte; es ergab sich das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeiten wie 6:5, und damit der korrigierte Wert der Konstanten zu 0,143 also immer noch erheblich zu klein. Abgesehen davon, daß diese Korrektur nur ungenau sein konnte, ist noch zu bedenken, daß der schwingende Stab, dessen Amplituden keineswegs sehr klein sind, sondern nach neuen gleich zu besprechenden Versuchen bis zu etwa $^1/_2$ cm nach jeder Seite betragen, bei dieser Anordnung bei seinen Schwingungen in Gebiete von verschiedener Strömungsgeschwindigkeit gerät.

Lord Rayleigh hat dann die Frage aufgeworfen, ob die Diskrepanz zwischen seinen hydrodynamischen und den akustischen Versuchen vielleicht in einer Unexaktheit der akustischen Messungen Strouhals begründet sei. Er hat dessen Experimente in der Form wiederholt, daß er eine Saite über einer

Öffnung von 66 cm Länge und 10 cm Breite in einem Schornstein ausspannte. Die Stärke des Luftstroms wurde hauptsächlich durch die Intensität des Feuers, z. B. durch daraufgeworfene Papierstückchen reguliert, teils auch durch Regulierung einer Nebenöffnung für den Zug, bis eine solche Strömungsgeschwindigkeit erreicht war, daß Resonanz der Hiebtonfrequenz mit dem dritten Oberton der Saite (256 Schwingungen) eintrat. Die Luftgeschwindigkeit wurde durch die Druckmessung auf einen Spiegel der Größe 10,1 . 1,6 cm bestimmt; der Spiegel bildete das eine Ende eines horizontalen Pendels, das durch ein Gegengewicht ausbalanciert war. Die Geschwindigkeit wurde aus dem Druck mittels der Formel $P = C \cdot \varrho \cdot U^2$, worin P den Druck, ϱ die Dichte bedeutet, berechnet, wobei für die Konstante C der von Stanton für eine Platte von 5,1 cm im Quadrat gefundene Wert von 0,52 eingesetzt wurde (für große Platten gilt der Wert 0,62). So ergab das Experiment für den Ausdruck $\frac{N \cdot D}{U}$ den Wert 0,127, also einen wesentlich kleineren Wert als Strouhal gefunden hatte; doch weist schon Lord Rayleigh selbst auf die Unsicherheit des von ihm gefundenen Wertes wegen der Unsicherheit der Konstante C hin. Der ganzen Anordnung nach verdienen daher die Messungen Strouhals, der doch nicht nur einen Wert bestimmte, sondern über einen großen Bereich von Geschwindigkeiten und Stab- bzw. Drahtdicken die Werte des Ausdruckes $\frac{N \cdot D}{U}$ mit großer Sorgfalt bestimmte, wohl größeres Vertrauen als diese vereinzelte Messung.

Die vorzügliche Übereinstimmung, welche die Berechnung des Ausdrucks $\frac{N \cdot D}{U}$ aus den Daten der hydrodynamischen Wirbelbilder von v. Kármán und Rubach mit den akustischen Messungen Strouhals in der Arbeit von Lauth und mir ergeben hat, macht die Richtigkeit der Strouhalschen Zahlen von vornherein recht wahrscheinlich. Um diese Übereinstimmung nunmehr durchaus sicherzustellen, habe ich die oben beschriebenen Rayleighschen Messungen mit dem in der strömenden Flüssigkeit pendelnden Stabe wiederholt, aber mit einer für exakte Messungen geeigneteren Versuchsanordnung. Es diente dazu ein kleiner Wasserrundlauf, der in der nebenstehenden Fig. 1 wiedergegeben ist.

Seine Dimensionen sind folgende: Die größte Ausdehnung in der Längsrichtung beträgt 107 cm, in der Breite 57 cm. Der aus Glasplatten zusammengesetzte Teil, in dem die Strömungserscheinungen untersucht wurden, hat eine Länge von 55 cm und eine Breite von 20 cm. Die Wasserhöhe beträgt 10 cm. Das Wasser wird zur Strömung gebracht durch einen achtflügeligen Propeller in dem dem Glastrog gegenüberliegenden runden Rohr von 10 cm Durchmesser; die Achse

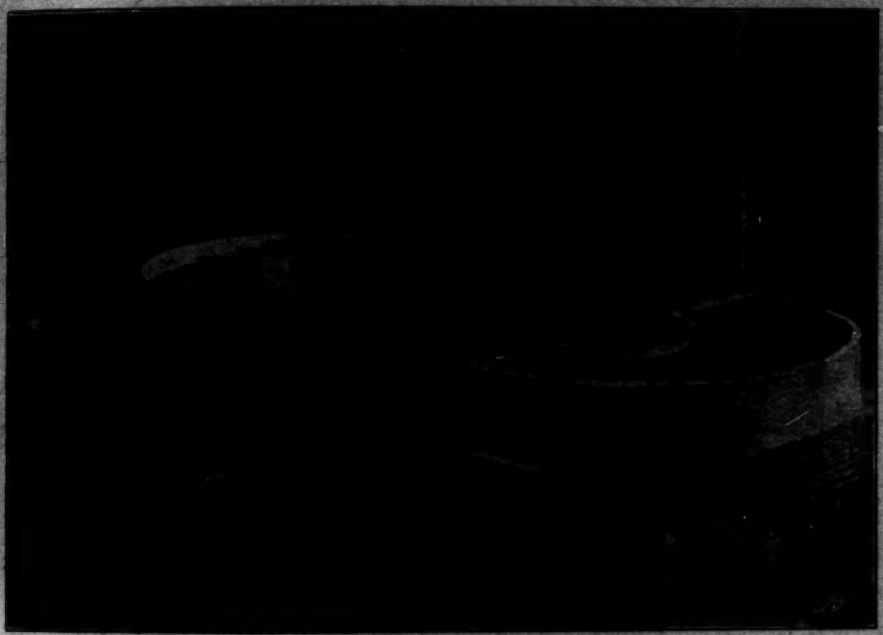


Fig. 1.

des Propellers ist durch eine Stopfbüchse an dem einen Ende aus dem Rundlauf herausgeführt und trägt hier eine Riemenscheibe. Der Rundlauf steht zur Sicherung gegen die Übertragung von Erschütterungen in einer mit Sand gefüllten flachen Holzkiste, der antreibende Motor auf einem gesonderten Tische, das Übersetzungsrad auf einem dritten zwischen den Tischen des Rundlaufes und des Motors; zur Übertragung des Antriebes vom Übersetzungsrad auf den Rundlauf dient als Riemen eine Drahtspirale. So war eine Übertragung der Erschütterungen durch den Motor, die vor Einführung dieser

Vorsichtsmaßregeln sehr störend waren, weitgehend vermieden. Eine durchaus ausreichende Beseitigung des durch die Propellerflügel verursachten Turbulenz wurde durch ein Drahtnetz hinter dem Propeller erreicht.

Die Strömungsgeschwindigkeit wurde mit der Rotationsgeschwindigkeit des Elektromotors durch einen gut variablen Schieberwiderstand in bequemer und genauer Weise reguliert; sie wurde gemessen, indem die Zeit bestimmt wurde, welche ein im Innern der Flüssigkeit schwimmendes Aluminiumflitterchen zum Durchlaufen einer Strecke $s = 11$ cm benötigte.

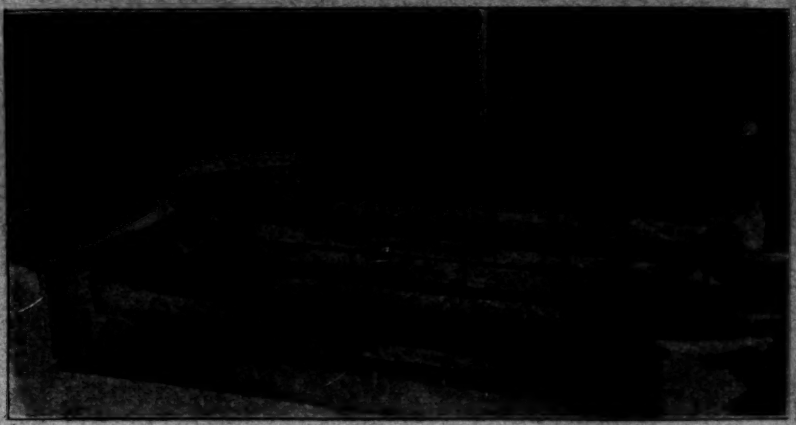


Fig. 2.

Solche Aluminiumflitter wurden aus der gewöhnlichen Aluminiumbronze, die infolge einer anhaftenden Fettschicht nur auf dem Wasser schwimmt, gewonnen, indem diese Fettschicht durch längeres Erhitzen in einem Glasrohr unter ständigem Überleiten von Luft entfernt wird.

Die Stäbe, welche durch die Wirbelablösung zu Schwingungen senkrecht zur Strömungsrichtung angeregt werden sollten, waren mit einem Schräubchen in einem Querarm befestigt, der in Spitzen gelagert war. Sie tauchten mit ihrem unteren Ende mehrere Zentimeter tief in das strömende Wasser, wie dies die obenstehende Fig. 2 zeigt.

Durch Höher- oder Tieferstellen wurde die Eigenschwingungsdauer der Stäbe verändert. Der eine der benutzten Stäbe war aus Eisen und hat einen Durchmesser von 0,5 cm und

eine Länge von 19,5 cm. Er machte eine Schwingung pro Sekunde, wenn der Abstand seines oberen Endes vom Drehpunkt 8,5 cm betrug. Die beiden weiteren benutzten Stäbe waren unten zugeschmolzene Glasröhren, beide von einer Länge von 17,4 cm; die eine hatte einen Durchmesser von 0,43 cm, die andere einen solchen von 0,25 cm. Sie vollführten eine Schwingung pro Sekunde, wenn ihr oberes Ende vom Drehpunkt 7,8 cm entfernt war.

Waren diese Stäbe in das strömende Wasser etwa in der Mitte des Glastroges eingehängt, so wurde die Strömungsgeschwindigkeit so lange reguliert, bis sie Schwingungen von maximaler Amplitude vollführten, bis also ihre Eigenschwingungsfrequenz in Resonanz war mit der Frequenz der Wirbelablösung. Diese Einstellung war auf die Veränderung der Strömungsgeschwindigkeit recht empfindlich, konnte also recht genau gemacht werden. Die schwingenden Stäbe hatten bei Resonanz Amplituden von etwa $^1/_2$ cm auf beiden Seiten. Zur Bestimmung der Frequenz N des in Resonanz schwingenden Stabes wurde die Zeit τ bestimmt, in der eine gewisse Zahl n von Schwingungen vom Stabe ausgeführt wurden; es war also $N = n/\tau$.

Die mit dem Eisenstab von 0,5 cm Durchmesser erhaltenen Resultate gibt die folgende Tabelle I wieder.

Tabelle 1.

Eisenstab vom Durchmesser $D = 0{,}5$ cm.

Zeit T zum Durchfließen der Strecke $s = 11$ cm in sec			Mittel	$U = s/T$ in cm/sec	Anzahl n der beobachtet. Schwingg. des Stabes	Zeit τ für die n-Schwingungen in sec	Mittel	Frequenz N	$\frac{N \cdot D}{U}$
3,0	3,2	3,0				16,6			
3,4	3,6	3,4	3,32	3,31	20	16,2	16,4	1,22	0,184
3,4	3,4					16,4			
3,4	3,4								
3,6	3,2	3,4				16,4			
3,4	3,2	3,4	3,42	3,22	20	16,2	16,4	1,22	0,189
3,6	3,4	3,6				16,4			
3,4	3,6					16,4			
3,4	3,2								

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Zeit T zum Durchfließen der Strecke $s = 11$ cm in sec			Mittel	$U = s/T$ in sec/cm	Anzahl n der beobachtet. Schwingg. des Stabes	Zeit τ für die n-Schwingungen in sec	Mittel	Frequenz N	$\frac{N \cdot D}{U}$
3,8	4,0	3,8				18,2			
3,8	3,6	3,8				18,0			
4,0	3,8	3,6	3,84	2,87	20	17,8	18,0	1,11	0,194
3,8	4,0	3,8				18,0			
3,8	4,2					18,0			
3,8	3,8	3,8				18,0			
3,8	4,2	3,8				18,0			
3,6	3,8	3,8	3,86	2,85	20	18,0	18,0	1,11	0,195
4,0	3,8	3,8							
4,0	4,0								
4,4	4,6	4,2				20,2			
4,4	4,4	4,2				20,4			
4,2	4,2	4,4	4,33	2,55	20	20,2	20,2	0,99	0,196
4,2	4,2	4,4				20,2			
4,4	4,4					20,2			
4,4	4,4	4,2				20,2			
4,4	4,2	4,6				20,2			
4,2	4,2	4,2	4,27	2,58	20	20,0	20,2	0,99	0,192
4,2	4,4					20,2			
4,6	4,4	4,4				21,0			
4,4	4,4	4,4				21,0			
4,4	4,4	4,2	4,43	2,48	20	21,0	21,0	0,952	0,192
4,4	4,6	4,4				21,0			
4,6	4,4					21,0			
5,8	5,8	5,6				27,4			
5,6	5,6	5,8				27,2			
6,0	5,6	5,8	5,71	1,93	20	27,2	27,2	0,735	0,190
5,6	5,8					27,0			
5,6	5,6					27,2			
5,8	5,6	5,6				27,2			
5,8	5,6	5,8				27,2			
5,6	5,8	6,0				27,2			
5,8	6,0	5,8	5,77	1,91	20	27,2	27,2	0,735	0,193
5,8	5,6	5,8							
5,8	5,8								
6,8	7,0	7,0				15,8			
7,0	6,8	6,8				15,6			
6,8	6,6		6,88	1,60	10	15,8	15,7	0,637	0,199
7,0	7,0					15,8			
								Mittel	0,192

Für diesen Eisenstab ergibt sich also als Mittelwert $\frac{N \cdot D}{U} = 0{,}192$.

Die entsprechenden Messungen an dem Glasstabe von der Dicke 0,48 cm gibt die Tabelle 2 wieder.

Tabelle 2.

Glasstab vom Durchmesser $D = 0{,}48$ cm.

Zeit T zum Durchfließen der Strecke $s = 11$ cm in sec				$U = s/T$ in cm/sec	Anzahl n der beobachtet. Schwingg. des Stabes	Zeit τ für die n-Schwingungen in sec		Frequenz N	$\frac{N \cdot D}{U}$
			Mittel				Mittel		
4,2	4,2	4,0				17,0			
4,4	4,2	4,2				17,0			
4,2	4,0	4,0	4,17	2,64	20	17,0	17,0	1,18	0,192
4,2	4,2	4,2				17,0			
4,0	4,4								
5,0	4,8	4,8				20,0			
5,0	4,8	4,8	4,87	2,26	20	20,0	20,0	1,00	0,190
4,8	5,0	4,8				20,0			
						20,0			
5,2	5,4	5,4				21,2			
5,2	5,4	5,2				21,4			
5,4	5,2	5,4	5,30	2,07	20	21,2	21,2	0,943	0,196
5,2	5,2	5,4				21,2			
						21,2			
5,6	5,6	5,4				22,0			
5,4	5,6	5,6				22,0			
5,6	5,4	5,6	5,57	1,97	20	22,0	22,0	0,909	0,198
5,8	5,6								
5,6	5,6								
6,0	5,8	6,2				24,4			
5,8	5,8	6,0				24,2			
6,0	5,8	6,2				24,2			
6,0	6,0	6,0	5,99	1,84	20	24,2	24,2	0,826	0,193
6,2	5,8	6,2				24,2			
6,0	6,0								
6,8	7,0	6,8				27,4			
7,0	6,8	6,8				27,4			
7,0	6,8	7,0	6,89	1,60	20	27,4	27,4	0,730	0,196
6,8	7,0								
								Mittel:	0,194

Für diesen Stab erhalten wir also als Mittelwert $\frac{N \cdot D}{U} = 0{,}194$.

Die Messungen mit dem Glasstabe von der Dicke $D = 0{,}25$ cm enthält die folgende Tabelle 3.

Tabelle 3. Glasstab vom Durchmesser $D = 0{,}25$ cm.

Zeit T zum Durchfließen der Strecke $s = 11$ cm in sec			Mittel	$U = s/T$ in cm/sec	Anzahl n der beobachtet. Schwingg. des Stabes	Zeit τ für die n-Schwingungen in sec		Frequenz N	$\frac{N \cdot D}{U}$
							Mittel		
5,6	5,4	5,4				13,0			
5,6	5,4	5,6				13,0			
5,4	5,6	5,6	5,51	2,00	20	13,0	13,0	1,54	0,193
5,6	5,4								
6,6	6,8	6,8				16,2			
6,8	6,8	6,6				16,0			
6,8	7,0	6,8				16,0			
7,0	6,8	6,6	6,79	1,62	20	15,8	16,0	1,25	0,191
6,6	6,8					16,2			
7,0	6,8					16,0			
7,4	7,4	7,2				17,4			
7,2	7,2	7,6				17,4			
7,2	7,4	7,4				17,4			
7,4	7,4	7,2	7,32	1,50	20		17,4	1,15	0,191
7,2	7,4	7,2							
7,4	7,2								
8,4	8,4	8,6				20,6			
8,6	8,6	8,4				20,4			
8,6	8,4	8,4	8,46	1,30	20	20,4	20,5	0,975	0,188
8,4	8,4					20,6			
8,4	8,4					20,6			
						20,4			

Mittel: 0,191

Aus dieser Tabelle ergibt sich der Mittelwert $\frac{N \cdot D}{U} = 0{,}191$.

Der Mittelwert sämtlicher Messungen an den drei verschiedenen Stäben beträgt 0,192. Er ist also in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem Werte 0,20, der von Lauth und mir aus den hydrodynamischen Strömungsbildern von v. Kármán und Rubach abgeleitet wurde, wie auch mit dem Werte 0,19 der zahlreichen und sorgfältigen, übrigens auf Veranlassung F. Kohlrauschs in seinem damaligen Würzburger Institut angestellten Messungen von Strouhal. Sowohl die hydrodynamisch wie die akustisch bestimmten Werte des Ausdruckes $\frac{N \cdot D}{U}$ von Lord Rayleigh sind diesem durch die dreifache Übereinstimmung gesicherten Werte gegenüber erheblich zu klein.

Die Beziehung $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ ist insofern ein Grenzgesetz, als sie bei sehr kleinem Durchmesser der Stäbe ihre

Gültigkeit verliert, wie die der Arbeit Strouhals entnommene Figur 5 in der Arbeit von Lauth und mir deutlich zeigt: Die N-U-Kurven sind für kleine Stabdicken keine Geraden mehr, sondern steigen für kleine U-Werte beschleunigt an, besitzen aber für große U-Werte Gerade als Asymptoten, welche die U-Achse in einem Abstande U_0 schneiden, der mit abnehmendem Stabdurchmesser wächst. Innerhalb des Gültigkeitsbereiches jenes Gesetzes verlangen, wie vor allem v. Smoluchowski[1]) betont hat, die Ähnlichkeitssätze die Unabhängigkeit des Ausdruckes $\frac{N \cdot D}{U}$ von Druck und Temperatur. Nun hat aber Strouhal doch eine, wenn auch nicht große, Temperaturabhängigkeit desselben zwischen 9,5° und 37° C gefunden und zwar ein Sinken des Tones N bei konstanter Geschwindigkeit und konstantem Stabdurchmesser, also auch ein Sinken des Ausdruckes $\frac{N \cdot D}{U}$. Von Smoluchowski hält diese Temperaturabhängigkeit für zweifelhaft, weist aber auch schon darauf hin, daß die Grundformel $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ nicht allgemein gültig sei. In der Tat liegt hier kein Widerspruch vor, denn Strouhal hat diese Temperaturabhängigkeit gemessen bei Messingdrähten vom Durchmesser $D = 0{,}393$ mm und $D = 0{,}179$ mm, also bei Dicken, bei denen die Gültigkeit des Gesetzes $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ nicht mehr zutrifft.

Die Abweichungen von diesem Gesetz hat nun Lord Rayleigh[2]) mit Hilfe der hydrodynamischen Ähnlichkeitssätze mit der kinematischen Zähigkeit ν in Beziehung zu setzen gesucht, indem er die Konstante des Gesetzes $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konstant}$ als Funktion einer dimensionslosen Größe schreibt, und zwar setzt

$$N = \frac{U}{D} \cdot f\left(\frac{\nu}{U \cdot D}\right).$$

Da die Werte von $\frac{\nu}{U \cdot D}$ bei den akustischen Messungen Strouhals sehr klein sind, entwickelt Rayleigh $f\left(\frac{\nu}{U \cdot D}\right)$ in eine Reihe:

$$f\left(\frac{\nu}{U \cdot D}\right) = a + b \cdot \frac{\nu}{U \cdot D} + c \cdot \frac{\nu^2}{U^2 \cdot D^2},$$

woraus dann folgt

1) M. v. Smoluchowski, a. a. O.
2) Lord Rayleigh, Theory of sound, 2. edit., Vol. II, S. 372, 1896; Phil. Mag. (6) 29. S. 435. 1915.

$$N = a \cdot \frac{U}{D} + b \cdot \frac{\nu}{D^2} + c \cdot \frac{\nu^2}{U \cdot D^3} \cdot$$

Bei Vernachlässigung des dritten Gliedes und Einsetzung der Zahlen Strouhals folgt weiter

$$\frac{N D}{U} = 0{,}195 \left(1 - \frac{20{,}1\,\nu}{U \cdot D}\right) \cdot$$

Setzt man in diese Gleichung einmal die Werte für 11°, zweitens für 31° ein, so berechnet sich daraus die Differenz der Werte $\nu_{31°} - \nu_{11°}$ zu 0,016 c. g. s. in guter Übereinstimmung mit dem beobachteten Werte 0,018.

Die Prüfung dieser Beziehung für strömendes Wasser ist zur Zeit noch nicht möglich, da es an ausreichenden Beobachtungen fehlt. Bei Bénard[1]) findet sich die Angabe, daß das Verhältnis des Wirbelabstandes l zum Durchmesser D des Hindernisses folgende Werte hat:

D	$l/D = b$
4 mm	4,4
2 mm	6,5
1 mm	8,9

Für $D = 4$ mm hat also der Ausdruck $b = l/D$ fast noch genau denselben Wert wie bei v. Kármán und Rubach (4,3), der also dem Gültigkeitsbereich der Formel $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ entspricht. Für kleinere D wird die Größe b erheblich größer und da, wie in der Arbeit von Lauth und mir gezeigt, $\frac{N \cdot D}{U} = \frac{1-a}{b}$ so sinkt damit der Wert dieses Ausdruckes analog wie dieselbe Größe für die akustisch gemessenen Werte. Da aber die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit nicht untersucht ist, läßt sich ein weitergehender Vergleich noch nicht anstellen.

Über die physikalische Ursache für die Abweichungen der Beziehung $\frac{N \cdot D}{U} = \text{konst.}$ läßt sich auf Grund der rein formalen Beziehungen der Ähnlichkeitssätze natürlich nichts aussagen. Eine Aufklärung hierüber muß vielmehr einer eingehenden Untersuchung über die entsprechenden Abweichungen bei den hydrodynamischen Strömungserscheinungen vorbehalten bleiben.

Herrn stud. math. E. Schmidtke bin ich für eifrigste Unterstützung bei den Messungen zu großem Dank verpflichtet.

Danzig-Langfuhr, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

1) H. Bénard, Compt. rend. 147. S. 839. 1908.

(Eingegangen 31. Mai 1919.)

5. *Über Gay-Lussac- und Boyle-Temperaturen; von R. H. Weber.*

1. Anknüpfend an die drei „Komponentgesetze" der idealen Gase, die Gesetze von Boyle-Mariotte, von Gay-Lussac und von Joule definiert Schames[1]) „drei charakteristische Kurven I. Art" für die realen Gase, denen er die Namen „Boylekurve", „Gay-Lussackurve" und „Joulekurve" gibt, und die innerhalb der Zustandsfläche des realen Gases verlaufen müssen. Diese drei Komponentgesetze

(1) Boyle: $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T = -\frac{v}{p}$ oder $\left(\frac{\partial (p\,v)}{\partial p}\right)_T = 0$,

(2) Gay-Lussac: $T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = 0$,

(3) Joule: $T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v - p = 0$

sind nicht voneinander unabhängig, sondern durch die allgemeine für jede Relation zwischen drei Variabeln geltende Beziehung

(4) $$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$$

miteinander verknüpft. Das entspricht der Tatsache, daß die idealen Gase nur durch zwei Eigenschaften vor den realen Gasen ausgezeichnet sind, nämlich erstens durch die Eigenschaft, daß das Produkt $(p\,v)$ lediglich eine Temperaturfunktion (welche, ist willkürlich und entscheidet über die Wahl der Temperaturskala), und zweitens durch die Eigenschaft, daß auch die innere Energie lediglich eine (natürlich nicht willkürliche, aber auch nicht für Idealgase speziell vorgeschriebene) Temperaturfunktion ist.

1) L. Schames, Ann. d. Phys. 57. S. 321. 1918.

Die Relation (4) fordert für die drei genannten charakteristischen Kurven, daß wenn sich zwei von ihnen in einem Punkte schneiden, durch diesen Punkt auch die dritte gehen muß. Die folgenden Ausführungen aber zeigen, daß ein solcher Schnitt — wenn gewisse Erfahrungstatsachen (Gleichung 6) allgemeine Gültigkeit haben, nur bei $T = 0$ stattfinden kann. Das aber ist nach Schames[1]) unmöglich. Dann wäre auch ein Schnitt von nur zweien der drei charakteristischen Kurven I, III, V nicht möglich.

2. Die Gleichung (2) definiert auf der Zustandsfläche eine Kurve, die alle diejenigen Punkte enthält, in denen der Joule-Kelvinsche Kühleffekt verschwindet, die „Inversionspunkte". Zu jedem spezifischen Volumen gehört eine eigene Inversionstemperatur; doch ist die Abhängigkeit dieser vom Volumen praktisch nur sehr geringfügig (Nr. 7, Schluß), so daß man praktisch für jedes Gas kurz von seiner Inversionstemperatur sprechen kann.

3. Die Boylekurve (Gleichung 1) umfaßt alle die Punkte, in denen das Produkt $(p\,v)$ von der Temperatur unabhängig wird. Sie erreicht für $p = 0$ einen Punkt, den Kamerlingh-Onnes[2]) als Boylepunkt bezeichnet; und Kamerlingh-Onnes und seine Schüler finden, daß die diesem Punkte zugehörige „Boyletemperatur" in der absoluten Temperaturskala halb so hoch liegt, wie die Inversionstemperatur, eine Tatsache, die in Einklang steht mit der Jäger-Boltzmannschen Form der Zustandsgleichung[3]):

$$(5) \qquad p\,v + \frac{a}{v} = RT\left(1 + \frac{b}{v} + \alpha_1 \frac{b^2}{v^2} + \alpha_2 \frac{b^3}{v^3} + \ldots\right).$$

4. Die eben genannte Beziehung zwischen dem Boyle- und Inversionspunkt ist aber noch allgemeiner gültig, wie in folgendem gezeigt werden soll. Erstens einmal gilt sie für die zwei zu jedem vorgegebenen Volumen gehörigen Temperaturen

1) A. a. O. Gleichung (5).

2) H. Kamerlingh-Onnes, Vers. Ak. v. Wet. 17. S. 168 und in früheren Arbeiten. Ferner Comm. Phys. Lab. Leiden 69 bis 102 an versch. Orten.

3) Literatur siehe Weber und Gans. Repetorium I^2. S. 179.

der Boylekurve (T_b) und der Gay-Lussackurve (T_g) der Gleichungen (1) und (2), also wird

$$T_g = 2\,T_b. \tag{6}$$

Zweitens gilt diese Gleichung nicht nur im Falle der Gültigkeit der Jäger-Boltzmannschen Zustandsgleichung, sondern auch noch für andere Formen derselben.

5. Wir setzen zunächst eine Form

$$p\,v = R\,T \cdot f(v) + \varphi(v) \tag{7}$$

für die Zustandsgleichung voraus. Die Gleichung (1) kann, da

$$(\partial/\partial\,p)_T = (\partial/\partial\,v)_T (\partial\,v/\partial\,p)_T$$

ist, und $(\partial\,v/\partial\,p)_T$ wohl unendlich, aber nie gleich Null werden kann, ersetzt werden durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial\,(p\,v)}{\partial\,v}\right)_T = 0. \tag{1'}$$

Das gibt für die Boyletemperaturen nach (7) die Beziehung

$$T_b = -\,\frac{1}{R}\,\frac{\varphi'}{f'}, \tag{8}$$

wenn unter φ' und f' die Differentialquotienten der Funktionen φ und f nach v verstanden sind.

6. Nach (7) wird

$$\left(\frac{\partial\,v}{\partial\,T}\right)_p = \frac{R}{p} \cdot f(v) + \frac{R\,T}{p} f'(v) \left(\frac{\partial\,v}{\partial\,T}\right)_p + \frac{\varphi'(v)}{p} \left(\frac{\partial\,v}{\partial\,T}\right)_p$$

und deshalb

$$T\left(\frac{\partial\,v}{\partial\,T}\right)_p - v = \frac{R\,T \cdot f(v) - p\,v + R\,T\,v\,f'(v) + v\,\varphi'(v)}{p - R\,T\,f'(v) - \varphi'(v)}.$$

Das gibt unter nochmaliger Verwendung von (7) wegen (2) die Gay-Lussactemperaturen

$$T_g = \frac{\varphi - v\,\varphi'}{R\,v\,f'}. \tag{9}$$

7. Die Gleichungen (8) und (9) lehren, daß (6) nur dann erfüllt ist, wenn

$$\varphi + v \cdot \varphi' = 0,$$

d. h., wenn

$$\varphi(v) = \frac{\text{const.}}{v}$$

ist, also nur dann, wenn die Gleichung (7) die speziellere Form hat

$$p\,v = R\,T \cdot f(v) - \frac{a}{v}, \tag{10}$$

und das ist in der Tat eine allgemeinere Form als diejenige von Jäger-Boltzmann [Gleichung (5)]. Die Funktion $\varphi(v)$ muß also die durch den Kohäsionsdruck (a/v^2) geforderte Form $-a/v$ haben, wenn die Gleichung (6) erfüllt sein soll. Allerdings fordert diese Gleichung (6) nicht, daß a wesentlich positiv ist.

Es wird jetzt

$$T_g = -\frac{2}{R}\,\frac{a}{v^2 f'(v)} = 2\,T_k$$

und nach (5)

$$T_g = \frac{2a}{R \cdot b}\,\frac{1}{b + 2a_1\frac{b^2}{v} + 3a_2\frac{b^3}{v^2} + \ldots},$$

und schon, wenn man in (5) die Klammerreihe nach dem zweiten Gliede abbricht, wird T_g von v unabhängig

8. Setzt man in (7)

$$\varphi(v) = -\frac{a}{v^n},$$

so erhält man eine allgemeinere Form der ersten von Dieterici[1]) aufgestellten Zustandsgleichung $(n = 2/3)$:

$$\left(p + \frac{a}{v^{3/2}}\right)(v - b) = R\,T.$$

Es wird nach (9) jetzt

$$T_g = (n + 1)\,T_k$$

und nach Dieterici

$$T_g = \tfrac{5}{3}\,T_k.$$

9. In der Gleichung (10) entstammt das Glied a/v dem Kohäsionsdruck (a/v^2) der ältesten (v. d. Waals, Clausius) der Zustandsgleichungen, der also abgesondert von der allgemeinen Funktion $f(v)$ auftritt.

Läßt man umgekehrt das Kernvolumen (b) der älteren Formen bestehen, und verallgemeinert den Kohäsionsdruck, indem man setzt

1) C. Dieterici, Wied. Ann. 69. S. 699. 1899.

(11) $$p(v-b) = RT \cdot f(vT),$$

worin f eine Funktion des Produktes (vT) sein soll, was freilich hier eine sehr willkürliche Annahme ist, so erhält man eine Verallgemeinerung der zweiten (transzendenten) Form der Zustandsgleichung von Dieterici[1]):

(12) $$p(v-b) = RTe^{-\frac{a}{RTv}}.$$

10. Aus (11) folgt

$$pv = \frac{RTv}{v-b} f(vT)$$

und

$$\left(\frac{\partial(pv)}{\partial v}\right)_T = \frac{RT}{v-b}\left(1 - \frac{v}{v-b}\right) \cdot f(vT) + \frac{RT^2 v}{v-b} f'(vT),$$

wenn f' den Differentialquotient von f nach dem Produkt (vT) bedeutet. Das gibt unter nochmaliger Berücksichtigung von (11) nach (1')

(13) $$T_b^2 = \frac{b}{Rv}\frac{p}{f'}.$$

11. Aus (11) folgt weiter:

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p} f + \frac{RTv}{p} f' + \frac{RT^2}{p} f' \frac{\partial v}{\partial T}$$

und deshalb

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v = \frac{RTf + RT^2 v f'}{p - RT^2 f'} - v.$$

Das verschwindet für

(14) $$T_g^2 = \frac{b}{2Rv}\frac{p}{f'}.$$

12. Aus (13) und (14) läßt sich direkt kein Schluß auf das Verhältnis von T_g zu T_b ziehen, da ja p und f' die Temperatur noch enthalten. Die Bedingung

$$T_g = 2T_b$$

ist aber nur dann erfüllt, wenn der von T abhängige Faktor in (13) und (14)

$$\frac{p}{f'} = \frac{RT}{v-b}\frac{f}{f'}$$

---

1) C. Dieterici, a. a. O. S. 703. Vgl. auch Ann. d. Phys. 5. S. 51. 1901; 12. S. 144. 1903.

die Temperatur in dritter Potenz enthält, also wenn f/f' selber proportional mit T^3 wird. Wir müssen also, da f und damit f/f' nur von $v \cdot T$ abhängen sollen, fordern

$$\frac{f}{b'} = c v^3 T^3; \quad \frac{p}{f'} = c R \frac{v^3 T^3}{v - f}.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt integriert, abgesehen von einem konstanten Faktor

$$f(v T) = e^{-\frac{1}{c v T}}.$$

Setzt man $c = R/C$, so wird aus (11) die Dietericische Gleichung (12). Es ist immerhin bemerkenswert, daß diese zweite Dietericische Zustandsgleichung unter allen Gleichungen der Form (11) die einzige ist, die der Bedingung $T_g = 2 T_b$ genügt.

Rostock, 1. August 1919.

(Eingegangen 11. August 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

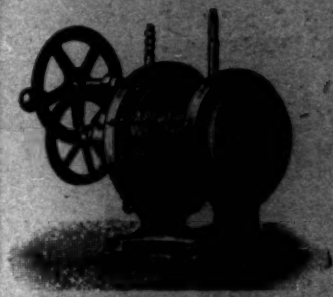
Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

System Pfeiffer, D.R.P. — System Gaede, D.R.P. angemeldet

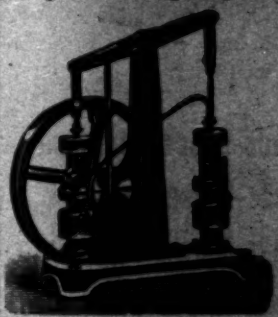


Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. **Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.**



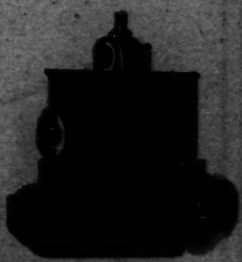
Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

Trockene Schieber-luftpumpen,

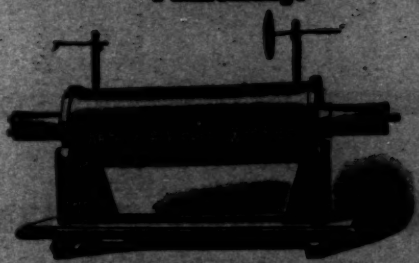
Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Hebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. Hermann Senftleben und Elisabeth Benedict. Über die Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen leuchtender Flammen 297
2. Otto Wiener. Ein allgemeiner Satz über die Schutzwirkung von Schirmen gegen Wärmeübertragung 324
3. P. Lenard. Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger. III: Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien, mit Beiträgen von W. Weick und Hans Ferd. Mayer. 329
4. G. Borelius. Über Thermokräfte in einem chemisch homogenen Leiterkreise; Bearbeitungs- und Oberflächenerscheinungen . . 381

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1919. № 20.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. *Über die Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen leuchtender Flammen;*

von Hermann Senftleben u. Elisabeth Benedict.

Aus den Untersuchungen, die bisher über die optischen Eigenschaften leuchtender Kohlenstofflammen vorliegen und welche vorwiegend das Ziel verfolgen, auf Grund der Strahlungsgesetze die Temperatur dieser Flammen festzulegen, folgt ein optisches Verhalten der leuchtenden Flammen, welches von dem ebenfalls bereits mehrfach untersuchten des Kohlenstoffs in *massivem* Zustande gänzlich abweicht. Die Erklärung für dieses abweichende Verhalten läßt sich in der Tatsache suchen, daß in den Kohlenstofflammen die lichtaussendenden Bestandteile glühende Kohlenstoffpartikel *in fein verteiltem Zustande* sind, und es liegt daher die Annahme nahe, daß die optischen Eigenschaften der Flamme wesentlich durch die Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen bedingt sind, m. a. W., daß die Flamme als trübes Medium aufzufassen ist. Diese Anschauung findet sich bereits, allerdings in anderem Zusammenhange, in der Literatur ausgesprochen, ohne daß jedoch aus ihr irgendwelche wesentlichen Folgerungen gezogen worden sind. In der vorliegenden Arbeit haben wir versucht, auf Grund eingehender experimenteller und theoretischer Verfolgung dieser Ansicht die optischen Eigenschaften der Flamme mit denen des massiven Kohlenstoffs in Einklang zu bringen.

Die Voraussetzung hierfür war, daß es sich als möglich erwies, an der Flamme Eigenschaften festzustellen, die für ein trübes Medium charakteristisch sind und sich meßbar verfolgen lassen. Bei den zu diesem Zwecke angestellten Versuchen zeigte es sich, daß bei intensiver Bestrahlung der Flamme[1]) seitlich abgebeugtes Licht genügend deutlich wahrnehmbar war, um eine genaue Untersuchung seiner Intensität in Abhängigkeit von Richtung und Wellenlänge zu ge-

1) Vgl. Fig. 1, S. 303.

statten; auch zeigte dasselbe, wie es der oben ausgesprochenen Ansicht entspricht, deutliche Polarisation, deren Änderung mit der Richtung zum einfallenden Strahl ebenfalls mit genügender Genauigkeit meßbar war. Infolge des positiven Ergebnisses dieser Versuche war es möglich, die Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen der Flamme experimentell und theoretisch zu untersuchen, wobei wir zu dem Ergebnis gelangten, daß auf diesem Wege sowohl die bisher bekannten optischen Eigentümlichkeiten leuchtender Flammen, als auch die eben angeführten Erscheinungen qualitativ wie quantitativ herzuleiten sind.

Die Untersuchung dieses Problems führten wir auf Anregung von Herrn Professor Lummer durch, dem wir auch an dieser Stelle unseren aufrichtigsten Dank aussprechen möchten.

I. Übersicht über die Theorien der Optik trüber Medien.

Über das Problem der Lichtausbreitung in einem trüben Medium, d. h. einem Medium, in dem kleine Teilchen einer fremden Substanz eingelagert sind, liegen unter sehr verschiedenen Gesichtspunkten ausgeführte Untersuchungen vor. Wohl der erste, der dieses Problem behandelte, war Rayleigh.[1]) Er machte die Annahme, daß die eingelagerten Teilchen vollkommene Nichtleiter und äußerst klein gegenüber der Wellenlänge des Lichtes seien und zeigte, daß unter diesen Voraussetzungen von den Teilchen eine teilweise polarisierte diffuse Strahlung ausgeht, deren Intensität der vierten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional ist. Weitergeführt wurden die Untersuchungen an trüben Medien von J. J. Thomson[2]), der den dem Rayleighschen entgegengesetzten Grenzfall unendlich großer Leitfähigkeit der eingelagerten Teilchen erörterte. Beim Vergleich der Ergebnisse dieser Theorien mit den Resultaten experimenteller Untersuchungen auf diesem Gebiet traten in manchen Fällen deutliche Abweichungen hervor und zwar im wesentlichen bei den kolloiden Metalllösungen, deren Farbenerscheinungen durch die Theorie keine

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (4) 41. S. 107 u. 447. 1871; (5) 12. S. 81. 1881.

2) J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism. S. 363 u. 437. 1893.

Deutung fanden. Eine solche suchte F. Ehrenhaft[1]) durch die Annahme zu geben, daß es sich bei diesen Erscheinungen um eine optische Resonanz der unendlich gut leitenden Teilchen auf die einfallende Welle handelte. Im Gegensatz hierzu wies F. Pockels[2]) darauf hin, daß die Annahme der unendlich guten Leitfähigkeit den schnellen Lichtschwingungen gegenüber nicht zulässig sei, sondern daß in diesem Falle Werte der Leitfähigkeit zu verwenden seien, die den auf optischem Wege bestimmten Werten des Brechungsquotienten und des Absorptionskoeffizienten des massiven Metalls entsprächen. Auf dieser Grundlage führte Maxwell Garnett[3]) eine Theorie durch, durch welche er eine in manchen Fällen recht befriedigende Deutung der Farbenerscheinungen an kolloiden Metallösungen geben konnte. Die ganz allgemeine, alle genannten Spezialfälle umfassende Behandlung des Problems der Lichtausbreitung in trüben Medien rührt von G. Mie[4]) her, der die Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an kleinen Kugeln beliebigen Materials, die nur durch die optischen Konstanten des *massiven* Materials charakterisiert sind, entwickelte. Er führt eine allgemeine Integration der Maxwellschen Gleichungen für eine Kugel durch, wobei die Integrationskonstanten durch die an der Oberfläche geltenden Grenzbedingungen und damit durch die optischen Konstanten des Materials bestimmt sind. Für den Fall der Kugel, auf die eine ebene elektromagnetische Welle auftrifft, wird das allgemeine Integral der für die Feldstärke geltenden Differentialgleichungen durch eine Summe von Produkten aus Kugel- und Zylinderfunktionen dargestellt. Dieses allgemeine Integral läßt sich in zwei Gruppen von Partikulärintegralen spalten, die durch das Verschwinden der radialen Komponente der elektrischen bzw. magnetischen Kraft charakterisiert sind. Diese Partikulärintegrale stellen Partialschwingungen dar, die Mie als magnetische ($\mathfrak{E}_r = 0$) bzw. elektrische ($\mathfrak{H}_r = 0$) Schwingungen der Kugel bezeichnet. Diese Reihe von Partial-

1) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. **11**. S. 489. 1903; Phys. Ztschr. **5**. S. 387. 1904.

2) F. Pockels, Phys. Ztschr. **5**. S. 152 u. 460. 1904.

3) J. C. Maxwell Garnett, Phil. Trans. [a] **203**. S. 385. 1904 und **205**. S. 237. 1906.

4) G. Mie, Ann. d. Phys. **25**. S. 377. 1908.

wellen, als deren Summe die resultierende Welle anzusehen ist, konvergiert je nach der Größe der Teilchen mehr oder weniger schnell, so daß immer nur eine endliche Anzahl von Gliedern in Betracht zu ziehen ist. Auf Grund dieser Betrachtungen läßt sich das elektromagnetische Feld im Innen- und Außenraum der Kugel bestimmen und damit die durch die Kugel verursachte Absorption der auffallenden Welle, die von der Kugel ausgehende diffuse seitliche Ausstrahlung und die Polarisation dieser Strahlung berechnen. Diese zunächst für *eine* Kugel aufgestellte Theorie überträgt Mie auf trübe Medien in der Weise, daß er die Gesamtwirkung der eingelagerten Teilchen als Summe der Wirkung der einzelnen Teilchen auffaßt, d. h. er nimmt die Entfernung der Teilchen voneinander so groß an, daß die von den einzelnen Kugeln ausgehende Strahlung von den anderen Kugeln nicht mehr beeinflußt wird.

Weitergeführt wurde das Problem der Lichtausbreitung in trüben Medien durch R. Gans und H. Happel[1]), welche die Absorption und Dispersion kolloider Medien mit kugelförmigen in beliebiger Dichte gelagerten Partikeln behandelten. Später wurden dann diese Untersuchungen von R. Gans[2]) auch auf den Fall ausgedehnt, daß die eingelagerten Teilchen die Gestalt von Ellipsoiden besitzen.

Der von uns vorgenommenen Untersuchung der Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen leuchtender Flammen liegt die von Mie gegebene Theorie zugrunde; wir sehen also die Kohlenstoffteilchen in erster Näherung als kugelförmig, gleichmäßig und nicht allzu dicht gelagert an.

Zusammenstellung der für die Behandlung des vorliegenden Problems nötigen Gleichungen.

Fällt eine ebene unpolarisierte Welle auf ein kugelförmiges Teilchen auf, so läßt sich nach G. Mie die Intensität $\mathfrak{J}$ des in irgendeiner Richtung von dem Teilchen abgebeugten Lichtes aus zwei Summanden $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ zusammensetzen; hierbei ist $\mathfrak{J}_1$ die Intensität des Lichtes, dessen elektrischer Vektor *senkrecht* zu der Ebene, die durch die Beobachtungsrichtung und

1) R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. **29**. S. 277. 1909.
2) R. Gans, Ann. d. Phys. **37**. S. 881. 1912.

den einfallenden Strahl bestimmt ist (Beobachtungsebene), und $\mathfrak{J}_2$ die Intensität des Lichtes, dessen elektrischer Vektor in der Beobachtungsebene schwingt. Ist γ der Winkel zwischen Beobachtungsrichtung und einfallendem Strahl, λ die Wellenlänge des auffallenden Lichtes, und beobachtet man in einer Entfernung r vom Teilchen, die groß gegenüber der Wellenlänge ist, so sind nach Mie (a. a. O. S. 427) $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$, wenn man sie auf die Intensität des auffallenden Strahles als Einheit bezieht, durch folgende Ausdrücke bestimmt:

$$(1)\quad \mathfrak{J}_1 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2}\left|\sum_1^\infty \left\{\frac{a_\nu}{\nu(\nu+1)}\cdot \Pi_\nu + \frac{p_\nu}{\nu(\nu+1)}\cdot(v\cdot\Pi_\nu - (1-v^2)\cdot\Pi_\nu')\right\}\right|^2,$$

$$(2)\quad \mathfrak{J}_2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2}\left|\sum_1^\infty \left\{\frac{a_\nu}{\nu(\nu+1)}\cdot(v\cdot\Pi_\nu - (1-v^2)\cdot\Pi_\nu') + \frac{p_\nu}{\nu(\nu+1)}\cdot\Pi_\nu\right\}\right|^2.$$

Hierbei ist $v = \cos\gamma$ und

$$\Pi_\nu = \frac{1}{2^\nu}\sum_0^{\frac{\nu+1}{2}-1}(-1)^s\cdot\frac{(2\nu-2s)!\,v^{\nu-2s-1}}{(\nu-s)!\cdot s!\cdot(\nu-2s-1)!}.$$

a_ν und p_ν sind Konstanten, die bei der Integration der Maxwellschen Gleichungen durch Einführung der Grenzbedingungen bestimmt sind und damit die Materialkonstanten der Kugel enthalten. Die mit dem Koeffizienten a_ν auftretenden Glieder stellen die elektrischen, die mit dem Koeffizienten p_ν auftretenden die magnetischen Partialwellen dar. Wie Mie nachweist, ist bei Substanzen, die nicht vollkommene Leiter sind, die Größenordnung der νten elektrischen Welle ungefähr gleich der der $(\nu-1)$ten magnetischen Welle, so daß bei der Rechnung von den Gliedern, die p_ν enthalten, ein Glied weniger zu berücksichtigen ist, als bei den Gliedern mit a_ν. Die Koeffizienten a_ν und p_ν sind durch folgende Gleichungen[1]) bestimmt:

$$a_\nu = (2\nu+1)\cdot i^\nu\cdot\frac{\mathfrak{J}_\nu'(\alpha)\,\mathfrak{J}_\nu(\beta)\cdot\beta - \mathfrak{J}_\nu'(\beta)\cdot\mathfrak{J}_\nu(\alpha)\cdot\alpha}{K_\nu'(-\alpha)\,\mathfrak{J}_\nu(\beta)\cdot\beta - \mathfrak{J}_\nu'(\beta)\,K_\nu(-\alpha)\cdot\alpha}$$

$$p_\nu = -(2\nu+1)\cdot i^\nu\cdot\frac{\mathfrak{J}_\nu(\alpha)\cdot\mathfrak{J}_\nu'(\beta)\cdot\beta - \mathfrak{J}_\nu(\beta)\cdot\mathfrak{J}_\nu'(\alpha)\cdot\alpha}{K_\nu(-\alpha)\cdot\mathfrak{J}_\nu'(\beta)\cdot\beta - \mathfrak{J}_\nu(\beta)\cdot K_\nu'(-\alpha)\,\alpha}.$$

1) Vgl. G. Mie, a. a. O. S. 399.

$\mathfrak{Z}_\nu$ und K_ν sind mit den Zylinderfunktionen verwandte Funktionen[1]) mit den Variablen α und β; hierbei ist:

$$\alpha = \frac{2\pi\varrho}{\lambda},$$

und

$$\beta = m\alpha,$$

wo ϱ der Radius der beugenden Kugel und $m = n - in\varkappa$ der komplexe Brechungsquotient des Materials ist.

Nach diesen Formeln läßt sich also für jedes Material bei Kenntnis seiner optischen Konstanten und der Größe der Kugel die Gesamtstrahlung $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$ in Abhängigkeit sowohl von der Richtung wie auch von der Wellenlänge berechnen. Die Differenz $\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2$ gibt, da das senkrecht zur Beobachtungsebene und das in ihr schwingende Licht inkohärent ist, sich also zu unpolarisiertem Licht ergänzen kann, den Überschuß des polarisierten Lichtes über das unpolarisierte an.

$$\frac{\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2} = q \tag{3}$$

ist also der prozentuale Anteil an polarisiertem Licht und kann ebenfalls in seiner Abhängigkeit von der Richtung berechnet werden.

Um von allen diesen an *einer* Kugel gewonnenen Werten auf die von dem trüben Medium ausgehende Strahlung und ihre Polarisation zu schließen, ist es nach dem oben Gesagten nur nötig, diese Werte mit der Anzahl der Kugeln zu multiplizieren.

Zur Berechnung der Absorption des trüben Mediums berechnet Mie den durch eine Kugel hervorgerufenen Energieverlust des durch das Medium durchgehenden Strahles. Dieser Verlust setzt sich aus zwei Teilen zusammen, einmal der wirklichen Absorption in der Kugel und ferner der durch diese bedingten diffusen Ausstrahlung. Durch Multiplikation dieses für *eine* Kugel geltenden Wertes mit der Zahl N der Teilchen pro Kubikzentimeter ergibt sich für die Absorption k der Volumeinheit des Mediums die Gleichung[2])

$$k = N \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi} \mathfrak{J}m \left\{ \sum_1^\infty \nu (-1)^\nu (a_\nu - p_\nu) \right\}. \tag{4}$$

1) Vgl. G. Mie, a. a. O. S. 385f.
2) Vgl. G. Mie, a. a. O. S. 436.

Hierbei bedeutet das Symbol $\Im m$, daß von der eingeklammerten komplexen Größe nur der imaginäre Teil zu nehmen ist.

Die durch die diffuse Ausstrahlung allein hervorgerufene Absorption k' ist nach Mie bestimmt durch die Gleichung[1]):

$$k' = N \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_1^\infty \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1}. \tag{5}$$

Der durch wirkliche Absorption in den Teilchen selbst hervorgerufene Energieverlust des durchgehenden Strahles ist also:

$$\left\{ k'' = k - k' = N \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[\Im m \left\{ \sum_1^\infty (-1)^\nu (a_\nu - p_\nu) \right\} - \sum_1^\infty \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1} \right] \right. \tag{6}$$

II. Experimentelle Untersuchungen.

Von allen für die experimentelle Untersuchung des vorliegenden Problems in Betracht kommenden leuchtenden Kohlenstoffflammen erwies sich die Flamme der Hefnerkerze als besonders geeignet, weil sie sich durch sehr konstantes Brennen auszeichnet und, sowohl was Helligkeit als auch äußere Beschaffenheit anlangt, leicht wieder herstellbar ist.

Fig. 1.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, war es möglich, bei starker Bestrahlung der Flamme seitlich abgebeugtes Licht festzustellen und seine Intensität wie auch seine Polarisationseigenschaften mit genügender Genauigkeit zu messen. Infolge der geringen Intensität des abgebeugten Lichtes mußte eine äußerst intensive Lichtquelle zur Bestrahlung benutzt werden; als solche kam nur eine Bogenlampe in Betracht, da die Intensität anderer Lichtquellen zu gering war. Konzentriert man das Licht einer Bogenlampe sehr stark auf den am hellsten leuchtenden Teil der Flamme, so ist in dieser deutlich der Strahlengang des Bogenlampenlichtes wahrnehmbar (vgl. Fig. 1).

1) Vgl. G. Mie, a. a. O. S. 436.

Schon mit bloßem Auge kann man durch den bläulichen Schimmer des abgebeugten Lichtes feststellen, daß seine Intensität nach kürzeren Wellen hin zunimmt, eine Beobachtung, die sich durch Benutzung verschiedener Farbfilter leicht bestätigen läßt. Mit Hilfe eines Nicolschen Prismas läßt sich ohne weiteres die Polarisation des abgebeugten Lichtes und ihre Änderung mit der Richtung zum einfallenden Strahl nachweisen.[1])

Zur Untersuchung und Messung dieser Eigenschaften des abgebeugten Lichtes diente folgende Anordnung (Fig. 2): In

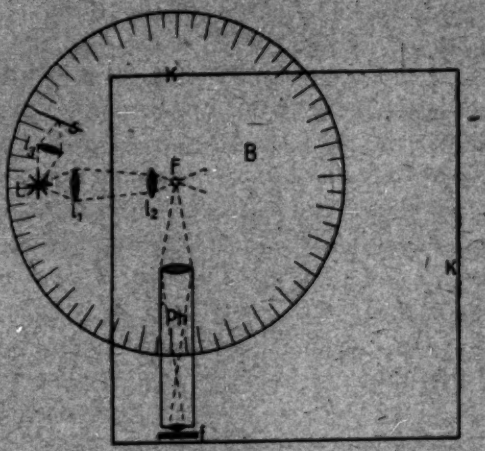


Fig. 2.

der Mitte eines kreisförmigen Brettes B, dessen Umfang mit einer in Grade eingeteilten Skala versehen ist und das einen Durchmesser von 100 cm besitzt, befindet sich die zu untersuchende Flamme F. An diesem Brett, das auf einem Kugellager befestigt und so leicht um seine Mitte drehbar ist, ist bei L die zur Bestrahlung benutzte Bogenlampe angebracht. Vermittelst der Linsen l_1 und l_2 wird das Licht dieser Bogenlampe auf die Flamme konzentriert, auf der dann das abgebeugte Licht als heller Fleck sichtbar wird. Zur Untersuchung des von ihm ausgehenden Lichtes dient das Photo-

1) Über die objektive Sichtbarmachung dieser Erscheinungen, welche ohne große Schwierigkeiten möglich ist, vgl. Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **32**. S. 130. 1919.

meter *Ph*, als welches je nach der Art der Versuche ein König-Martenssches Spektralphotometer[1]) oder ein Pyrometer nach Holborn-Kurlbaum[2]) mit einem Farbfilter *f* benutzt wurde. Um ein möglichst ruhiges Brennen der Flamme zu erzielen, das für die Messungen von größter Wichtigkeit war, mußten alle Luftströmungen im Zimmer, vor allem die durch die heiße Bogenlampe erzeugten von der Flamme ferngehalten werden. Zu diesem Zweck wurde ein sehr großer Glaskasten *K*[3]) in der in der Zeichnung angedeuteten Weise dicht über der Fläche des Teilkreises so aufgestellt, daß dadurch die Drehung desselben nicht beeinträchtigt wurde. Der Umstand, daß das Licht der Bogenlampe die Glaswände des Schutzkastens bei der Drehung unter verschiedenen Winkeln durchsetzte und dadurch eventuell durch verschiedene Reflexion und Polarisation geringe Änderungen erlitt, war für unsere Messungen, wie Vorversuche ergaben, unwesentlich. Da es von großer Wichtigkeit war, Intensitätsschwankungen der Bogenlampe zu vermeiden, wurde sowohl Stromstärke und Spannung wie die Bogenlänge, die durch Abbildung des Bogens vermittelst der Linse l_3 auf den Schirm *S* beobachtet werden konnte, konstant gehalten.

Was nun die Messung der Helligkeit des abgebeugten Lichtes betrifft, so wurde, um die Eigenhelligkeit der Flamme auszuschalten, stets so verfahren, daß zunächst die Summe der Helligkeiten der Flamme und des abgebeugten Lichtes und dann, nach Abblendung des Bogenlampenlichtes, die Eigenhelligkeit der Flamme bestimmt wurde. Die Differenz dieser beiden Messungsergebnisse ergab dann die Helligkeit des abgebeugten Lichtes. Was die Genauigkeit der Messungen anlangt, so betrug bei den Messungen mit dem Pyrometer der mittlere Fehler etwa 4 Proz., bei den mit dem Spektralphotometer ausgeführten Messungen 0,7 Proz. Da die Helligkeit des abgebeugten Lichtes im Verhältnis zu der der Flamme sehr klein ist, muß sich für die oben erwähnte Differenz ein kleiner Wert ergeben, demgegenüber die an sich kleinen Einstellungsfehler erheblich mehr ins Gewicht

1) F. F. Martens u. F. Grünbaum, Ann. d. Phys. 12. S. 984. 1903.
2) L. Holborn u. F. Kurlbaum, Ann. d. Phys. 10. S. 225. 1903.
3) Kleinere Schutzkästen erwiesen sich als unzweckmäßig, da die Flamme einen genügend großen Luftraum zur Verfügung haben muß.

fallen, so daß der endgültige Fehler bei Bestimmung der Helligkeit des abgebeugten Lichtes etwa 10 Proz. betrug.

Abhängigkeit der Helligkeit des abgebeugten Lichtes von der Richtung.

Zur Messung der Helligkeit des abgebeugten Lichtes in Abhängigkeit von der Richtung zum einfallenden Strahl wurde ein Pyrometer nach Holborn-Kurlbaum benutzt; der Schwerpunkt der Wellenlänge des hierbei verwandten Filters (Wratten and Wainwright *η*) liegt bei 491 $\mu\mu$. Die Verwendung des bei anderen Messungen gebrauchten König-Martensschen Spektralphotometers war im vorliegenden Falle unmöglich, da das in verschiedenen Richtungen verschieden stark polarisierte Licht in diesem Photometer infolge der selbst polarisierenden Meßvorrichtungen desselben nicht untersucht werden konnte. Die Ausführung der Messungen geschah in der Weise, daß der Teilkreis mit der Bogenlampe in verschiedene Stellungen gebracht wurde, wobei der Winkel zwischen dem auf die Flamme auftreffenden Lichtstrahl und der Beobachtungsrichtung an der Skala des Brettes abgelesen werden konnte. Die Messungen der Helligkeit in den einzelnen Richtungen wurden auf die Helligkeit bei einem Winkel von 90° als Ausgangspunkt bezogen, welcher mehrfach während einer Messungsreihe auf seine Konstanz geprüft wurde. Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Tab. 1, Spalte 2, zusammengestellt, die die Mittelwerte von 10 Meßreihen enthält.

Tabelle 1.

Winkel zwischen Beobachtungsrichtung und einfallendem Strahl γ	Helligkeit d. abgebeugten Lichtes $(\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2)$	
	beobachtet	berechnet
45°	73	70,6
55	75	70,6
65	87	73,2
80	95	85,2
90	100	100,0
100	122	122,0
112	154	161,4
125	203	214,5
138	277	272,0
155	338	347,5

In Fig. 8 ist der Verlauf der Intensität mit der Richtung in der Weise graphisch dargestellt, daß im Punkte F die

Flamme zu denken ist und nach den verschiedenen Richtungen hin die Intensitäten als Längen aufgetragen sind. Die so festgelegten Punkte sind mit *** bezeichnet. Man erkennt aus der Zeichnung, daß die Intensität in Richtung des einfallenden Strahles erheblich größer ist als in der entgegengesetzten Richtung. Dieser Umstand weist, wie Mie

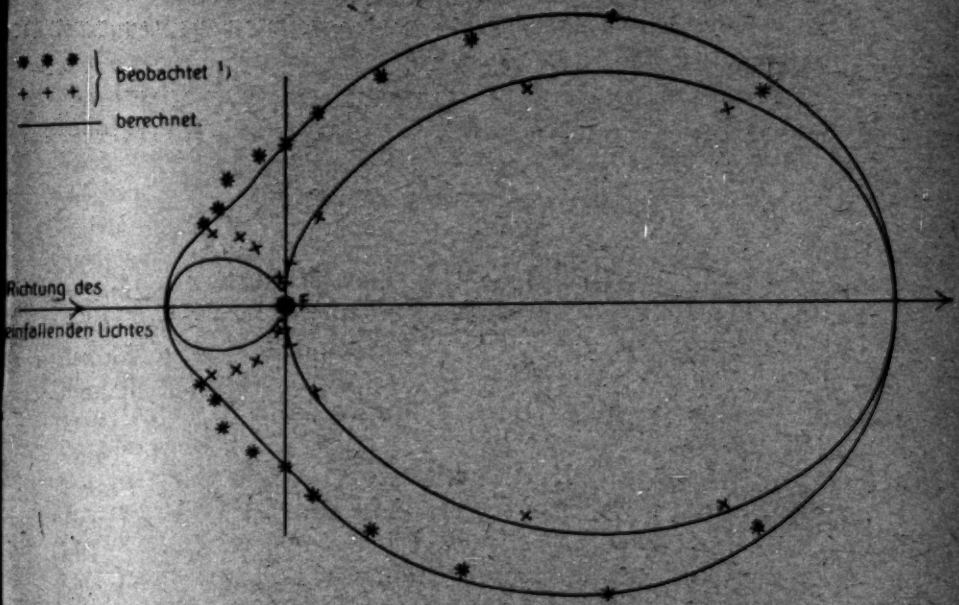


Fig. 3.

an dem Beispiel von kolloiden Goldlösungen zeigte, darauf hin, daß das trübe Medium sehr grobe Teilchen enthält. Da wir bei der Flamme für die Größe der Teilchen keinen Anhaltspunkt hatten, haben wir auf Grund der Mieschen Theorie (vgl. Formeln (1) u. (2), S. 301) unter Benutzung verschiedener Teilchendurchmesser versucht, eine Ausstrahlungskurve zu berechnen, die sich der gemessenen nach Möglichkeit anschließt. Für die zu dieser Rechnung notwendigen Werte der optischen Konstanten der Kohle benutzten wir die von uns früher[2]) ermittelten Werte des Brechungsquotienten und des Ab-

1) Die innere Kurve +++ bezieht sich auf Polarisationsmessungen, vgl. S. 310.

2) H. Senftleben u. E. Benedict, Ann. d. Phys. 54. S. 65. 1917.

sorptionskoeffizienten der Kohle.[1]) Bei der Durchführung dieser Rechnungen, die, wie die Formeln S. 301 zeigen, überaus langwierig sind, zeigte es sich, daß bei den für den vorliegenden Fall in Betracht kommenden Teilchendurchmesser die Reihe der Partialwellen so konvergiert, daß drei elektrische und zwei magnetische Partialwellen berücksichtigt werden mußten. Für die Koeffizienten der Reihe ergaben sich z. B. für die Wellenlänge $\lambda = 491\ \mu\mu$ und für den Teilchendurchmesser $2\varrho = 175\ \mu\mu$ die Werte:

$$a_1 = 0{,}72 - 1{,}045\,i,$$
$$a_2 = -0{,}1628 + 0{,}0765\,i,$$
$$a_3 = 0{,}00736 - 0{,}00268\,i,$$
$$p_1 = -0{,}0595 + 0{,}392\,i,$$
$$p_2 = 0{,}0128 - 0{,}021\,i.$$

Es ließ sich nun in der Tat eine Ausstrahlungskurve berechnen, und zwar bei einem Teilchendurchmesser $2\varrho = 175\ \mu\mu$, deren Verlauf mit dem der gemessenen Kurve befriedigend übereinstimmte. Die Werte der für verschiedene Richtungen berechneten Intensität sind in Tab. 1, Spalte 3, enthalten.[2]) Die berechnete Kurve ist in Fig. 3 durch die ausgezogene Linie dargestellt. Die Abweichungen beider Kurven voneinander liegen, wie man erkennt, innerhalb der Fehlergrenzen. Wir haben auf Grund dieser Übereinstimmung den bei der hier besprochenen Rechnung erhaltenen Teilchendurchmesser für alle weiteren Untersuchungen zugrunde gelegt. Die Bestimmung des Teilchendurchmessers schlossen wir an die Messungen über die Abhängigkeit der Intensität von der *Richtung* an, da sich diese Art der Festlegung gegenüber den anderen Möglichkeiten, diese Größe aus der Absorption, Polarisation oder spektralen Energieverteilung des abgebeugten Lichtes zu bestimmen, als die empfindlichste erwies.

Mit der Festlegung des Teilchendurchmessers sind alle Konstanten des trüben Mediums bis auf die Zahl der Teilchen

1) Wir haben diese an Kohle in kaltem Zustande bestimmten Werte ($n = 1{,}95$, $n\,\varkappa = 0{,}66$) auch für die glühenden Kohlenstoffteilchen anwenden können, da, wie bereits in der früheren Arbeit erwähnt ist, das Reflexionsvermögen der Kohle keinen merklichen Gang mit der Temperatur zeigt.

2) Hierbei sind die berechneten Werte mit den gemessenen bei dem Winkel von 90° zur Deckung gebracht.

in der Volumeneinheit bestimmt; gemäß der Theorie [vgl. S. 301 ff.] ist es nunmehr möglich, die absolute Größe und den Verlauf der Polarisation mit der Richtung und weiterhin die Abhängigkeit der Absorption des Mediums und der Intensität des abgebeugten Lichtes von der Wellenlänge ohne Zuhilfenahme weiterer Annahmen zu berechnen. Zur Bestimmung des *Absolutwertes* der Absorption und der Intensität des abgebeugten Lichtes ist außerdem noch die Kenntnis der Zahl der Teilchen in der Volumeneinheit notwendig, auf deren Bestimmung später eingegangen werden wird.[1])

Die Polarisation des abgebeugten Lichtes.

Was die Polarisationseigenschaften des abgebeugten Lichtes betrifft, so erwies sich dieses, wie bereits erwähnt, als zum Teil linear polarisiert, und zwar lag die Schwingungsebene des elektrischen Vektors senkrecht zur Beobachtungsebene. Zur Untersuchung dieser Polarisationseigenschaften wurde bei der oben beschriebenen Versuchsanordnung (vgl. S. 304) vor dem Pyrometer ein Nicolsches Prisma eingefügt. Es wurde dann die Helligkeit des abgebeugten Lichtes bei zwei Stellungen des Nicols gemessen: 1. wenn seine Schwingungsebene parallel (Hellstellung) und 2. wenn sie senkrecht (Dunkelstellung) zu der des abgebeugten Lichtes stand. Ferner wurde die Eigenhelligkeit der Flamme durch den Nicol hindurch bei Abblendung des Bogenlampenlichtes bestimmt. Die bei diesen Messungen erhaltenen Helligkeitswerte seien A, B, C. Bezeichnet man den Schwächungsfaktor des Nicolschen Prismas für unpolarisiertes Licht mit u, für linear polarisiertes, parallel zu seiner eigenen Schwingungsebene schwingendes Licht mit v, die Eigenhelligkeit der Flamme mit H_v, die Helligkeit des polarisierten Anteils des abgebeugten Lichtes mit H_p, die des unpolarisierten Anteils mit H_u, so gilt:

1. bei der Hellstellung des Nicols: $H_v \cdot u + H_p \cdot v + H_u \cdot u = A$,
2. bei der Dunkelstellung des Nicols: $H_v \cdot u + H_u \cdot u = B$,

die 3. Messung besagt: $H_v \cdot u = C$.

Aus diesen Gleichungen folgt der Prozentsatz des polarisierten Lichtes:

$$\frac{H_p}{H_u + H_p} = \frac{A - B}{\frac{v}{u}(B - C) + (A - B)}.$$

1) Vgl. S. 320.

Der Schwächungsfaktor u wurde in der Weise bestimmt, daß die Helligkeit der Flamme mit und ohne dazwischengeschaltetes Nicolsches Prisma gemessen wurde. Zur Bestimmung des Schwächungsfaktors v wurde das Licht der Flamme durch ein anderes Nicolsches Prisma zunächst linear polarisiert und dann die Helligkeit dieses polarisierten Lichtes ohne und mit dem zu prüfenden Nicol, dessen Schwingungsebene der des anderen Nicol parallel stand, festgestellt. Es ergab sich aus diesen Messungen für u der Wert 0,85, für v der Wert 0,42.

Mit Hilfe dieser Werte konnte man in der eben angegebenen Weise den Prozentsatz des polarisierten Lichtes in seiner Abhängigkeit von der Richtung zum einfallenden Strahl bestimmen. Bei den zur Bestimmung der Größen A, B, C nötigen Messungen wurde analog verfahren wie bei den oben beschriebenen Messungen der Intensität des abgebeugten Lichtes (vgl. S. 306), indem auch hier als Ausgangs- und Kontrollpunkt die Messung bei einem Einfallswinkel von 90° zugrunde gelegt wurde. Infolge der durch die Einschaltung des Nicols bedingten geringen Lichtstärke waren die Einstellungen in diesem Falle etwas ungenauer wie bei den vorher besprochenen Messungen. Wie bei diesen wurde hier wieder das Filter mit der wirksamen Wellenlänge $\lambda = 491\ \mu\mu$ benutzt. Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Spalte 2 der Tab. 2 enthalten, und

Tabelle 2.

Winkel zwischen Beobachtungsrichtung und einfallendem Strahl γ	Polaris. Anteil d. abgebeugten Lichtes in % $(\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2) : (\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2)$	
	beobachtet	berechnet
45°	10,4	42,3
55	31,1	61,1
63	54,3	75,0
80	81,4	90,5
85	82,0	90,0
90	85,3	86,7
95	82,0	81,5
100	78,5	75,5
112	61,7	56,0
138	25,7	20,5
155	7,8	7,2

in Fig. 4 ist der Verlauf dieser Größe durch +++ wiedergegeben. Die Ergebnisse lassen deutlich erkennen, daß un-

gefähr bei einem Winkel von 90° oder etwas darunter die Polarisation ein Maximum erreicht und hier das Licht bis zu 85% polarisiert ist. Nach größeren und kleineren Winkeln hin findet ein Abfall des polarisierten Anteils statt. Nach der Theorie ist der Prozentsatz des polarisierten Lichtes durch den Quotienten $\frac{\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2}$ gegeben, und da nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen alle zur Berechnung dieser Größen nötigen Werte bekannt sind, ist es möglich, einen Vergleich

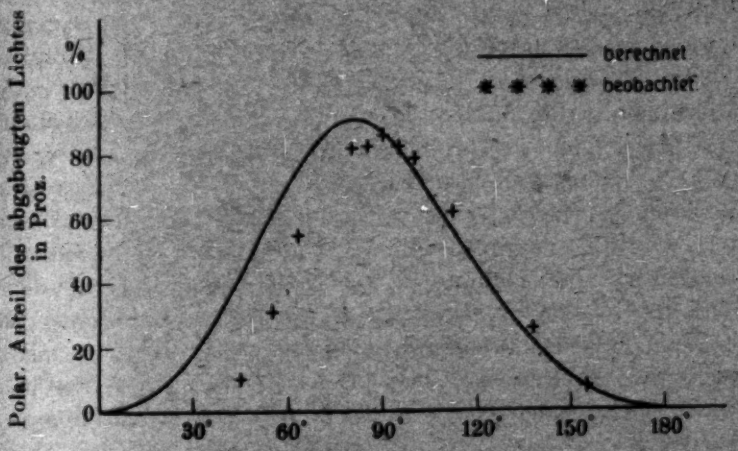


Fig. 4.

der Messungsergebnisse mit der Theorie vorzunehmen, sowohl was die absolute Größe des polarisierten Anteils als seinen Verlauf mit der Richtung betrifft. Diese berechneten Werte sind in Tab. 2 in Spalte 3 und in Fig. 4 durch die ausgezogene Kurve dargestellt. Die Lage des Maximums und sein Absolutwert stimmen in beiden Kurven sehr befriedigend überein, ebenso ihr Abfall nach größeren Winkeln, während bei dem Abfall nach kleineren Winkeln eine deutliche Differenz zwischen Beobachtung und Messung besteht. Diese Abweichung läßt sich kaum durch Messungsungenauigkeiten erklären, sondern ist möglicherweise in der etwas weitgehenden Idealisierung

des Problems zu suchen.[1]) Immerhin bildet aber die gefundene Übereinstimmung der Lage und absoluten Größe des Maximums der Polarisation eine Stütze der hier zugrunde gelegten Anschauungsweise.

Diese Polarisationsmessungen erlauben weiterhin eine Entscheidung darüber zu treffen, ob die Kohlenstoffteilchen in der Flamme in der Modifikation der amorphen Kohle oder des Graphits auftreten.[2]) Benutzt man die optischen Konstanten des Graphits[3]) zur Berechnung der Intensitäts- und Polarisationseigenschaften des abgebeugten Lichtes, so läßt sich zunächst auch eine Ausstrahlungskurve berechnen, die sich der gemessenen Intensitätsverteilung in verschiedenen Richtungen anschließt. Dadurch wäre also nach den obigen Auseinandersetzungen auch für Graphit die Teilchengröße bestimmt. Berechnet man nun unter Zugrundelegung dieses Wertes die Polarisationseigenschaften des abgebeugten Lichtes, so zeigt sich ein Verlauf der Stärke der Polarisation, der mit dem gemessenen in keiner Weise in Einklang zu bringen ist. Das Maximum ist deutlich nach Winkeln, die $> 90^0$ sind, verschoben, und der Abfall zeigt erheblich größere Abweichung von den gemessenen Werten als die für amorphe Kohle berechnete Kurve; vor allem müßte beim Graphit das abgebeugte Licht bei Winkeln unterhalb von 60^0 nicht mehr senkrecht zur Beobachtungsebene, sondern in derselben schwingen, was für die amorphe Kohle bei Winkeln von dieser Größe ausgeschlossen erscheint. Hieraus folgt, daß die Kohlenstoffteilchen in der Flamme im wesentlichen die optischen Eigenschaften der amorphen Kohle besitzen.

Die Intensität des abgebeugten Lichtes in Abhängigkeit von der Wellenlänge.

Für die Messungen der Intensität des abgebeugten Lichtes in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge wurde die auf

1) In Ungenauigkeiten der optischen Konstanten der Kohle kann, wie zu diesem Zwecke ausgeführte Rechnungen zeigen, der Grund für diese Abweichung nicht gesucht werden.

2) Diese Möglichkeit erscheint nicht ausgeschlossen, da sich die Kohle beim Glühen in einer Kohlenwasserstoffatmosphäre unter Umständen mit einer Graphitschicht überzieht, ein Umstand, der beim Präparieren von Glühlampenfäden benutzt wird.

3) H. v. Wartenberg, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 12. S. 103. 1910.

S. 304 angegebene Versuchsanordnung dahin abgeändert, daß an Stelle des Pyrometers ein König-Martenssches Photometer benutzt wurde. Dies konnte hier Verwendung finden, da diese Messungen sämtlich unter demselben Einfallswinkel von 90° vorgenommen wurden, und sich infolgedessen die Polarisationsverhältnisse während der Messung nicht änderten. Da die Ausdehnung der Flamme nicht genügte, um das Photometer gleichmäßig mit Licht zu erfüllen, wurde vor den einen Spalt desselben eine Mattscheibe gestellt und ihre Helligkeit bestimmt, wenn sie 1. von der *bestrahlten* Flamme und 2. wenn sie von der Flamme *allein* beleuchtet wurde. Die Differenz dieser beiden Helligkeitswerte ergab die von dem abgebeugten Licht herrührende Intensität. Zur Berücksichtigung der in diesen Werten mit enthaltenen Intensitätsverteilung der Bogenlampe wäre eine besondere Messung dieser Verteilung notwendig gewesen. Um die hierdurch eintretende größere Ungenauigkeit des endgültigen Ergebnisses zu vermeiden, wurde die Bogenlampe selbst als Vergleichslichtquelle benutzt. Zu diesem Zweck wurde zwischen Linse l_1 und l_2 eine unter 45° zum Strahlengang geneigte Glasplatte eingefügt und mit Hilfe eines Silberspiegels eine Mattscheibe beleuchtet, deren Licht vermittelst eines total reflektierenden Prismas ins Photometer gelangte. Sind die Einstellungen bei den oben beschriebenen Messungen a und b, und ist H_B die zwar durch Spiegel und Mattscheiben geschwächte, aber in ihrer spektralen Verteilung nicht geänderte Intensität der Bogenlampe, so folgt:

$$\text{Helligkeit}_{\text{d. abgebeugt. Lichtes}} = (a - b) \cdot H_B .$$

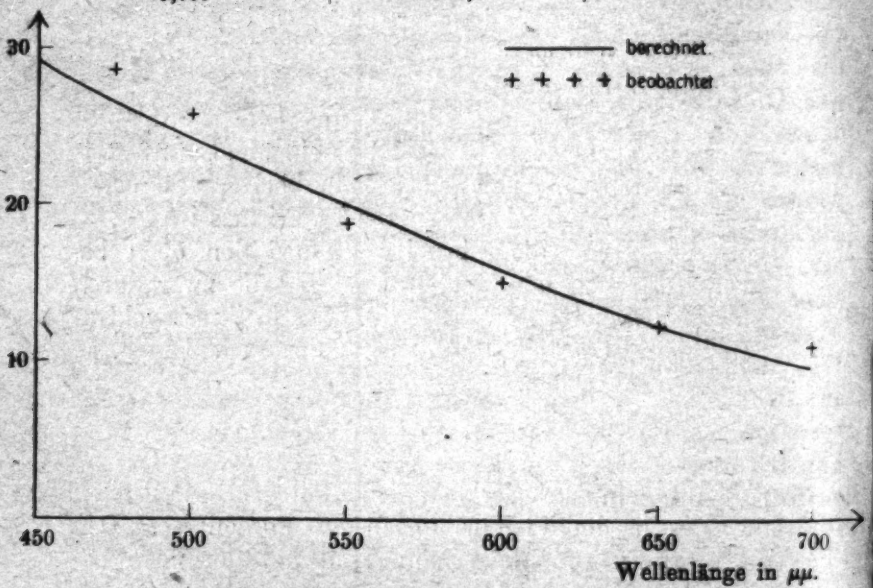
$(a - b)$ ist also ein Maß für den Bruchteil der auffallenden Strahlung, der in der Flamme abgebeugt worden ist. Den Absolutwert dieses Bruchteils kann man mit der eben beschriebenen Anordnung nicht bestimmen, was aber zunächst nicht ins Gewicht fällt, da es sich vorläufig nur darum handelt, die Intensitäts*abhängigkeit* von der Wellenlänge zu bestimmen. Auf die Bestimmung dieses Absolutwertes wird später näher eingegangen werden (vgl. S. 321). Der Wellenlängenbereich, innerhalb dessen die Helligkeit des abgebeugten Lichtes genügend genaue Messungen gestattete, erstreckte sich von $\lambda = 475\ \mu\mu$ bis $\lambda = 700\ \mu\mu$. Obgleich die mittleren Ab-

weichungen bei den Einstellungen nur 0,7% betrugen, betragen infolge der oben erwähnten Differenzbildung die Fehler des Endergebnisses etwa 10%. Die Ergebnisse sind in Tab. 3, Spalte 2 und in Fig. 5 enthalten. Die Werte der Intensität

Tabelle 3.

Abhängigkeit der Intensität des unter 90° abgebeugten Lichtes von der Wellenlänge.

λ	S_{90} beobachtet	S_{90} berechnet
0,475 μ	286,2	263,0
0,500	256,8	242,0
0,550	187,0	199,0
0,600	150,0	157,0
0,650	123,3	123,3
0,700	110,0	96,5



Intensität des unter 90° abgebeugten Lichtes.

Fig. 5.

zeigen eine starke Zunahme nach kürzeren Wellen hin, worauf bereits der bläuliche Schimmer des abgebeugten Lichtes schließen ließ. Auf Grund der in Formel (1) und (2), S. 301, enthaltenen Beziehungen wurden diese Messungsergebnisse mit der Theorie verglichen. Die berechneten Werte sind in Tab. 3 in Spalte 3

enthalten und in Fig. 5 durch die ausgezogene Kurve wiedergegeben. Da die Berechnung ebenso wie die Messung nur den *Verlauf* der Intensität gibt, mußten die beiden Kurven an einem Punkte (bei $\lambda = 650\,\mu\mu$) zur Deckung gebracht werden. Wie aus der Figur ersichtlich ist, zeigen die beiden Kurven nur Abweichungen, die innerhalb der Fehlergrenzen liegen.

Der Verlauf der Absorption mit der Wellenlänge.

Über den Verlauf der Absorption der Flamme mit der Wellenlänge liegen bereits Arbeiten von R. Ladenburg[1]) und A. Becker[2]) vor, aus denen hervorgeht, daß dieser Verlauf ein gänzlich anderer ist wie bei der massiven Kohle, deren optische Eigenschaften von uns in einer früheren Arbeit[3]) untersucht worden sind, ein Unterschied, der ursprünglich die Veranlassung zu der vorliegenden Untersuchung gab. Die eben erwähnten Arbeiten ebenso wie Abhandlungen von O. Lummer und E. Pringsheim, sowie F. Kurlbaum, in denen das Emissionsvermögen der Flamme bestimmt wird, haben im wesentlichen das Ziel, die Temperatur der Flamme festzulegen. Die ältesten dieser Untersuchungen rühren von O. Lummer und E. Pringsheim[4]) her. Diese schlossen aus Messungen des Emissionsvermögens einer Kerze unter einer gewissen Voraussetzung[5]) über ihr Absorptionsvermögen, daß die Temperatur der Kerze zwischen 1750° und 1960° liegen müsse. Auf anderem Wege, nämlich auf Grund von Umkehrmessungen, bei denen das Reflexionsvermögen der Flamme vernachlässigt wurde, gelangte F. Kurlbaum[6]) zu dem Werte von 1704° abs. Lummer und Pringsheim[7]) glaubten diese Abweichung auf die Vernachlässigung

1) R. Ladenburg, Phys. Ztschr. 7. S. 697. 1906.

2) A. Becker, Ann. d. Phys. 28. S. 1017. 1909.

3) H. Senftleben u. E. Benedict, a. a. O.

4) O. Lummer u. E. Pringsheim. Verhandl. d. Phys. Ges. 3. S. 36. 1901.

5) Diese Voraussetzung bestand darin, daß die Strahlungseigenschaften der Kerze zwischen den voneinander sehr verschiedenen des schwarzen Körpers und des blanken Platins lägen.

6) F. Kurlbaum, Phys. Ztschr. 3. S. 187. 1902.

7) O. Lummer u. E. Pringsheim, Phys. Ztschr. 3. S. 233. 1902.

des Reflexionsvermögens zurückführen zu können, doch wies Kurlbaum[1]) durch direkte Messungen desselben nach, daß dieses äußerst gering und damit seine Annahme und die auf ihr fußende Temperaturbestimmung richtig sei. Aus diesem Temperaturwert von 1704° und den Lummer-Pringsheimschen Emissionsmessungen folgt ein sehr selektiver Verlauf des Absorptionsvermögens der Kerze, der nicht in das durch die Lummer-Pringsheimsche Annahme festgelegte Bereich fällt (vgl. Anmerk. 5, S. 315).

Direkte Messungen des Absorptionsvermögens wurden im ultraroten und sichtbaren Spektralgebiet von R. Ladenburg[2]) und A. Becker[3]) durchgeführt. Aus diesen Messungen folgt eine sehr starke Abhängigkeit des Absorptionsvermögens von der Wellenlänge, mit deren Zunahme es stark abnimmt. Die Temperaturwerte, die sich aus diesen Untersuchungen ergeben, $T = 1678°$ (nach Ladenburg) und $T = 1670°$ (nach Becker) stehen in guter Übereinstimmung mit dem Kurlbaumschen Wert. Beide Autoren sprechen bereits die Anschauung aus, daß die Flamme als trübes Medium betrachtet werden könne und Becker vergleicht den von ihm gemessenen Verlauf des Absorptionsvermögens mit demjenigen, der aus der Annahme folgen würde, daß die Absorption von der seitlichen Ausstrahlung herrühre und diese dem Rayleighschen Gesetz folgt (vgl. S. 298). Er findet keine Übereinstimmung, da sich die Absorption in der Flamme nach Rayleigh umgekehrt mit der 4. Potenz der Wellenlänge ändern müßte, während die Messungen einen Gang, der umgekehrt proportional der 1,4. Potenz der Wellenlänge ist, ergeben.

Becker weist darauf hin, daß infolge der Beschaffenheit der Flamme diese Absorptionsmessungen mit verhältnismäßig großen Fehlern behaftet sind, und wir kamen bei möglichst exakter Wiederholung dieser Messungen zu dem gleichen Resultat. Daher haben wir es für zweckmäßig gefunden, auf andere Weise zur Bestimmung des Absorptionsvermögens zu gelangen, und zwar auf dem Wege über Emissionsmessungen, deren Genauigkeit sich gegenüber den Absorptionsmessungen

---

1) F. Kurlbaum, Phys. Ztschr. 3. S. 332. 1902.
2) R. Ladenburg, a. a. O.
3) A. Becker, a. a. O.

steigern ließ. Ist der Verlauf des Emissionsvermögens eines Strahlers von der Temperatur T_w mit der Wellenlänge bekannt und läßt sich eine Temperatur T_s des schwarzen Körpers finden, bei der sich seine Emissionskurve mit der des Strahlers ihrem Verlaufe nach deckt, so besteht zwischen dem Emissionsvermögen des Strahlers $E_{\lambda T_w}$ und dem des schwarzen Körpers $e_{\lambda T_s}$ die Beziehung:

$$\frac{E_{\lambda T_w}}{e_{\lambda T_s}} = \text{const.} \tag{7}$$

oder unter Benutzung des Kirchhoffschen Gesetzes in Verbindung mit der Wienschen Spektralgleichung:

$$\frac{A_\lambda e^{-\frac{c_2}{\lambda T_w}}}{e^{-\frac{c_2}{\lambda T_s}}} = \text{const.}, \tag{8}$$

wo A_λ das Absorptionsvermögen für die Wellenlänge λ bedeutet.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\log A_\lambda - \frac{c_2}{\lambda}\left(\frac{1}{T_w} - \frac{1}{T_s}\right)\log e = \text{const.} \tag{9}$$

Ist A_λ für eine Wellenlänge bekannt, so läßt sich die Konstante berechnen und mit ihrer Hilfe dann der weitere Verlauf des Absorptionsvermögens rechnerisch festlegen.

Die Intensitätsverteilung der Hefnerkerze in einem Wellenlängenbereich von $\lambda = 500\ \mu\mu$ bis $\lambda = 700\ \mu\mu$ wurde mit einem König-Martensschen Spektralphotometer bestimmt. Hierbei konnte als Vergleichslichtquelle nicht direkt ein schwarzer Körper benutzt werden, da die durch dessen hohe Temperatur hervorgerufenen warmen Luftströmungen im Zimmer ein einigermaßen ruhiges Brennen der Hefnerkerze ausschlossen. Deshalb wurde die Helligkeit der Hefnerkerze zunächst mit der Helligkeit eines mit konstanter Stromstärke brennenden Nernstfadens verglichen, der dann unter sonst gleich bleibenden Verhältnissen mit einem schwarzen Körper bezüglich seiner Helligkeit verglichen wurde. In der Tat zeigte sich nun bei den Emissionsmessungen an der Hefnerkerze, daß sich eine Temperatur des schwarzen Körpers finden ließ, für die seine Emissionskurve sich innerhalb der Fehlergrenzen mit der der Flamme zur Deckung bringen ließ. Der Wert dieser Temperatur beträgt 1850°, in guter Überein-

stimmung mit einem von Ångström[1]) und von Leder[2]) auf die gleiche Weise gefundenen Werte der Temperatur von 1830°. Als Wert der wahren Temperatur der Hefnerkerze benutzten wir den von uns[3]) bestimmten Wert von 1690° abs., welcher mit den oben erwähnten Bestimmungen befriedigend übereinstimmt. Den nach den obigen Darlegungen als Ausgangspunkt nötigen Wert des Absorptionsvermögens bestimmten wir in derselben Weise wie Becker mit einem König-Martens-schen Spektralphotometer bei einer Wellenlänge von $\lambda = 666\,\mu\mu$. Aus einer großen Reihe von Messungen folgte in guter Übereinstimmung mit Becker der Wert von 15%.[4]) Aus diesem Werte und den oben angegebenen Temperaturen folgen aus Gleichung (9) die in Tab. 4, Spalte 2, wiedergegebenen Werte des

Tabelle 4.

Abhängigkeit des Absorptionsvermögens von der Wellenlänge.

λ	A_λ in % beobachtet	berechnet
0,500 μ	21,8	20,6
0,550	19,0	19,0
0,600	17,0	17,4
0,650	15,5	15,9
0,700	14,3	14,7

Absorptionsvermögens. Wie man erkennt, zeigt dieses einen äußerst starken Gang mit der Wellenlänge; in dem untersuchten Spektralgebiet ändert es sich um etwa 44%. Vergleicht man damit die Absorptionswerte der massiven Kohle, wie sie sich aus Emissionsmessungen[5]) ergeben und wie wir sie aus Reflexionsmessungen gewonnen haben, so fällt ohne weiteres der große Unterschied der an der Kohle in massivem und fein verteiltem Zustande gewonnenen Ergebnisse auf.

1) K. Ångström, Ann. d. Phys. **67.** S. 647. 1899; Phys. Ztschr. **8.** S. 257. 1902. Energie dans le spectre visible de l'étalon Hefner. Upsala 1903. Phys. Ztschr. **5.** S. 456. 1904.

2) F. Leder, Ann. d. Phys. **24.** S. 305. 1907.

3) H. Senftleben u. E. Benedict, Phys. Ztschr. **19.** S. 180. 1918.

4) In diesem Wert ist der Anteil des zerstreuten Lichtes mitenthalten; eine Berücksichtigung desselben erwies sich jedoch infolge seines geringen Betrages als nicht nötig.

5) O. Lummer, Verflüssigung der Kohle und Herstellung der Sonnentemperatur. Vieweg, Braunschweig 1914.

Aus den Emissionsmessungen, die Lummer an Glühlampenkohle vorgenommen hat, folgt im sichtbaren Spektralgebiet praktisch völlige Konstanz des Absorptionsvermögens. Aus den Reflexionsmessungen, die wir[1]) an Kohlespiegeln ausgeführt haben, folgt in demselben Spektralgebiet ein fast unmerklicher, nur etwa 1,5% betragender Gang des Absorptionsvermögens mit der Wellenlänge. Dieser große Unterschied findet seine Aufklärung durch die Anschauung, daß die optischen Eigenschaften der Flamme durch die Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen bedingt sind. Berechnet man nach der Gleichung (6), S. 303, den Verlauf

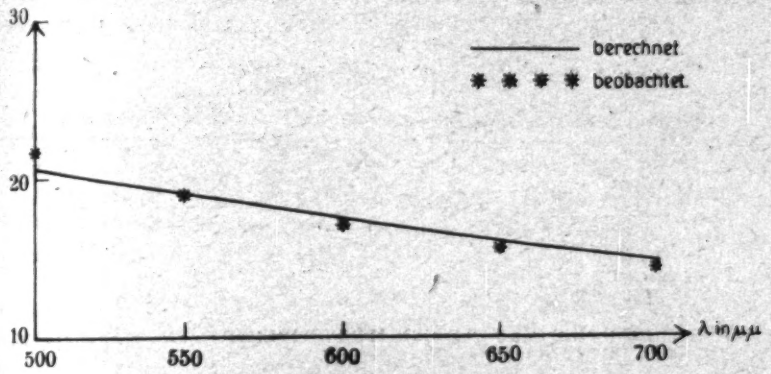


Fig. 6.

der Absorption mit der Wellenlänge, so erhält man die in Tab. 4, Spalte 3, wiedergegebenen Werte. Die Gleichungen S. 303 ergeben zunächst, da die Zahl N der leuchtenden Kohlenstoffteilchen nicht bekannt ist,[2]) nur den Verlauf des Absorptionsvermögens mit der Wellenlänge. Um einen Vergleich mit den gemessenen Werten vornehmen zu können, muß daher ein berechneter und ein beobachteter Wert des Absorptionsvermögens einander gleichgesetzt werden; dies ist bei $\lambda = 550\ \mu\mu$ für $A_\lambda = 19{,}0\ \%$ geschehen. Aus der Tabelle wie auch aus der die gleichen Ergebnisse enthalten-

1) A. a. O.
2) Vgl. nächsten Abschnitt.

den Fig. 6 ist zu entnehmen, daß die Übereinstimmung zwischen Messung und Berechnung überaus befriedigend ist.[1])

Bestimmung der Zahl der Kohlenstoffteilchen in der Volumeneinheit.

Infolge des Ergebnisses, daß die beobachteten Absorptionseigenschaften ebenso wie die übrigen optischen Eigenschaften der Flamme mit der Theorie in gutem Einklang stehen, war es nunmehr möglich, aus ihnen die letzte der noch zu bestimmenden Konstanten der Flamme, nämlich die Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit zu bestimmen. Nach Formel (6), S. 303, ist k'' die von der Volumeneinheit absorbierte Energie, bezogen auf die Intensität der auffallenden Welle als Einheit. Beträgt die Dicke der Flamme in dem untersuchten Teil d cm (durch Ausmessung auf der Photographie ergibt sich d zu 0,6 cm) und bezeichnet man mit A_λ das Absorptionsvermögen für die Wellenlänge λ, so ist, falls die Intensität der auffallenden Strahlung gleich eins gesetzt wird, die in der Volumeneinheit absorbierte Energie[2]):

$$k'' = \frac{A_\lambda}{d} = N \frac{\lambda^3}{2\pi} \left[\Im m \left\{ \sum_1^\infty (-1)^\nu (a_\nu - p_\nu) \right\} - \sum_1^\infty \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1} \right].$$

Benutzt man für das Absorptionsvermögen den Wert $A_{\lambda = 550} = 0{,}19$, so ergibt sich für N der Wert $9{,}8 \cdot 10^8$. Durch die Kenntnis dieser Größe ist es nunmehr möglich, wie bereits erwähnt, den Wert der Gesamtintensität des abgebeugten Lichtes im Verhältnis zu der der auffallenden Strahlung zu berechnen. Nach Gleichung (5), S. 303, ist der Gesamtbetrag der von N Teilchen abgebeugten Energie:

$$k' = N \frac{\lambda^3}{2\pi} \sum_1^\infty \frac{|a_\nu|^2 + |p_\nu|^2}{2\nu + 1}.$$

Unter Benutzung der in den vorhergehenden Abschnitten festgelegten Konstanten der Flamme folgt für die von der

1) Nach Messungen von A. Becker (a. a. O.) zeigt Ruß einen ganz ähnlichen Verlauf des Absorptionsvermögens wie die Flamme, woraus man schließen kann, daß hier ganz analoge Verhältnisse vorliegen.

2) Hierbei ist die vereinfachende Voraussetzung gemacht, daß die Teilchen gleichmäßig gelagert sind, während in Wirklichkeit an den Flammenrändern die Dichte etwas größer ist als in der Mitte.

Volumeneinheit abgebeugte Energie (wieder bezogen auf die auffallende Energie als Einheit) für $\lambda = 650\ \mu\mu$: $k' = 0{,}044$.

Eine genaue experimentelle Bestimmung dieses Wertes stößt infolge der geringen Intensität des abgebeugten Lichtes auf große Schwierigkeiten. Um wenigstens die Größenordnung von k' festlegen zu können, haben wir photometrisch die Helligkeit des abgebeugten Lichtes mit der der auffallenden Strahlung verglichen und sind unter Berücksichtigung des Umstandes, daß das Licht von der Flamme diffus und nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Stärke abgebeugt wird, zu Werten gelangt, die ebenfalls nur wenige Prozent betragen, und eher noch etwas kleiner zu sein scheinen wie der berechnete Wert.[1])

Weiterhin läßt sich nun mit Hilfe des festgelegten Wertes der Zahl der leuchtenden Teile die Dichte des Kohlenstoffs in der Flamme berechnen und mit dem Werte der Dichte, den A. Becker[2]) aus *direkten* Messungen gewonnen hat, vergleichen. Ist die Dichte des massiven Kohlenstoffs s (1,75), so ist die Dichte des Kohlenstoffs in der Flamme:

$$\delta = N \cdot \frac{4\pi\varrho^3}{3} \cdot s.$$

Unter Benutzung der oben bestimmten Werte von ϱ und N ergibt sich hieraus ein Wert

$$\delta = 4{,}8 \cdot 10^{-6},$$

während der von Becker durch Messung der Rußabscheidung in der Flamme bestimmte Wert $\delta = 3{,}9 \cdot 10^{-6}$ beträgt, eine Übereinstimmung, die in Anbetracht der ganz verschiedenen und teilweise recht komplizierten Arten der Bestimmung als sehr befriedigend zu bezeichnen ist.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

In der vorliegende Arbeit werden die optischen Eigenschaften leuchtender Kohlenstofflammen (Hefnerkerze) auf Grund der Annahme untersucht, daß die Lichtausbreitung in

1) F. Kurlbaum (a. a. O.) gibt bereits als ungefähren Wert des Reflexionsvermögens der Flamme 1% an.

2) A. Becker, a. a. O. S. 1025.

der Flamme wesentlich durch die Beugung an den in ihr enthaltenen Kohlenstoffteilchen bedingt ist. Es gelang, alle für ein trübes Medium charakteristischen Eigenschaften an der Flamme nachzuweisen und messend zu verfolgen. Auf Grund der von G. Mie entwickelten Theorie der Optik trüber Medien haben wir unter Benutzung der von uns früher bestimmten optischen Konstanten der massiven Kohle und unter der Annahme einer kugelförmigen Gestalt der Teilchen die optischen Eigenschaften der Flamme rechnerisch festlegen und mit den experimentellen Ergebnissen in Beziehung setzen können. Der Vergleich zwischen experimentellen und theoretischen Ergebnissen führte in den meisten Fällen zu sehr befriedigender Übereinstimmung, so daß die oben genannte Annahme über die Natur der Flamme als bestätigt betrachtet werden kann.

Zunächst wurde die Intensität des von der Flamme zerstreuten Lichtes in ihrer Abhängigkeit von der Richtung zum auffallenden Strahl gemessen. Aus der hieraus folgenden für die Größe der Kohlenstoffteilchen sehr charakteristischen Ausstrahlungskurve konnte nach der Mieschen Theorie der Durchmesser der beugenden Kugeln zu 175 $\mu\mu$ festgelegt werden.

Aus diesem Werte konnte ohne Zuhilfenahme weiterer Annahmen der Prozentsatz des polarisierten Anteils des abgebeugten Lichtes sowohl nach seinem absoluten Betrage wie auch nach seiner Abhängigkeit von der Richtung berechnet und die Schwingungsebene des polarisierten Lichtes festgelegt werden. Die experimentellen Untersuchungen dieser Größen führten zu einer befriedigenden Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen. Eine außerhalb der Fehlergrenzen liegende Abweichung zeigte sich nur bei kleinen Beugungswinkeln. Aus diesen Polarisationsmessungen läßt sich weiterhin der Schluß ziehen, daß die optischen Eigenschaften des in der Flamme leuchtenden Kohlenstoffs die der amorphen Kohle und nicht die des Graphits, dessen Bildung in der Kohlenwasserstoffatmosphäre nicht ausgeschlossen ist, sind.

Die Untersuchung der Intensität des abgebeugten Lichtes in Abhängigkeit von der Wellenlänge zeigt eine starke Zunahme der Intensität nach kürzeren Wellenlängen hin, ein Ergebnis, welches sowohl qualitativ wie quantitativ mit der Theorie in Einklang steht.

Die über die Absorption der Flamme bereits von anderen Autoren vorliegenden Messungen ergeben einen starken Anstieg der Absorption mit der Wellenlänge; auf Grund von Temperatur- und Emissionsmessungen an der Flamme sind wir ebenfalls zu einem derartigen Verlauf des Absorptionsvermögens gelangt, der im Gegensatz steht zum Verhalten der massiven Kohle, deren Absorptionsvermögen im gleichen Spektralgebiet annähernd konstant ist. Die theoretische Berechnung des Verlaufes des Absorptionsvermögens der Flamme ergibt gleichfalls einen starken Anstieg mit der Wellenlänge, der sich auch quantitativ mit dem experimentell gefundenen deckt, so daß das abweichende optische Verhalten der Flamme durch den fein verteilten Zustand des in ihr enthaltenen Kohlenstoffs seine Erklärung findet.

Aus dem Werte des Absorptionsvermögens wurde die Zahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Kohlenstoffteilchen zu $N = 9{,}8 \cdot 10^8$ bestimmt.

Dieser Wert gestattet eine Berechnung des Reflexionsvermögens der Flamme, das hiernach nur wenige Prozent beträgt und dessen experimentelle Bestimmung zu Werten von derselben Größenordnung führt.

Berechnet man aus den so auf optischem Wege bestimmten Konstanten der Flamme die Dichte des Kohlenstoffs in der Flamme, so ergibt sich ein Wert, der mit einer direkten Bestimmung dieser Größe von A. Becker in sehr guter Übereinstimmung steht.

Breslau, Physikal. Institut d. Universität, im Mai 1919.

(Eingegangen 30. Mai 1919.)

2. *Ein allgemeiner Satz über die Schutzwirkung von Schirmen gegen Wärmeübertragung*[1]; *von Otto Wiener.*

1. Wollte man die Wärmeübertragung zwischen zwei gegebenen ebenen Flächen durch *Wärmeleitung* dadurch hintanhalten, daß man zwischen sie einen Schirm brächte, so würde man das Ziel im allgemeinen nicht erreichen; denn ein mit den Grenzflächen paralleler dünner Schirm würde lediglich die Temperatur annehmen, die seinem Orte zukommt gemäß der vorhandenen Temperaturverteilung. Er würde also nicht den geringsten Einfluß auf die Wärmeleitung nehmen.

Und doch wird ein solcher Schirm unter Umständen wirksam werden, nämlich dann, wenn die Wärmeleitung stattfindet in einem verdünnten Gase, dessen molekulare Weglänge im Vergleich zu den Durchmessern der Zwischenräume groß ist. Um das nachzuweisen, sei ein allgemeiner Satz vorangeschickt.

2. *Wenn der Betrag des Wärmeaustausches zwischen zwei benachbarten Wänden durch die Differenz zweier Funktionen bestimmt wird, deren jede nur Funktion der Temperatur und sonstiger Eigenschaften der Wände ist, unabhängig von dem Abstand der beiden Wände, so wird der stationäre Wärmeaustausch zwischen den Endflächen auf den nten Teil herabgesetzt, wenn der Raum dazwischen durch Zwischenschaltung von n — 1 parallelen dünnen Schirmen in n Abteilungen zerlegt wird,* also auf die Hälfte durch Zwischenschaltung eines Schirmes, auf den dritten Teil durch Zwischenschaltung von zwei Schirmen usf.

Beweis: Werden die Funktionen für die erste Fläche, die $(n-1)$ Schirme und die letzte Endfläche der Reihe nach durch $f_1, f_2 \cdots f_n, f_{n+1}$ ausgedrückt, so ist der Wärmeaustausch W bei stationärem Vorgang für alle Zwischenräume der gleiche und zwar gleich:

1) Aus den Leipziger Berichten 70. S. 13. 1918.

$$W = f_1 - f_2 = f_2 - f_3 \cdots = f_n - f_{n+1}. \tag{1}$$

Summiert man die n Differenzen, so wird:

$$n \cdot W = f_1 - f_{n+1}. \tag{2}$$

Da aber $f_1 - f_{n+1}$ den Wärmeaustausch ohne Schirme ausdrückt, so ist der Wärmeaustausch mit den Schirmen W auf den $n$ten Teil herabgegangen.

3. Der Satz ist anwendbar, wenn der Wärmeaustausch im vollkommenen Vakuum durch *Wärmestrahlung* erfolgt und die Schirme aus vollkommen schwarzen Körpern bestehen. Denn dann sind die sämtlichen Funktionen zu setzen gleich:

$$f_i = C \cdot T_i^4,$$

wenn T_i die absolute Temperatur der $i$ten Fläche bedeutet.

4. Der Satz bliebe gleichfalls anwendbar, wenn keine Strahlung vorhanden wäre, dagegen nur Wärmeleitung in einem Gase, dessen molekulare Weglänge groß ist gegenüber dem Abstand zweier benachbarten Flächen. Denn nach Knudsen[1]) ist der Wärmeaustausch dann unabhängig von dem Abstand der Platten, und zwar wird:

$$W = C' \cdot (T_i - T_{i+1}) \tag{3}$$

also

$$f_i = C' \cdot T_i.$$

Das Ergebnis ist nicht verwunderlich; denn im hohen Vakuum geht die Wärmeleitung tatsächlich in eine Art Wärmestrahlung über, die zwar nicht durch Wellenstrahlung bewirkt wird, wohl aber durch Körperstrahlung, hervorgebracht durch die rasch bewegten Molekeln, die ohne aneinander zu stoßen, zwischen den Schirmen hin- und herfliegen.

Dabei ist hervorzuheben, daß die molekulare Weglänge nur groß zu sein braucht gegen den Abstand zweier benachbarten Flächen, nicht groß gegen den Abstand der Endflächen. Denn die Summe von n Gleichungen (3) liefert:

$$n\,W = C'(T_1 - T_{n+1}).$$

D. h. die Wärmeleitung ist auf den $n$ten Teil herabgesetzt gegenüber derjenigen, die in einem Gase vorhanden wäre,

1) M. Knudsen, Die molekulare Wärmeleitung der Gase und der Akkommodationskoeffizient. Ann. d. Phys. 34. S. 593. 1911.

dessen molekulare Weglänge groß ist gegen den Abstand der Endflächen.

5. Der Satz bleibt auch dann anwendbar, wenn sowohl Wärmestrahlung als auch Wärmeleitung in ausreichend hohem Vakuum stattfindet, denn dann wird der Wärmeaustausch zwischen benachbarten Wänden:

$$W = C \cdot (T_i^4 - T_{i+1}^4) + C'(T_i - T_{i+1}),$$

d. h. es wird f gleich:

$$f = C \cdot T_i^4 + C' \cdot T_i.$$

6. Der Satz bleibt endlich auch dann anwendbar, wenn die Wände sämtlicher Flächen zwar nicht schwarz, aber doch entweder von gleicher Art oder abwechselnd von zweierlei Art sind. Im letzteren Fall müssen die beiden Endflächen von denselben zweierlei Arten sein.

Es läßt sich nämlich, was unten geschehen soll, beweisen, daß wenn die Flächen grau sind mit den abwechselnden Kirchhoffschen Absorptionskoeffizienten a_1, a_2 der durch Strahlung bedingte Wärmeaustausch bestimmt wird durch:

$$W = c_{12}(F_i - F_{i+1}), \tag{4}$$

worin F_i die Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers von der Temperatur der $i$ten Wand und c_{12} einen in a_1 und a_2 symmetrischen Koeffizienten bedeutet. Es wird daher:

$$f_i = c_{12} F_i, \tag{5}$$

worin jetzt c_{12} eine für alle Zwischenräume konstante Größe bedeutet, wodurch die Möglichkeit der Aufstellung eines Gleichungssystems (1) und (2) erhalten bleibt.

Ist der Körper nicht grau, sondern farbig, so wird a eine Funktion der Schwingungszahl ν, und es wird dann:

$$f_i = \int_0^\infty c_{12\nu} \varphi_i \, d\nu, \tag{6}$$

worin φ_i die für den schwarzen Körper geltende Funktion bedeutet und $c_{12\nu}$ einen Koeffizient, der wieder für jedes ν einen in $a_{1\nu}$ und $a_{2\nu}$ symmetrischen Ausdruck besitzt.

Daß daneben Wärmeleitung in genügend hohem Vakuum stattfinden darf, ohne daß der Satz aufhört zu gelten, läßt sich wie in 5. beweisen.

Es bleibt nur noch nachzuweisen, daß c_{12} in der Tat symmetrische Funktion von a_1 und a_2 ist. Zu diesem Zwecke bezeichne man mit x_a die von (1) nach (2) gerichtete Strahlungskomponente senkrecht zu den Flächen, mit x_b die von (2) nach (1) gerichtete Komponente. Dann besteht x_a aus der von (1) ausgehenden Strahlung $a_1 F_1$, wenn F_1 wieder die Strahlung des schwarzen Körpers bedeutet, und aus der von (1) zurückgeworfenen Strahlung $(1 - a_1) x_b$. D. h. es ist:

$$x_a = a_1 F_1 + (1 - a_1) x_b. \tag{7}$$

Entsprechend findet man:

$$x_b = a_2 F_2 + (1 - a_2) x_a. \tag{8}$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich:

$$x_b = \frac{a_1 F_1 + a_2 F_2 - a_1 a_2 F_1}{a_1 + a_2 - a_1 a_2}. \tag{9}$$

Nun ist der Überschuß der von (1) ausgehenden Strahlung über die absorbierte:

$$W = a_1 (F_1 - x_b). \tag{10}$$

Nach Einsetzen von x_b aus (6) erhält man:

$$W = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \cdot (F_1 - F_2). \tag{11}$$

Durch Vergleichen von (11) und (4) erhält man daher:

$$c_{12} = \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2}, \tag{12}$$

d. h., wie zu beweisen war, einen in a_1 und a_2 symmetrischen Ausdruck.

7. Die experimentelle Prüfung im letzten Fall ergab bei Benutzung gleichartiger, spiegelnder Flächen bei Zwischenschaltung eines einzigen Schirmes tatsächlich die Herabsetzung des Wärmeaustauschs auf die Hälfte.[1])

8. Der im vorstehenden bewiesene Satz wirft ein neues Licht auf die Schutzwirkung schlecht leitender, feinmaschiger porösen Körper gegen Wärmeübertragung. Denn die große Zahl von Querwänden muß die Wirkung der Wärmestrahlung beträchtlich herabsetzen, selbst dann, wenn die Wände nicht gut spiegeln.

---

1) Vgl. die demnächst in diesen Annalen erscheinende Arbeit über Transportgefäße für verflüssigte Gase von Banneitz, Rhein u. Kurze.

Neben diesem Schutz gegen Wärmestrahlung und dem bekannten Schutz gegen Wärmeüberführung (Konvektion) kann schließlich noch ein Schutz gegen die Wärmeleitung der in den Poren enthaltenen Luft in Frage kommen, wenn man den Körper auspumpt. Nach der Schlußbemerkung von Nr. 4 wird nämlich nur ein mäßig hohes Vakuum sich bereits wirksam erweisen, weil die molekulare Weglänge nur noch groß gegen die Durchmesser der Maschen zu sein braucht.

Leipzig, Physikalisches Institut, 7. Januar 1918.

(Eingegangen 6. August 1919.)

3. *Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger. III*[1]*: Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien;*

von P. Lenard,
mit Beiträgen von W. Weick u. Hans Ferd. Mayer.[2]
(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

Der Gegenstand des Vorliegenden ist durch die erstmalige Ableitung einer allgemein brauchbaren Wanderungsgeschwindigkeitsformel für Elektrizitätsträger in Gasen bereits

1) Teil I siehe Ann. d. Phys. 40. S. 393. 1913; Teil II ebendort 41. S. 53. 1913. Diese Arbeiten werden *im vorliegenden kurz als „Teil I 1913" und „Teil II 1913" zitiert.* Auf einige Versehen in den Zahlenfaktoren der Formeln, welche dort stehen geblieben waren, und auf welche mich zuerst Herr Stud. A. Schur, Teilnehmer beim Heidelberg. Physikal. Seminar, und bald darauf auch Herr Geheimrat Riecke in Göttingen in dankenswerter Weise aufmerksam gemacht hatten, sei hier hingewiesen, obgleich bereits Herr A. Becker bei Gelegenheit eines Berichtes die Güte hatte, die Verbesserungen mitzuteilen (Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik 13. S. 220. 1916). Dieselben berühren übrigens weder die Hauptresultate, noch irgendwelche bisher gezogenen Schlüsse; ihr vollständiges Verzeichnis findet sich in einer Fußnote zum Abschnitt 10 am Schlusse des vorliegenden.

2) An Wilhelm Weick hat das Radiologische Institut durch allzu frühen Tod einen vielversprechenden Schüler und Mitarbeiter verloren; er starb im Juli 1915 infolge eines Leidens, das er sich im Kriegsdienste zuzog, zu dem er, kaum von einer schweren Krankheit genesen, freiwillig sich gemeldet hatte. Sein Beitrag zum vorliegenden (numerische Auswertung von Integralen) findet sich an der betreffenden Stelle namhaft gemacht (siehe Note zu Abschn. 4 und Tab. II). Ursprünglich waren seine Rechnungen Zubehör einer Experimentaluntersuchung über Flammen, welche indessen während seiner Krankheit zu einem wesentlichen Teil (exakte, einwandfreie Temperaturmessung in Flammen) von einer Breslauer Dissertation überholt worden war (Hedwig Kohn, Breslau Juli 1913) und welche in abgeänderter Bahn fortzusetzen ihm nicht mehr beschieden war.

Herrn H. F. Mayers Beiträge betreffen ganze Abschnitte des vorliegenden, die wir gemeinsam bearbeitet haben (Abschn. 2, 3, 4). Es erscheint von ihm außerdem, bald nachfolgend, eine besondere Arbeit zum vorliegenden Gegenstand.

im Jahre 1900 von mir in der Hauptsache erledigt worden.[1]) Es blieb nur einerseits die Betrachtung besonderer, komplizierter Anwendungsfälle, sowie die verfeinerte Berücksichtigung der Molekularbewegung übrig und andererseits der Anschluß an das Gebiet des für größere Körper geltenden Stokes-Kirchhoffschen Widerstandsgesetzes. Hierüber handelten schon die 1913 veröffentlichten Teile I und II dieser Untersuchungsreihe; der gegenwärtige Teil III bringt das Problem zu einem gewissen Abschluß.[2])

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. **3**. S. 312—314. 1900; *im folgenden kurz mit „a. a. O. 1900" bezeichnet.*

Die vorher schon von E. Riecke (Ann. d. Phys. u. Chem. **66**. S. 376. 1898) und P. Drude (Ann. d. Phys. **1**. S. 575. 1900) in ihren Untersuchungen über die metallische Elektrizitätsleitung benutzten Wanderungsgeschwindigkeitsformeln waren nur für freie Elektronen gedacht; für materielle Elektrizitätsträger sind sie unbrauchbar (da sie die Trägermasse als verschwindend klein gegenüber der Molekülmasse annehmen). Daß letzteres auch von Herrn J. J. Thomsons Formel gilt, die eine bloße Wiederholung der Drudeschen ist, sowie von einer Formel des Herrn Langevin (Ann. d. Phys. et de Ch. **28**. S. 317. 1903), denen zudem das historische Verdienst der Rieckeschen abgeht, da sie sogar erst nach meiner allgemein (für Elektronen und für Träger beliebiger Größe) brauchbaren Formel aufgestellt wurden und somit in Wirklichkeit einen wunderlichen Rückschritt bedeuteten, sollte heute keiner Hervorhebung mehr bedürfen. Diese Formeln liefern für größere Elektrizitätsträger um ganze Größenordnungen falsche Resultate. Da aber ein neueres „Handbuch der Radiologie" (Bd. IV, S. 717—721, 1917) diesen historischen und sachlichen Tatbestand in gewisser kompromißartiger Verschleierung darbietet, und da es zudem noch spätere Arbeiten der Herren Langevin (Ann. de Phys. et de Ch. **5**. S. 245. 1905) und Townsend (Proc. Roy. Soc. **86**. S. 197. 1912) über den Gegenstand als besonders exakt und weitgehend hervorhebt, während dieselben in Wirklichkeit praktisch nicht nur nicht wesentlich über meine Formel von 1900 hinausgehen, sondern z. T. sogar viel beschränkter sind als diese (von der zur Zeit des Abschlusses des gedachten Handbuchbandes bereits 3 Jahre alten Veröffentlichung Teil II 1913 gar nicht zu reden), so erschien es — bei dem großen Einfluß, welchen Sammelwerke zu haben pflegen — im Interesse der Sache notwendig, auf deren Stand bei dieser Gelegenheit aufmerksam zu machen, und wir werden noch weiter darauf zurückkommen. (Siehe auch bereits Teil I, S. 395, Fußn. 2, ferner die Fußnote zu Gl. (1), dann Abschn. 7 und Abschn. 5, Fall *E* im vorliegenden, auch die demnächst erscheinende Arbeit von Herrn Hans Ferd. Mayer.)

2) Es hat demnach der vorliegende Teil III gegenüber der ursprünglichen Absicht (vgl. Teil I und II) einen etwas veränderten

Es werden erstens die Faktoren explicite angegeben, welche je nach der Masse des wandernden Partikels zur einfachen Wanderungsgeschwindigkeitsformel (a. a. O. 1900, Gl. (1) des vorliegenden) treten, um die Molekularbewegung des Mediums und des Partikels, einschließlich der Ungleichheiten der Geschwindigkeiten und der Weglängen, erschöpfend zu berücksichtigen.

Zweitens untersuchen wir die verschiedenen Möglichkeiten des Verhaltens der Mediumsmoleküle an der Oberfläche des wandernden Partikels in ihrem Einfluß auf die Wanderungsgeschwindigkeit, so daß außer dem gewöhnlich angenommenen Fall elastischer Reflexion an glatter Kugelfläche nun auch andere, hiervon extrem verschiedene Grenzfälle berücksichtigt sind.

Drittens endlich untersuchen wir den Übergang von diesen ausschließlich dem Vorstellungskreis der kinetischen Gastheorie entstammenden Resultaten zum Stokes-Kirchhoffschen Widerstandsgesetz, welches seinerseits ebenso ausschließlich der Hydrodynamik entnommen ist. Es schien eine Lücke vorhanden zu sein zwischen den Gültigkeitsbereichen dieser beiderseitigen Resultate, von denen die der Gastheorie vorzüglich für kleinste Partikel, die der Hydrodynamik vorzüglich für größere Körper geltend zu erwarten waren, und die Überbrückung dieser Lücke erschien bis vor kurzem noch schwierig.[1])

Inhalt. Es liegt dies daran, daß die vollständige Durchführung der auf Grund der Ergebnisse von Teil I und II unternommenen Experimentaluntersuchungen durch den Krieg bisher verhindert worden ist. Von den zu einigem Abschluß gelangten Arbeiten dieser Richtung sind die über die Flammen in der Abhandlung „Über Elektronen und Metallatome in Flammen" (Heidelb. Akad. 1914, A 17) zusammenfassend mit früherem veröffentlicht worden; über die positiven Strahlen ist erschienen „Kinetische Theorie der positiven Strahlen" (Heidelb. Akad. 1913, A 4); die Elektrizitätsleitung in festen Metallen betreffend war eine Experimentaluntersuchung über Absorption von Kathodenstrahlen bei tiefsten Temperaturen im Leydener Laboratorium von H. Kamerlingh-Onnes und A. Becker begonnen worden, ausgehend von Kamerlingh-Onnes' Entdeckung der „Supraleitung", welche uns gemeinschaftlich, in Leyden und in Heidelberg, zur Annahme führte, daß der elektronenabsorbierende Querschnitt von Atomen, die infolge starker und dauernder Nähewirkung ihre leicht verlierbaren Elektronen dauernd abgegeben haben, nahezu Null sein müsse. — Ein Teil der unterbrochenen Arbeiten ist jetzt in Wiederaufnahme begriffen.

1) Vgl. Teil I 1913, S. 404, Note 2.

Sie ist jetzt als so gut wie vollkommen vollzogen zu betrachten, wie die Abschnitte 8 u. 9 des vorliegenden zeigen. Hierzu haben ebensosehr die soeben erwähnten Verfeinerungen der gaskinetischen Betrachtung von der einen Seite her beigetragen, als von der anderen Seite die Arbeiten der Herren Mac Keehan[1]) und O. Silvey[2]), welche experimentell zeigten, daß der von Herrn Cunningham dem Stokes-Kirchhoffschen Ausdruck hinzugefügte Faktor $(1 + A\,L/R)$[3]) bei passender Wahl der Konstante A[4]) eine zutreffende Erweiterung des Gültigkeitsbereiches dieses Ausdrucks bedeutet.[5]) Wir zeigen im vorliegenden durch eingehende Untersuchung der Gültigkeitsbereiche, daß diese Cunninghamsche Erweiterung der hydrodynamischen Formel, welche sie auch auf relativ kleine Körper anwendbar macht, bis heran zum Gültigkeitsbereiche meiner gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformel führt und daß dort, wo beide Gültigkeitsbereiche einander berühren, so gut wie vollständige Übereinstimmung,

1) Mac Keehan, Phys. Zeitschr. **12**. S. 707. 1911. Eine andere Veröffentlichung desselben Verfassers (Physical. Rav. **32**. S. 341. 1911) bietet auch nichts Eingehenderes und erscheint durch die erstgeannnte überholt. Über den Inhalt vgl. Note 4.

2) O. W. Silvey, Phys. Zeitschr. **17**. S. 43. 1916. Vgl. Note 4 Die hier benutzte Versuchsmethode (Fall desselben Partikels in Luft und dann in Flüssigkeit) war bereits von Roux angegeben (Ann. de Chim. et de Phys. **29**. S. 69. 1913), aber nicht sehr fein verwertet worden.

3) Cunningham, Proc. Roy. Soc. **83**. S. 357. 1910. Vgl. dazu folgende Note.

4) Herrn Cunninghams Ableitung (a. a. O.) ist — stark durch Druckfehler in den Formeln entstellt — schlecht in ihren Einzelheiten verfolgbar. Herr Mac Keehan hat (a. a. O.) Verbesserungen zur Ableitung mitgeteilt und dem Koeffizienten A andere Werte gegeben als Herr Cunningham; er hat aber besonders auch — ebenso wie 5 Jahre später (a. a. O.) O. W. Silvey — eingehende und anscheinend sehr exakt durchgeführte Beobachtungen zur experimentellen Ermittlung von A ausgeführt. Wir benutzen im vorliegenden Herrn Mac Keehans Zahlenangaben für A, da sie durch die Versuche von Silvey gut bestätigt erscheinen, teilen aber am Schlusse (Abschn. 8 u. 10) auch diejenigen, etwas abgeänderten Werte für A mit, welche als Resultat unserer eigenen, gaskinetischen Entwicklungen sich ergeben.

5) Vgl. hierzu F. Walter, Diss, Heidelb. 14. Mai 1918, S. 56 u. f., wo die bisherigen experimentellen Prüfungen der Wanderungsgeschwindigkeitsformeln, besonders auch der Cunninghamschen eingehend besprochen werden und letztere graphisch mit meiner Formel von 1900 verglichen ist.

also unmittelbarer Anschluß der beiderseitigen Resultate besteht. Hierdurch ist die erwähnte, vermeintliche Lücke, welche die Beherrschung des oft besonders interessierenden Falles von Partikeln gewisser mittlerer Kleinheit unsicher machte, geschlossen, und es ist die Wanderungsgeschwindigkeit, bzw. der Reibungswiderstand beliebiger (kugeliger) Partikel jeder vorkommenden Größe — Elektron[1]), Atom, Molekül, komplexes Molekül, ultramikroskopisches bis mikroskopisches Partikel und Kugel von beliebiger unmittelbar sichtbarer Größe — in Gasen und auch in Flüssigkeiten[2]) ohne wesentliche Unsicherheit angebbar geworden.[3]) Gleichzeitig ist durch diesen gegenseitigen Anschluß der auf so verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate — des hydrodynamischen und des gaskinetischen — eine gute Stütze eben dieser Resultate selbst gewonnen, was um so wertvoller ist, als eine exakte, von Schwierigkeiten oder Unsicherheiten freie experimentelle Kontrolle der Wanderungsgeschwindigkeitsformeln bei submikroskopischen Partikeln bisher nicht möglich war.[4])

Diesem Resultat entsprechend sind jetzt auch die An-

1) Das Herabgehen bis zu einzelnen Elektronen wird durch die Hinzunahme der an langsamen Kathodenstrahlen gesammelten Erfahrung ermöglicht, was bereits im Teil I und II und weiter in der Untersuchung „Über Elektronen und Metallatome in Flammen" (Heidelb. Akad. 1914, A 17) eingehend entwickelt worden ist. (Siehe über das Fehlen von Fernkräften zwischen Elektronen und neutralen Molekülen, Teil I, S. 407 und Abschn. 5, Fall *E* des vorliegenden; über die gastheoretische Geschwindigkeit der freien Elektronen Teil I, S. 414, Teil II, S. 64 u. 69, 70, und a. a. O. 1914, S. 20; über die Reflexion der Elektronen an Molekülen a. a. O. 1914, S. 21).

2) Bei Flüssigkeiten scheint ein schmales Gebiet geringer Unsicherheit vorhanden zu sein, in welchem jedoch ziemlich enge Grenzwerte angebbar sind (vgl. Abschn. 9).

3) Vorausgesetzt ist wirbelfreie Bewegung, was aber bei kleinen Partikeln bis hinauf zu sichtbarer Größe für gewöhnlich von selber erfüllt ist. Nur bei großen Geschwindigkeiten genügend großer Partikel treten Wirbel auf. Der Übergang zu diesem Falle, welchen wir hier nicht untersuchen, ist bereits genügend bekannt; vgl. hierzu Abschn. 8, Note zu 154.

4) Über eine Kontrolle meiner Formel von 1900 mittels der Dampfkondensations-(Nebelkern-)Methode, wobei die Formel zutreffend gefunden wurde, vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. 36. S. 256. 1911. Vgl. außerdem die im oben weiter folgenden zu erwähnenden, von Herrn Ehrenhaft benutzten Kontrollmethoden.

wendungen der Wanderungsgeschwindigkeitsformeln von den bisherigen lästigen Beschränkungen insofern befreit, als man stets in der Lage ist, diejenige Formel bzw. Formelkonstante zu wählen, deren Gültigkeitsbereich zum Radius bzw. zur Beschaffenheit eines gegebenen Partikels paßt.[1]) Eine wichtige Anwendung hiervon liegt in der Möglichkeit, aus beobachteten Wanderungsgeschwindigkeiten bei bekannter Kraft auf die unbekannte Größe submikroskopischer, anderweitig schlecht meßbarer Körper zu schließen. Man ermittelt bekanntlich in dieser Weise die Größen von Elektrizitätsträgern[2]) und man untersucht die Wandlungen ihrer Zustände.[3])

---

1) Die Wahl ist auch dann mit Erfolg möglich, wenn der Partikelradius erst mit Hilfe der Formeln ermittelt werden muß; man hat dann eine probeweise, vorläufige Ermittlung mit nach Gutdünken gewählter Formel vorzunehmen, worauf sich das Genauere von selber ergibt. (Vgl. Beispiele davon bereits a. a. O. 1900, S. 314, 315, im übrigen Abschn. 7 des vorliegenden.)

2) Von diesem Problem waren meine Untersuchungen über die Wanderungsgeschwindigkeit im Jahre 1900 (a. a. O.) ausgegangen.

Dabei fand sich auch sogleich (a. a. O. 1900, S. 315) die erste gut begründete Feststellung eines Vorkommens *sehr großer, aus sehr vielen Molekülen bestehender Träger* (später — seit 1905 — oft „Langevinionen" genannt). Frühere Fälle, in welchen so große Träger zur Beobachtung kamen, konnten mangels zuverlässiger Formeln nicht einwandfrei berechnet werden: Herr Townsend berechnet seine hierhergehörigen Beobachtungen (Phil. Mag. 45. S. 138. 1898) nach der Stokesschen Formel; Herr Mac Clelland weist aber darauf hin, daß dies nicht zulässig erscheine und daß die Durchmesser der auch von ihm beobachteten, wahrscheinlich großen Träger daher zunächst unbekannt bleiben müßten (Phil. Mag. 46. S. 38, 39. 1898). (Vgl. die Zusammenstellung hierhergehöriger Literatur in Teil II 1913, Note S. 89.)

Auch habe ich mit Hilfe der zutreffenden Wanderungsgeschwindigkeitsformel von 1900 den ersten Schluß auf das Vorkommen *freier Elektronen* in leitenden Gasen von gewöhnlichem Druck (in Flammen) ziehen können (Ann. d. Phys. 9. S. 649. 1902). Vgl. dazu die historischen Bemerkungen in Teil I 1913, Note 1, S. 393 und die Note 6 in „Über Elektronen und Metallatome in Flammen" (Heidelb. Akad. 1914, A 17, S. 5).

Die Feststellung, daß die *gewöhnlichen Elektrizitätsträger komplex, nicht monomolekular* sind, bedurfte genauerer Wanderungsgeschwindigkeitsmessungen als sie anfangs zur Verfügung standen. (Vgl. die Zusammenfassung der Kenntnis hierüber in Teil II, S. 89ff., 1913.)

3) Hierauf beziehen sich besonders Teil I und II 1913. Die erste Anwendung der Wanderungsgeschwindigkeitsformeln zu einem Schlusse auf Veränderlichkeit der Elektrizitätsträger bezog sich auf die Vor-

Daß und wie das Verfahren auch auf die elektrolytischen Ionen anwendbar ist, zeigen wir eingehend im 9. Abschnitt, wo auch die Resultate über Größe und Wassergehalt dieser Ionen mitgeteilt werden.

Außerdem hängt aber auch die Frage des elektrischen Elementarquants selbst, von gewisser Seite her, an diesen Wanderungsgeschwindigkeitsfragen, wobei nur an Herrn Ehrenhafts eingehende Untersuchungen zu erinnern ist, die trotz der außerordentlichen darauf gewandten Mühe bekanntlich noch zu keinem befriedigend abschließenden Resultat gelangt sind. Es sei dazu hier nur hervorgehoben, daß Herr Ehrenhaft selbst bereits mehrere experimentelle Hilfsmethoden zur Kontrolle der Wanderungsgeschwindigkeitsformeln bei den von ihm benutzten kleinen, ultramikroskopisch eben noch gut sichtbaren Partikeln angewandt hat, deren jede zwar für sich allein wohl schwerlich als ganz befriedigend betrachtet werden könnte, die aber einander gut unterstützen und die mit unserer aus der Theorie gewonnenen Bestätigung dieser Formeln in Einklang sind. Der gegen Herrn Ehrenhafts Schlüsse in bezug auf die Teilbarkeit der Elektrizität erhobene Einwand, es sei bei denselben möglicherweise ein falsches Widerstandsgesetz benutzt worden[1]), findet demnach — soweit die Partikel kugelig waren — in unseren Resultaten keinen Anhalt. Eine andere Frage ist es freilich, ob nicht an kleinsten submikroskopischen Partikeln unter gewissen Umständen ihrer Beobachtung Besonderheiten auftreten, die ihre Beweglichkeit — vielleicht auch infolge noch ganz unbekannter Umstände — beeinflussen.[2])

gänge in Flammen (P. Lenard, Ann. d. Phys. 9. S. 649. 1902), welche später in den Untersuchungen von W. Wien eine Analogie bei den positiven Strahlen fanden.

1) Millikan, Ann. d. Phys. 50. S. 741 u. 768. 1916.

2) Jedenfalls kann diese Annahme weit näher liegend erscheinen als die des Auftretens von Subelektronen in den betreffenden Fällen. Man muß bedenken, daß die universelle, praktisch konstante Größe des Elektrons schon in einer guten Zahl wesentlich verschiedener und dabei charakteristischer Fälle sich bewährt hat: Elektrolytische Ionen, Elektrizitätsträger verschiedenen Ursprungs in Gasen, lichtelektrische Wirkung, α-Strahlen, Theorie der Strahlung des schwarzen Körpers. Dazu möchte ich noch auf einen bisher anscheinend übersehenen, aber besonders charakteristischen Fall aufmerksam machen, nämlich den *der primären und sekundären Kathodenstrahlung*: Der gute Zusammen-

Auch zur Klärung derlei noch offener Fragen dürfte die Sicherheit willkommen sein, daß alle allgemeinen Ergebnisse der kinetischen Gastheorie und der Hydrodynamik jetzt in unseren Formeln genügend berücksichtigt sind, so daß eine einwandfreie Grundlage zur Behandlung beliebiger Sonderfälle vorhanden ist.

Bei diesem Stande der Dinge glaubte ich auch eine vergleichende Kritik der von verschiedenen Autoren im Laufe der Zeit veröffentlichten, zum Teil weit voneinander abweichenden Wanderungsgeschwindigkeitsformeln hier mit einschließen zu sollen[1]), zumal in bisherigen Anwendungen die — für den nicht in das Problem Vertieften allerdings vielleicht schwierig erscheinende[2]) — Auswahl unter dieser Formeln oft so wenig zweckmäßig getroffen worden ist, daß man, statt auf schon gesicherten Wegen weiter zu fahren, geradezu in Fehlschlüsse verfallen ist, — eine Entwicklung, zu deren womöglichem Abschluß das Vorliegende jetzt beitragen wollte, um so mehr als die vorhandenen Handbücher — auch neuesten Ursprungs — hier in wesentlichen Punkten versagen.

---

schluß sämtlicher vorhandener Messungen über die Sekundärstrahlung in Luft, *bezogen auf eine einzelne Moleküldurchquerung* — gleichgültig, ob die Primärelektronen sehr langsam und lichtelektrisch aus Metallen oder Ruß befreit waren, oder ob sie, von mittlerer Geschwindigkeit, aus der Al-Kathode einer Entladungsröhre stammten, oder endlich, ob sie mit höchsten Geschwindigkeiten von radioaktiven Stoffen emittiert wurden — und die gute Übereinstimmung dieser Messungen mit den durch die Nebelmethode in verschiedenen Fällen gezählten, von je einer Moleküldurchquerung stammenden Sekundärelektronen zeigt, *daß alle diese primären Elektronen so verschiedenen Ursprungs und die aus den Luftmolekülen befreiten sekundären Elektronen von gleicher, praktisch einheitlicher Größe* gewesen sein mußten. (Vgl. die Zusammenstellung des Beobachtungsmaterials und der Resultate in „Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten", Heidelb. 1918, S. 143ff., 158ff, 181, Tab. 15.)

1) Vgl. die 3. Fußnote zu dieser Einleitung und Eingehendes in den Abschnitten 5 (Fall *E*) und 7. Eine erste vergleichende und kritische Zusammenstellung verschiedener Wanderungsgeschwindigkeitsformeln findet sich bereits bei A. Becker, Ann. d. Phys. **36**. S. 217, 218 (Fußnote). 1911.

2) Hierzulande war freilich eine Schwierigkeit nur bei Vernachlässigung der einheimischen, bzw. Überschätzung der ausländischen Literatur vorhanden.

Eine übersichtliche Zusammenstellung sämtlicher für die Berechnung verschiedener Fälle nach unseren Resultaten in Betracht kommenden Wanderungsgeschwindigkeitsformeln findet sich am Schlusse (Abschn. 10), ebendort auch ein Nachweis der gebrauchten Bezeichnungen.

Inhalt: Abschn. 1: Berücksichtigung der gaskinetischen Ungleichheiten in der Wanderungsgeschwindigkeitsformel. Abschn. 2: Einfluß der Bewegung der Mediumsmoleküle auf den Geschwindigkeitsverlust des Partikels bei den Zusammenstößen. Abschn. 3: Kritik der erreichten Annäherung. Abschn. 4: Über die Stoßzeiten der Moleküle in Gasgemischen. Abschn. 5: Verschiedene Annahmen über das Verhalten der Mediumsmoleküle an der Partikeloberfläche (Stoßfälle *A*—*E*). Abschn. 6: Wanderungsgeschwindigkeitsberechnung für die Stoßfälle *B*, *C* und *D*. Abschn. 7: Zusammenfassendes aus den Abschnitten 1—6 über die gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsformeln. Abschn. 8: Über die Gültigkeitsbereiche der hydrodynamischen und der gaskinetischen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen und ihren gegenseitigen Anschluß. Abschn. 9: Flüssige Medien, elektrolytische Ionen. Abschnitt 10: Zusammenstellung einiger Gleichungen aus den Teilen I—III.

Abschnitt 1. Berücksichtigung der gaskinetischen Ungleichheiten (Geschwindigkeits- und Weglängenverteilung) in der Wanderungsgeschwindigkeitsformel.[1])

85. Es ist eine Eigentümlichkeit der kinetischen Gastheorie, daß die vollständige Lösung ihrer Probleme nur nach genügendem Eingehen auf alle Einzelheiten des Gesamtvorganges erhältlich ist, und dies wird um so bemerklicher, je komplizierter das Problem ist. Man kennt die allmählichen Verfeinerungen in der Behandlung des Diffusionsproblems (Clausius, Maxwell, Stefan, O. E. Meyer, Boltzmann), bei welchem — wie bei dem Wanderungsgeschwindigkeitsproblem — zwei Molekülarten eine Rolle spielen und das also komplizierter ist als die Probleme der inneren Reibung und der Wärmeleitung. Noch komplizierter ist das Wanderungsgeschwindigkeitsproblem insofern, als bei letzterem

1) Wir knüpfen hier an den anfänglich (a. a. O. 1900) allein untersuchten *Hauptfall der vollkommen elastischen Molekülstöße bei glatt kugelförmig gedachtem Partikel* an. Die Erledigung der anderen Fälle ergibt sich dann in analoger Weise von selbst (Abschnitt 6). Anmerkungsweise nehmen wir auch bereits in diesem und dem folgenden Abschnitt darauf Bezug.

an Stelle der gleichförmigen Bewegung längs der freien Weglängen beschleunigte Bewegung tritt, und dementsprechend häufen sich die zu überwindenden Einzelschwierigkeiten. Man kann allerdings nach Überwindung derselben eine vereinfachende, gekürzte Darstellung platzgreifen lassen; wir wählen jedoch diesen Weg hier nicht, weil er vielleicht nicht deutlich genug zeigt, welche Stufe der Verfeinerung tatsächlich erreicht worden ist.[1]) Vielmehr behandeln wir in diesem und im folgenden Abschnitt (87—96) gesondert die einzelnen Schritte, durch welche die Wanderungsgeschwindigkeitsformel von 1900 [Gl. (1) im vorliegenden] in die von 1913 [Gl. (2) oder (3)] und dann in ihre jetzt vollkommenste Form [Gl. (20) oder (21)] übergeht, und wir zeigen im Abschnitt 3, daß ein noch übrig gebliebener Rest von vereinfachender Vernachlässigung nur von sehr geringem Einfluß und dementsprechend gegenwärtig von gar keiner praktischen Bedeutung ist.

86. In meiner ursprünglichen Ableitung der Wanderungsgeschwindigkeitsformel (a. a. O. 1900) war in bezug auf die Zwischenzeiten der Zusammenstöße des wandernden Partikels mit den Mediumsmolekülen angenommen, daß die Geschwindigkeiten sowohl als die freien Weglängen aller dieser Moleküle untereinander gleich, von mittlerer, zum gegebenen Zustand gehöriger Größe seien, und daß Entsprechendes auch vom wandernden Partikel gelte, sofern dasselbe ebenfalls an der molekularen Bewegung teilnimmt. Es führte dies zur ursprünglichen, bei heutiger Meßgenauigkeit übrigens noch immer für fast alle Zwecke ausreichenden Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung, deren verschiedene Formen sind[2]):

1) Die Darstellung der ersten Durchführung des Problems (a. a. O. 1900) war vereinfachend und aufs kürzeste gefaßt; es ist dies vielleicht der Anlaß gewesen, aus welchem die relative Feinheit dieser Durchführung von manchen Autoren nicht erkannt worden war.

2) Vgl. a. a. O. 1900, S. 313 und Teil I, S. 402. Eckige Einklammerung $[\omega]$ soll im vorliegenden die Benutzung mittlerer Geschwindigkeiten und Weglängen anzeigen; in Teil I und II war für dieselbe Größe $[\omega]$ die Bezeichnung $\omega_{abs.}$ gewählt, da es dort auf die Wanderungsgeschwindigkeit absorbierter, an Träger gebundener Elektronen ankam. Die Wanderungsgeschwindigkeit freier Elektronen (in Teil I und II mit ω_{frei} bezeichnet) war dort besonders zu behandeln, da von vornherein jede beliebige ungeordnete Geschwindigkeit für Elektronen als möglich angenommen werden sollte, während in unserer Gl. (1) (sowie auch in allen übrigen Gleichungen des vorliegenden)

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}[\omega] &= \frac{K}{N\pi s^2\sqrt{W^2+W_t^2}}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{2M_t}\right) = K\frac{L_t}{W_t}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{2M_t}\right)\\ &= K\frac{L_t}{2M_tW_t}\,\frac{1+\mu}{1-\mu} = \frac{K}{D\pi s^2 W}\,\frac{1+\mu}{2\sqrt{u}}\,.\end{aligned}\right.$$

87. Berücksichtigt man die Maxwell-Boltzmannsche Verteilung der Geschwindigkeiten und die Clausiussche

---

nun stets gastheoretische ungeordnete Geschwindigkeit des Partikels angenommen wird. Daß letzteres für Elektronen mindestens sehr nahe zutrifft, haben die Untersuchungen charakteristischer Fälle in Teil I und II gezeigt, und eben dies gibt die Berechtigung, unsere Gleichungen unmittelbar auch auf freie Elektronen anzuwenden (M_t bedeutet dann Elektronenmasse). Um ferner die schon in Teil I (S. 403, Abs. 6a) hervorgehobene allgemeine Anwendbarkeit der Gleichungen für jede Art von treibender Kraft ersichtlich zu machen, ist jetzt K an Stelle von eF gesetzt. Im übrigen sind die in Teil I und II gebrauchten Bezeichnungen auch hier benutzt (vgl. auch die Zusammenstellung in Abschn. 10 am Schlusse des vorliegenden).

Die Größe μ betreffend sei bemerkt, daß sie in den anderen Stoßfällen (vgl. vorvorige Note) veränderte und zwar doppelte Bedeutung annimmt, was vollkommen aus Gl. (30) ersichtlich wird. Für den hier behandelten, elastischen Stoßfall gilt für μ stets nur Gl. (8a).

Das unsymmetrische Auftreten der beiden Massen M und M_t in Gl. (1) hat man geglaubt verbessernd beseitigen zu müssen (vgl. die Darstellung im „Handbuch der Radiologie", Bd. IV, S. 720, 1917). Dies beruht aber auf Unklarheiten, die mittels Teil I und II, 1912, wohl hätten ersehen werden können. Es ist unrichtig, daß man durch Berücksichtigung der molekularen Ungleichheiten zu einer Verdoppelung des Summanden $\frac{1}{2}M_t$ (und damit zu symmetrischem Auftreten der beiden Massen) komme; vielmehr ist — wie aus Teil II, Abschn. D, 1912, und auch aus dem vorliegenden ersichtlich — diese Berücksichtigung überhaupt nicht durch irgendwelchen konstanten, von M und M_t unabhängigen Faktor zu erreichen, und die Rechnungen der Herren Langevin und Townsend, welche dies zu bewirken scheinen, entbehren der nötigen Strenge (vgl. zu ersterem Autor die demnächst erscheinende Darstellung von Hans Ferd. Mayer, zu letzterem Abschnitt 7 des vorliegenden). Es ist aus den Gl. (8) und (21) des vorliegenden zu ersehen, daß man bei eingehender Berücksichtigung der Molekularbewegung weder exakt noch auch in Annäherung zu so einfachen, für alle Massenverhältnisse gültigen Ausdrücken für die Wanderungsgeschwindigkeit kommt, wie sie die genannten Autoren für den elastischen Stoßfall angeben, sondern daß man, wenn man Vereinfachung ohne Verzicht auf gut angenäherte Gültigkeit für alle Massenverhältnisse sucht, im wesentlichen immer wieder auf Gl. (1) (vom Jahre 1900) zurückkommt (vgl. dazu auch 96). Daß Analoges auch für andere Stoßfälle gilt, zeigt Abschnitt 6 des vorliegenden.

Verteilung der Weglängen der Moleküle, so nimmt, wie in Teil II gezeigt ist [Gl. (69), S. 75 dort], die Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung die Form an:

$$(2) \qquad \omega_1 = \frac{K}{M_t}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^\infty \tau^2 X_\mu(\tau)\,d\tau}{\int_0^\infty \tau X_\mu(\tau)\,d\tau} + \frac{\mu}{1-\mu}\int_0^\infty \tau X_\mu(\tau)\,d\tau\right],$$

worin $X_\mu(\tau)\,d\tau$ die Wahrscheinlichkeit der Stoßzwischenzeit $\tau \pm \frac{1}{2}d\tau$ des Partikels bedeutet[1]), so daß die Integrale Mittelwerte der Stoßzwischenzeiten darstellen. Wir führen für diese Mittelwerte die abgekürzten Bezeichnungen $\bar{\tau}$ bzw. $\overline{\tau^2}$ ein, wonach auch geschrieben werden kann:

$$(3) \qquad \omega_1 = b\left[\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\tau^2}}{\bar{\tau}} + \frac{\mu}{1-\mu}\,\bar{\tau}\right],$$

worin

$$(3a) \qquad b = K/M_t$$

die Beschleunigung des Partikels durch die wirkende Kraft bedeutet.

Setzt man

$$(4) \qquad \omega_1 = [\omega]\cdot\Omega_\mu,$$

so bedeutet Ω_μ den (ebenfalls schon in Teil II eingeführten) Faktor, welcher durch Berücksichtigung der Weglängen- und Geschwindigkeitsverteilung zum Wanderungsgeschwindigkeitsausdruck hinzukommt, und es ist nach Gl. (8) und (1):

$$(5) \qquad \Omega_\mu = \frac{W_t}{L_t}\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}\,\frac{\overline{\tau^2}}{\bar{\tau}} + \frac{2\mu}{1+\mu}\,\bar{\tau}\right].$$

Führt man für die aus mittlerer Weglänge und mittlerer Geschwindigkeit berechnete Stoßzeit, die wir kurz *Weggeschwindigkeitsmittel* der Stoßzeit nennen, die Bezeichnung $[\tau]$ ein, so daß

$$(6) \qquad [\tau] = L_t/W_t,$$

1) Ein Ausdruck für $X_\mu(\tau)$ in Gestalt eines geschlossen nicht ausführbaren Integrals ist in Teil II [S. 74, Gl. (68)] angegeben. Dieser Ausdruck betrifft diejenige Wahrscheinlichkeit der Stoßzwischenzeit, welche wir in Abschnitt 4 „zeitig" nennen. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber für das vorliegende Problem genau genommen durch die etwas komplizierter gebaute „bahnige" Wahrscheinlichkeit zu ersetzen, was wir im vorliegenden durchführen, wobei wir außerdem auch die in Teil II [Gl. (68)] bei Berechnung der Wahrscheinlichkeit vernachlässigte Geschwindigkeitsverteilung der Mediumsmoleküle berücksichtigen (Abschnitt 4).

und drückt man die übrigen Stoßzeitmittelwerte, nämlich den *arithmetischen* $\bar{\tau}$ und den *quadratischen* $\sqrt{\overline{\tau^2}}$ als Vielfache von $[\tau]$ aus[1]), so daß

$$(7) \qquad \begin{cases} \bar{\tau} = \bar{t}\,[\tau] \\ \text{und} \quad \overline{\tau^2} = \overline{t^2}\,[\tau]^2, \end{cases}$$

so kann auch geschrieben werden

$$(8) \qquad \Omega_\mu = \frac{1-\mu}{1+\mu}\,\frac{\overline{t^2}}{\bar{t}} + \frac{2\mu}{1+\mu}\,\bar{t}.$$

Die Untersuchung der Stoßzeitmittelwerte, deren Kenntnis erst die numerische Berechnung von Ω_μ ermöglicht, bringen wir im Abschnitt 4, wo die Frage der Stoßzeiten von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus behandelt wird, als es für das Vorliegende nötig wäre. Es ist nach den dortigen Resultaten [Gl. (51)] $\bar{t} = 1$ und $\overline{t^2} = 8/\pi$[2]), mit welchen Werten die weiter unten folgende Tab. I für Ω_μ nach Gl. (8) berechnet ist.

Abschnitt 2. Einfluß der Bewegung der Mediumsmoleküle auf die Geschwindigkeitsverluste des Partikels bei den Zusammenstößen.

88. Diese weitere Verfeinerung der Wanderungsgeschwindigkeitsberechnung, welche wir jetzt hinzufügen, betrifft die Geschwindigkeitsverluste, welche das wandernde Partikel bei seinen Zusammenstößen mit den Molekülen erleidet. Da angenommen wird, daß diese Geschwindigkeitsverluste im stationären Zustande der Wanderung durch die Beschleunigungen der wirkenden Kräfte kompensiert sind[3]), beruht auf der genauen Kenntnis dieser Verluste auch die Genauigkeit der berechneten Wanderungsgeschwindigkeit.

Es waren bisher für die Berechnung dieser Verluste die Mediumsmoleküle als ruhend angenommen worden, und ebenso wurde auch von der der Wanderungsbewegung überlagerten Molekularbewegung des Partikels selbst abgesehen, was alles

---

1) Entsprechend einer bereits in Teil II (S. 76) eingeführten Substitution.

2) Die hier kurz mit $\bar{\tau}$ bzw. $\overline{\tau^2}$ bezeichneten Größen sind dort — als bahnige Mittelwerte — mit dem Index b versehen.

3) A. a. O. 1900, S. 312, 313.

insofern zulässig war, als die Geschwindigkeit der ungeordneten Molekularbewegung bei jedem einzelnen Zusammenstoße mit gleicher Wahrscheinlichkeit in die Kraftrichtung fällt als in die entgegengesetzte Richtung wonach der Einfluß in der Tat im Mittel über genügend viele Zusammenstöße herausfiele. Der so für ruhende Moleküle berechnete nach einem Zusammenstoß im Mittel übrig bleibende Bruchteil der Geschwindigkeitskomponente des Partikels in Kraftrichtung war — bei Annahme vollkommen elastischer Stöße des kugelförmigen Partikels —

$$\mu = \frac{M_1}{M_1 + M} \quad (8a)$$ [1])

Streng genommen ergibt aber das Vorhandensein der geordneten Wanderungsbewegung des Partikels eine Asymmetrie in der Verteilung der ungeordneten Geschwindigkeiten der mit dem Partikel zusammenstoßenden Mediumsmoleküle, indem Moleküle, welche der Wanderungsrichtung des Partikels entgegen sich bewegen bei den Zusammenstößen be-

---

1) Vgl. a. a. O. 1900, S. 312. Die dort zur Ableitung dieses Resultates angegebene Mittelnahme über „alle vorkommenden Arten des Zusammenstoßes" besteht selbstverständlich in einer leicht ersichtlichen und deshalb dort nicht weiter erörterten Integration über das ganze Bündel paralleler Einzelbahnen des Partikels, welche die verschiedenen möglichen Konfigurationen des Zusammenstoßes mit dem ruhend gedachten Mediumsmolekül ergeben und wobei jede Einzelbahn mit der Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens als Gewicht zu versehen war. Dieselbe Mittelnahme — mit demselben Resultat — spielt übrigens, wie ich erst kürzlich gesehen habe, schon bei C. Maxwell bei Gelegenheit seiner Diffusionsuntersuchung eine Rolle (Coll. Pap. I, S. 398). Die Tatsache, daß der Berechnung von μ die angegebene Mittelnahme zugrundeliegt aus Einzelwerten, die ihrerseits auf Grund ausdrücklich angegebener mechanischer Prinzipien berechnet sind (Prinzip der lebendigen Kraft und Schwerpunktsprinzip, a. a. O. 1900, S. 312), scheint von Benützern meiner Arbeit übersehen worden zu sein; denn man findet in der Literatur Gl. (8) als willkürliche — oder für selbstverständlich hinzunehmende — *Annahme* hingestellt, während sie in Wirklichkeit Resultat einer wohlgegründeten *Ableitung* ist. Wir haben im Abschnitt 6 des vorliegenden ähnliche Ableitungen unter komplizierteren Verhältnissen durchzuführen, was Anlaß zu eingehenderer Behandlung gibt, so daß dort Näheres über den befolgten Gedankengang nachgesehen werden kann. (Vgl. übrigens auch die in diesen Annalen nachfolgende Arbeit von H. F. Mayer.)

vorzugt sind, und obgleich die Geschwindigkeit der Wanderungsbewegung stets sehr gering ist im Vergleiche mit den ungeordneten Geschwindigkeiten der Moleküle, ist diese Asymmetrie doch nicht zu vernachlässigen, wenn man verbesserte Annäherung erstrebt. Dies wurde von Herrn H. F. Mayer bei Gelegenheit unserer gemeinsamen Überlegungen der Wanderungsgeschwindigkeitsprobleme bemerkt, und es soll der Einfluß hiervon im folgenden ermittelt werden.

89. Wir gehen aus von dem soeben erwähnten, bereits erledigten Falle, daß das Partikel in Kraftrichtung mit der Geschwindigkeit u_1 sich bewege und daß es ruhende Moleküle treffe, wobei die nach einem Zusammenstoß im Mittel übrigbleibende Geschwindigkeitskomponente in Kraftrichtung μu_1 ist. Um auch die zur Kraftrichtung senkrechten Geschwindigkeitskomponenten v_1, w_1 des Partikels vor dem Stoße zu berücksichtigen, können diese gesondert behandelt werden, wobei aus bloßen Symmetriegründen ersichtlich ist, daß die von ihnen nach dem Stoß im Mittel übrigbleibende Geschwindigkeitskomponente in Kraftrichtung Null ist, so daß das Resultat μu_1 unverändert bestehen bleibt. Da wir nun außerdem auch das Mediumsmolekül vor dem Stoße als bewegt annehmen wollen, mit den Geschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, so führen wir ein mit eben diesen Geschwindigkeiten bewegtes Koordinatensystem ein, in bezug auf welches dann der vorherige Fall ruhender Moleküle noch weiter besteht, so daß aus den vor dem Stoße vorhandenen, auf das bewegte Koordinatensystem bezogenen Geschwindigkeitskomponenten u_1, v_1, w_1 des Partikels und 0, 0, 0 des Moleküls nach dem Stoße im Mittel in Kraftrichtung μu_1 beim Partikel übrigbleibt, ebenfalls bezogen auf das bewegte Koordinatensystem. In bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem sind dann die Geschwindigkeitskomponenten des Partikels vor dem Stoße $u_1 + \mathfrak{U} = u$, $v_1 + \mathfrak{V} = v$, $w_1 + \mathfrak{W} = w$ und die des Mediumsmoleküls $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, und die beim Partikel nach dem Stoße übrig bleibende Komponente in Kraftrichtung ist $\mu u_1 + \mathfrak{U}$. Sind also beliebige Geschwindigkeitskomponenten u, v, w des Partikels und $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ des Moleküls vor dem Stoße vorhanden, so ist die nach dem Stoße im Mittel über alle vorkommenden Arten des vollkommen elastischen Zusammenstoßes der kugelförmigen Massen übrigbleibende Geschwindig-

keitskomponente in Kraftrichtung (u-Richtung)

$$\mu(u - \mathfrak{U}) + \mathfrak{U} = \mu u + (1 - \mu)\mathfrak{U}. \tag{9}$$

Die vor dem Stoß vorhandene Geschwindigkeitskomponente u des Partikels hat sich also vermindert um $(1 - \mu)(u - \mathfrak{U})$ oder auf den Bruchteil $\mu + (1 - \mu)\mathfrak{U}/u$.[1])

90. Es ist nun mit dieser für je einen Zusammenstoß im Mittel geltenden Geschwindigkeitsänderung die Wanderungsgeschwindigkeit zu berechnen, welche unter dem Einfluß der nach u gerichteten Kraft und vieler aufeinander folgender Zusammenstöße erfolgt. Man hat dazu die schon in Teil I mehrfach angewandte und tabellarisch erläuterte, für die vernachlässigungsfreie Behandlung grundlegende Rechnungsweise zu verfolgen, in welcher die Wanderungsgeschwindigkeit als Quotient aus Gesamtweg und Gesamtzeit erscheint[2]), und man erhält auf diesem Wege, wieder mit der Abkürzung $b = K/M_t$:

$$\omega = b\left[\frac{1}{2}\frac{\overline{\tau^2}}{\overline{\tau}} + \frac{\mu}{1-\mu}\overline{\tau}\right] + \bar{U}, \tag{10}$$

worin $\overline{\tau}$ und $\overline{\tau^2}$ die bereits benutzten Zeitmittelwerte sind und $\bar{U}$ den Mittelwert der Geschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{U}$ in Kraftrichtung darstellt, welche bei den Mediumsmolekülen vorkommen, die der Reihe nach mit dem wandernden Partikel zusammenstoßen.

---

1) Man erhält die entsprechenden, bereits bekannten Ausdrücke für den früher angenommenen Fall durchschnittlich ruhender Moleküle, wenn man $U = 0$ setzt.

2) Vgl. Teil II, Abs. 69, S. 75, und die tabellarische Erläuterung Teil I, S. 416; es tritt, Gl. (9) entsprechend, zu allen dortigen $C_\xi(u)$ der Summand $(1 - \mu)U$ hinzu.

3) Der Herleitung nach bedeutet μ im Faktor $\mu/(1 - \mu)$ dieser Gleichung den Bruchteil der Geschwindigkeitskomponente des Partikels in Kraftrichtung, welcher nach einem Zusammenstoß mit einem ruhenden Mediumsmolekül im Mittel übrig bleibt. Dieser Bruchteil ist für den Fall vollkommen elastischer Stöße und glatter Kugelfläche (Fall A in Abschn. 5) gegeben durch das Massenverhältnis $M_t/(M + M_t)$ [Gl. (8a)]; er nimmt für andere Stoßfälle (die wir weiter unten mit B, C, D bezeichnen) andere Werte an. Dagegen bedeutet μ im Mittelwert $\bar{U}$ [der nach Gl. (17) oder (19) Funktion von μ ist) in jedem Falle, unabhängig von der Art der Wechselwirkung zwischen Partikel und Mediumsmolekülen, stets nur das Massenverhältnis $M_t/(M + M_t)$, was unmittelbar aus Gl. (17) hervorgeht.

Diese Gl. (10) gilt — ihrer angegebenen Herleitung nach — nicht nur für den hier angenommenen Fall vollkommen elastischer Stöße zwischen Mediumsmolekülen und glatt kugelförmigen Partikeln, sondern ganz allgemein auch für beliebige andere Stoßfälle, deren wir mehrere weiter unten betrachten werden (Abschnitte 5, 6). Man hat nur dem Koeffizienten μ die entsprechenden Werte zu erteilen.[1])

Mit Gl. (3) und (4) nimmt Gl. (10) die übersichtliche Form an:

$$\omega = [\omega] \cdot \Omega_\mu + \bar{U}. \tag{11}$$

Hierin bedeutet $[\omega]$ die mit mittleren Weglängen und Geschwindigkeiten L_t, W_t und mit dem für ruhende Moleküle geltenden Stoßverlust μ gerechnete Wanderungsgeschwindigkeit Gl. (1), der Faktor Ω_μ berücksichtigt die Ungleichheiten der Weglängen und Geschwindigkeiten, und der Summand $\bar{U}$ fügt den gesuchten Einfluß der Bewegung der Mediumsmoleküle auf die Stoßverluste hinzu.

91. Die Verfolgung der soeben benutzten, in Teil I, S. 416 tabellarisch dargestellten Rechnung liefert mit Berücksichtigung von Gl. (9) auch leicht die *mittlere Geschwindigkeit des Partikels am Anfang einer freien Weglänge*:

$$\frac{\mu}{1-\mu} b\bar{\tau} + \bar{U} \tag{12}$$

und ebenso die *mittlere Geschwindigkeit des Partikels am Ende einer freien Weglänge*:

$$\frac{1}{1-\mu} b\bar{\tau} + \bar{U}. \tag{12a}$$

Die Differenz beider Geschwindigkeiten ist $b\bar{\tau}$, wie es sein muß. Die Wanderungsgeschwindigkeit ω liegt aber, wie man beim Vergleich von Gl. (12) und (12a) mit Gl. (10) sieht, nicht genau mitten zwischen beiden Geschwindigkeiten, wovon der Grund die Verschiedenheit der Mittelwerte $\bar{\tau}$ und $\sqrt{\tau^2}$ ist.

92. Es kommt nun nur noch darauf an, den Mittelwert $\bar{U}$ der Geschwindigkeitskomponenten in Kraftrichtung (Wanderungsgeschwindigkeitsrichtung) zu berechnen, welche bei den Mediumsmolekülen vorkommen, die der Reihe nach mit dem wandernden Partikel zusammenstoßen. Es war bisher

1) Vgl. die vorhergehende Anm.

$\overline{U} = 0$ angenommen worden; strenge genommen muß aber dieser Mittelwert seiner soeben angegebenen Bedeutung nach sein

$$\overline{U} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{U}\, Y(\mathfrak{U})\, d\mathfrak{U}, \tag{13}$$

wobei $Y(\mathfrak{U})\, d\mathfrak{U}$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß ein mit dem wandernden Partikel zusammenstoßendes Mediumsmolekül eine Geschwindigkeitskomponente $\mathfrak{U} \pm \frac{1}{2} d\mathfrak{U}$ in Wanderungsgeschwindigkeitsrichtung hat.

Um $Y(\mathfrak{U})$ zu erhalten, gehen wir aus von der sekundlichen Zahl der Zusammenstöße des Partikels, welche bekanntlich — wie bei einem Gasmolekül — $N \pi s^2 c$ ist[1]), wo c die Relativgeschwindigkeit zwischen Partikel und Mediumsmolekül bedeutet. Dieser Stoßzahl muß $Y(\mathfrak{U})$ seiner Bedeutung nach proportional sein, so daß zu setzen ist:

$$Y(\mathfrak{U}) = A N c, \tag{14}$$

wo A eine von $\mathfrak{U}$ unabhängige (auch $s^2 \pi$ umfassende) Konstante ist, deren Wert sich so einrichten muß, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\mathfrak{U})\, d\mathfrak{U} = A \int_{-\infty}^{+\infty} N c\, d\mathfrak{U} = 1 \tag{15}$$

wird, worin N und c Funktionen von $\mathfrak{U}$ sind.

93. Wir nehmen nun zur weiteren Berechnung zuerst konstante mittlere Molekulargeschwindigkeiten an, was eine gute Übersicht der maßgebenden Umstände bietet, geben aber dann auch das Resultat der mit Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung ausgeführten Rechnung.

Bei dieser Annahme einheitlicher Mittelgeschwindigkeit W der Mediumsmoleküle ist die volumeinheitliche Zahl $N\, d\mathfrak{U}$ der Moleküle, welche die vorgegebene Komponente $\mathfrak{U} \pm \frac{1}{2} d\mathfrak{U}$ besitzen, unabhängig von $\mathfrak{U}$, so lange $-W < \mathfrak{U} < +W$ ist und Null wenn $\mathfrak{U}$ außerhalb dieser Grenzen liegt[2]); man hat

---

1) Produkt aus dem in der Sekunde wirksam durchlaufenen Volum $s^2 \pi c$ und der für den Stoß in Betracht kommenden Molekülzahl N in der Volumeinheit.

2) Es folgt dies aus der Konstanz der Größe der Geschwindigkeit W und der gleichen Wahrscheinlichkeit jeder Richtung derselben.

daher für A an Stelle von Gl. (15) $A N \int_{-W}^{+W} c\, d\mathfrak{U} = 1$ und also nach Gl. (14) $Y(\mathfrak{U}) = c / \int_{-W}^{+W} c\, d\mathfrak{U}$, wonach das gesuchte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{U}\, Y(\mathfrak{U})\, d\mathfrak{U} = \frac{\int_{-W}^{+W} \mathfrak{U}\, c\, d\mathfrak{U}}{\int_{-W}^{+W} c\, d\mathfrak{U}} \tag{16}$$

wird.

Zur Ausführung der Integrationen ist die Relativgeschwindigkeit c als Funktion der gegebenen $\mathfrak{U}$-Komponente des Moleküls und der Geschwindigkeit des Partikels auszudrücken, welche letztere aus der ungeordneten Molekulargeschwindigkeit W_i und der in Richtung von $\mathfrak{U}$ liegenden Wanderungsgeschwindigkeit ω sich zusammensetzt. Diese Relativgeschwindigkeit c ist nicht einheitlich, da zwar die Richtung von ω als übereinstimmend mit der von $\mathfrak{U}$ festliegt und auch der Winkel zwischen W und $\mathfrak{U}$ durch die Größe von $\mathfrak{U}$ (bei konstantem W) gegeben ist, jedoch W_i noch jede beliebige Richtung haben kann. Es ist daher noch eine Integralmittelbildung über alle Möglichkeiten der Molekularbewegung des Partikels auszuführen. Bei der vorläufig festgehaltenen Annahme konstanter Größe von W_i kann die Mittelbildung mit Hilfe des bekannten Satzes ausgeführt werden, daß zwei voneinander unabhängig variierende Richtungen, zwischen welchen jeder beliebige Winkel gleich wahrscheinlich ist, im Mittel senkrecht aufeinander stehen. Man hat daher nur anzunehmen, daß W_i im Mittel senkrecht stehe, sowohl auf ω (und also auch auf $\mathfrak{U}$), als auch auf W, wie es Fig. 1 ersichtlich macht. Danach ist die gesuchte mittlere Relativgeschwindigkeit[1])

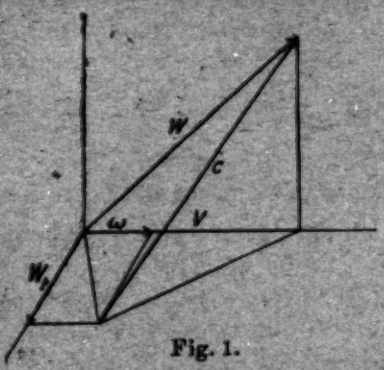


Fig. 1.

1) Die Wanderungsgeschwindigkeit des Partikels ist dabei mit ihrem über lange Strecken genommenen Mittelwerte, d. i. mit dem gesuchten Werte ω einzusetzen (nicht etwa als mittlere Endgeschwindig-

$$c = \sqrt{W^2 - \mathfrak{U}^2 + (\mathfrak{U} - \omega)^2 + W_i^2} = \sqrt{W^2 + W_i^2 + \omega^2 - 2\mathfrak{U}\omega}.$$

Das gesuchte Integral ergibt sich damit nach Gl. (16) in geschlossener Form, wenn man die Integrationen ausführt. Zur Vereinfachung des Resultats kann man in dem darin auftretenden Ausdruck $(W^2 + W_i^2 + \omega^2 + 2W\omega)^{5/2}$ ω^2 vernachlässigen und denselben im übrigen nach Potenzen von $W\omega/(W^2 + W_i^2)$ mit Weglassung der dritten und höheren Potenzen entwickeln, was keinen wesentlichen Verlust an Genauigkeit bedeutet; man erhält:

$$(17) \qquad \bar{U} = \int \mathfrak{U}\, Y(\mathfrak{U})\, d\mathfrak{U} = -\frac{3}{10}\,\frac{W^2\omega}{W^2 + W_i^2} = -\frac{3}{10}\,\mu\omega.$$

94. Die Durchführung der entsprechenden Überlegung mit Berücksichtigung der molekularen Geschwindigkeitsverteilung ist von Herrn H. F. Mayer verwirklicht worden. Man hat:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int \mathfrak{U}\, Y(\mathfrak{U})\, d\mathfrak{U} \\ \displaystyle = \frac{\iiiint\int\int U c e^{-\frac{4}{\pi W_i^2}[(\mathfrak{u}-\omega)^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2]-\frac{4}{\pi W^2}[\mathfrak{U}^2+\mathfrak{V}^2+\mathfrak{W}^2]} d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}\,d\mathfrak{w}\,d\mathfrak{U}\,d\mathfrak{V}\,d\mathfrak{W}}{\iiiint\int\int c e^{-\frac{4}{\pi W_i^2}[(\mathfrak{u}-\omega)^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2]-\frac{4}{\pi W^2}[\mathfrak{U}^2+\mathfrak{V}^2+\mathfrak{W}^2]} d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}\,d\mathfrak{w}\,d\mathfrak{U}\,d\mathfrak{V}\,d\mathfrak{W}} \end{array} \right.$$

worin $c = \sqrt{(\mathfrak{u} - \mathfrak{U})^2 + (\mathfrak{v} - \mathfrak{V})^2 + (\mathfrak{w} - \mathfrak{W})^2}$, und die Integration mittels geeigneter Substitutionen ergibt — mit denselben, auf der relativen Kleinheit von ω beruhenden Vereinfachungen wie vorher —

$$(19) \qquad \bar{U} = \int \mathfrak{U}\, Y(\mathfrak{U})\, d\mathfrak{U} = -\tfrac{1}{3}\mu\omega,$$

also, wie zu erwarten war, nahe dasselbe Resultat wie bei Annahme einheitlicher Molekulargeschwindigkeiten [Gl. (17)].

95. Setzt man diesen Wert von $\bar{U}$ in Gl. (10) ein, so hat man als *vollständigen Ausdruck für die Wanderungsgeschwindigkeit*:

$$(20) \qquad \omega = \frac{3}{3+\mu}\, b\left[\frac{1}{2}\,\frac{\bar{\tau}^3}{\bar{\tau}} + \frac{\mu}{1-\mu}\,\bar{\tau}\right],$$

und diese Gleichung gilt ebenso *allgemein, auch für andere Stoßfälle*, wie Gl. (10), wenn man nur — der Ableitung von

keit vor den Stößen); denn c soll zur Berechnung des für die Stöße wirksam durchlaufenen Wegvolumens dienen (vgl. zweitvorhergehende Note).

Gl. (10) und von $\overline{U}$ entsprechend — festhält, daß μ im Faktor $\mu/(1-\mu)$ den Bruchteil der Geschwindigkeitskomponente des Partikels in Kraftrichtung bedeutet, welcher nach einem Zusammenstoß mit einem ruhenden Mediumsmolekül im Mittel übrig bleibt, während μ im Bruche $3/(3+\mu)$ stets nur die Bedeutung des Massenverhältnisses $M_t/(M_t+M)$ hat.[1])

In die übersichtlichere Gl. (11) eingesetzt [oder, was dasselbe, aus Gl. (20) mittels Gl. (3) und (4)] liefert der Wert von $\overline{U}$ [Gl. (19), mit Hinzunahme von Gl. (1)]:

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \omega = \frac{3}{3+\mu}[\omega]\cdot\Omega_\mu &= K\frac{3L_t}{2M_t W_t}\,\frac{1+\mu}{(1-\mu)(3+\mu)}\,\Omega_\mu \\ &= \frac{K}{D\pi s^2 W}\,\frac{3(1+\mu)}{2\sqrt{\mu}(3+\mu)}\,\Omega_\mu . \end{aligned}\right.$$

Es ist dies der gesuchte, zu unmittelbarer numerischer Auswertung geeignete, *vervollständigte Ausdruck für die Wanderungsgeschwindigkeit im Falle vollkommen elastischer Stöße der Mediumsmoleküle an glatter Kugeloberfläche des Partikels.*[2]) Der durch Berücksichtigung des Einflusses der Molekularbewegung auf die Geschwindigkeitsverluste bei den Stößen hinzugekommene Faktor $3/(3+\mu)$ [welcher nun den Summanden $\overline{U}$ in Gl. (11) ersetzt] bewegt sich für alle möglichen Fälle ($\mu = 1$ bis 0) zwischen $^3/_4$ und 1; der Einfluß ist also nicht groß, und er fällt für freie Elektronen nahezu ganz fort.

96. Der Gesamtfaktor $3\,\Omega_\mu/(3+\mu)$, welcher den Einfluß aller seit 1900 hinzugefügten Verfeinerungen darstellt, bewegt sich zwischen $^3/_4$ und 2,546; er ist 1 bei Partikeln von gewisser mittlerer Größe. Tab. I zeigt das Genauere sowohl über Ω_μ (Sp. 2) als auch über den Gesamtfaktor (Sp. 3) für einige Werte von μ.[3])

Da die experimentelle Ermittlung der Wanderungsgeschwindigkeiten bei Elektrizitätsträgern noch keiner sehr

---

1) Vgl. die Fußnote zu Gl. (10).

2) Wir bezeichnen den Ausdruck im Späteren mit ω_A zum Unterschied von den für andere Stoßfälle geltenden Ausdrücken ω_B, ω_C, ω_D.

3) Daß Ω_μ für freie Elektronen zwischen den Grenzen 2 und 4 und für gewöhnliche Elektrizitätsträger unterhalb 2 liegen müsse, wurde bereits in Teil II (1913, S. 77) zutreffend angegeben.

Tabelle I.

μ	Ω_μ	$\frac{3}{3+\mu}\Omega_\mu$	$\frac{3(1+\mu)\Omega_\mu}{2\sqrt{\mu}(3+\mu)}$	Beispielsfall
0	2,546	2,546	∞	
0,00002	2,546	2,546	284,5	Freie Elektronen in N_2.
0,0003	2,546	2,546	73,5	„ „ „ H_2
0,1	2,264	2,192	3,82	
0,3	1,870	1,700	2,02	
0,5	1,516	1,298	1,38	Monomolekul. Elektrizit.-Tr.
0,7	1,272	1,031	1,046	
0,9	1,081	0,833	0,837	Gew. Elektriz.-Träg. in Luft
1	1	0,750	0,750	Grobe Partikel.

großen Genauigkeit fähig ist und bei freien Elektronen überhaupt nur auf roher — meist sogar einseitig stark gefälschter — Schätzung beruht[1]), ist die durch unsere Faktoren hinzugefügte Verfeinerung der Rechnung für die bisher gezogenen Schlüsse, betreffend die Natur der Elektrizitätsträger in kalten Gasen sowie in Flammen ohne Belang.[2]) Diese jetzt längst allgemein bekannten und wichtig gewordenen Schlüsse, wie z. B. der über den Wechsel der Zustände der Metallatome in Flammen oder über das Vorhandensein freier Elektronen in Flammen, konnten vielmehr ganz treffend auch schon mit der einfachen Formel von 1900 gezogen werden. Die Verfeinerung wird aber wichtig werden müssen, sobald verbesserte Messungen vorliegen. So beispielsweise für die Elektronen, deren Reflexion, Absorption, Wiederfreiwerden und sonstiges Verhalten gegenüber den Molekülen mittels beobachteter

1) Messungen der „Wanderungsgeschwindigkeiten" von Elektronen in Flammen, wie die von H. A. Wilson und von Moreau, beruhen sogar auf grobem Mißverständnis; ihre Resultate bedeuten infolgedessen etwas ganz anderes als die wirkliche Wanderungsgeschwindigkeit (vgl. „Über Elektronen und Metallatome in Flammen", Heidelb. Akad. 1914, A 17, S. 4, wo wir für diese Resultate die Bezeichnung „vermeintliche Wanderungsgeschwindigkeit" eingeführt haben). In Herrn Marx' Artikel über Flammenleitung im „Handbuch der Radiologie" (1917) werden die Resultate solcher Messungen dennoch ernstlich als Wanderungsgeschwindigkeiten aufgeführt und behandelt, was wohl unvermeidlich zu Fehlschlüssen Anlaß geben muß. Vgl. dazu auch den Abschnitt über Fernkräfte zwischen Elektronen und Molekülen im folgenden (Abschnitt 5, Fall *E*).

2) Einige Zahlenangaben siehe am Schlusse von Abschn. 7.

Wanderungsgeschwindigkeiten auf den in Teil I und II angegebenen Wegen erschlossen werden kann, ebenso für alle Schlüsse auf Partikelgrößen aus fein beobachteten Beweglichkeiten überhaupt.[1])

Man kann den Ausdruck für die Wanderungsgeschwindigkeit [Gl. (21)] zur Sonderung der maßgebenden Einflüsse in drei Faktoren zerlegt denken: Der erste Faktor, $1/\pi s^2$, bringt den Einfluß der *Größe* (räumlichen Ausdehnung) des Partikels zum Ausdruck, der zweite, $3(1+\mu)/2\sqrt{\mu}(3+\mu)$, den Einfluß der *Masse* des Partikels und der dritte, $1/DW$, den Einfluß von Druck und Temperatur des Mediums.[2]) Alle diese Einflüsse wurden bereits a. a. O. 1900 (S. 313, 314) erläutert, wozu in der Hauptsache bereits die damalige Formel genügte; besonders wurde auch schon der bei nicht zu kleinen materiellen Partikeln stets nur geringe Einfluß der Masse bemerklich gemacht [vgl. Gl. (b) und (c) dort]. Spalte 4 der Tab. I hierselbst gibt den die Masse enthaltenden Faktor mit allen jetzt hinzugefügten Verfeinerungen an und zeigt wieder diese Geringfügigkeit des Masseneinflusses; der Faktor ändert sich nur im Verhältnis von rund 2:1, wenn die Masse des Partikels von der eines einzelnen Mediumsmoleküls bis zu beliebiger Größe wächst. Nur bei sehr kleinen Partikeln hat die Masse erheblichen Einfluß, wie es die Tabelle ebenfalls zeigt, und hierdurch wird es unter Umständen auch möglich, die Gl. (21) zur Ermittelung von Partikel*massen* zu benutzen (vgl. die Anwendung auf die elektrolytischen Ionen in Abschn. 9).

Abschnitt 8. Kritik der erreichten Annäherung.

97. Der bei Herleitung der Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung [Gl. (21)] benutzte Rechnungsgang führt auf unendliche Reihen, wie sie bereits in Teil II behandelt wurden; jedes Glied entspricht einer freien Weglänge des wandernden

1) Zu beachten ist dabei nur, daß die bisherigen Wanderungsgeschwindigkeitsgleichungen [Gl. (1), bzw. Gl. (21)] denjenigen Fall der Wechselwirkung zwischen Partikel und Mediumsmolekülen voraussetzen, welchen wir im folgenden (Abschnitt 5) unter *A* aufführen. Die anderen möglichen Fälle fügen teilweise noch Faktoren zur Wanderungsgeschwindigkeit hinzu, welche aber praktisch nur zwischen 1 und $\frac{1}{2}$ sich bewegen (vgl. Abschnitt 6).

2) Zu einem geringen Teile geht der Temperatureinfluß mittels r auch in s ein.

Partikels. Um die Summierung dieser Reihen zu erleichtern, sind zwei vereinfachende Annahmen gemacht worden. Erstens wurde angenommen, daß man von vornherein für alle Glieder mit dem *mittleren* Geschwindigkeitsverlustfaktor μ beim Stoße rechnen dürfe, wie er durch Gl. (8a) gegeben ist, und zweitens wurde angenommen, daß die in den einzelnen Gliedern der Reihen vorkommenden Stoßzwischenzeiten ohne Änderung des Resultats beliebig durch einander ersetzt werden dürfen, so als wären diese den einzelnen aufeinander folgenden freien Weglängen des Partikels zugehörigen Zeiten gänzlich voneinander unabhängig.

Wir zeigen in diesem Abschnitte, daß die erstere Vereinfachung nicht nur in Annäherung, sondern genau zulässig ist, und daß der Einfluß der zweiten Vereinfachung unterhalb einer angebbaren, ziemlich engen Grenze liegt.[1])

98. Es bedeute: x_ξ die in Kraftrichtung genommene Komponente der ξ-ten freien Weglänge des Partikels, u_ξ seine ebensolche Geschwindigkeitskomponente am Ende dieser Weglänge unmittelbar vor dem ξ-ten Zusammenstoße mit einem Mediumsmolekül, u'_ξ eben diese Komponente unmittelbar nach dem Zusammenstoße. τ_ξ die Stoßzwischenzeit der ξ-ten Weglänge, d. i. die Zeit vom $(\xi-1)$-ten bis zum ξ-ten Zusammenstoß, μ_ξ den Faktor, mit welchem u_ξ durch den ξ-ten Zusammenstoß multipiziert wird, falls das Mediumsmolekül ruht[2]), U_ξ die in Kraftrichtung genommene Komponente der Geschwindigkeit des Mediumsmoleküls, welches mit dem Partikel am Ende von dessen ξ-ter Weglänge zusammenstößt, $b = K/M_t$ die Beschleunigung des Partikels unter dem Einfluß der wirkenden Kraft [Gl. (8a)].

99. Es ist dann die Wanderungsgeschwindigkeit, welche wir als Quotient aus Gesamtweg und Gesamtzeit der Wanderung berechnet haben, in ausführlicher Schreibweise:

---

1) Dies gilt auch für die anderen Stoßfälle, welche wir im Abschnitt 6 untersuchen. Über die ebenfalls allgemeine Zulässigkeit der Annahme Maxwell-Boltzmannscher Geschwindigkeitsverteilung des Partikels — ausgenommen im Falle sehr hoher Kräfte oder sehr tiefer Temperaturen — vgl. die betr. Fußnote zu 127.

2) $\mu = M_t/(M + M_t)$ [Gl. (8a)] ist der Mittelwert sehr vieler solcher μ_ξ.

$$(22)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega = \frac{\sum_1^\xi x_\xi}{\sum_1^\xi \tau_\xi} &= \frac{\sum_1^\xi (u'_{\xi-1}\tau_\xi + \tfrac{1}{2} b \tau_\xi^2)}{\sum_1^\xi \tau_\xi} = \frac{\sum_1^\xi u'_{\xi-1}\tau_\xi}{\sum_1^\xi \tau_\xi} \\ &\quad + \tfrac{1}{2} b \frac{\sum_1^\xi \tau_\xi^2}{\sum_1^\xi \tau_\xi} \quad (\lim \xi = \infty). \end{aligned} \right.$$

Im zweiten Summanden wird der Summenquotient nach Division des Zählers und Nenners durch ξ identisch gleich $\overline{\tau^2}/\overline{\tau}$. Nähere Untersuchung erfordert nur der erste Summand; seine Berechnung mit den eingangs dieses Abschnitts genannten vereinfachenden Annahmen hat zur Wanderungsgeschwindigkeitsformel Gl. (21) geführt, und es ist nun der Einfluß dieser vereinfachenden Annahmen zu untersuchen. Es kommt dabei nur auf die Summe $\sum_1^\xi u'_{\xi-1}\tau_\xi$ an, die nun exakt oder doch unter Annahmen zu entwickeln ist, die wesentlich geringere Vernachlässigungen bedeuten als die oben genannten.

100. Wir nehmen dementsprechend für jeden Zusammenstoß einen besonderen Faktor μ_ξ an, der die Abänderung der u-Komponente durch den Stoß angibt, doch sehen wir die einzelnen μ_ξ als unabhängig an sowohl voneinander, als auch von den Stoßzwischenzeiten τ_ξ und von den U_ξ, was zutreffend ist insofern als jedes μ_ξ nur durch die gegenseitige Lage der zum Zusammenstoß führenden Bahnen von Partikel und Mediumsmolekül bestimmt ist, nicht aber durch die Geschwindigkeiten. Was die einzelnen Stoßzwischenzeiten τ_ξ anlangt, so ist zu beachten, daß sie nicht unabhängig voneinander sind. Denn jede Stoßzwischenzeit ist Funktion der Geschwindigkeit des Partikels[1]), und die einzelnen aufeinander folgenden Geschwindigkeiten benachbarter Weglängen sind nach Gl. (9) miteinander verbunden. Liegt demnach z. B. τ_ξ unterhalb Mittelwert, so liegen die benachbarten Stoß-

1) Die Stoßzwischenzeit ist nicht nur unmittelbar Funktion der Geschwindigkeit, sondern außerdem auch noch dadurch, daß sie Funktion der Weglänge ist, welche ihrerseits ebenfalls von der Geschwindigkeit abhängt (vgl. die Gleichung für L_i in Teil I, S. 401).

zeiten $\tau_{\xi-1}$ und $\tau_{\xi+1}$ mit größerer Wahrscheinlichkeit ebenfalls unterhalb Mittelwert als oberhalb Mittelwert; denn der kleinere Wert von τ_ξ kann durch abnorm hohe Geschwindigkeit bedingt sein, und eine solche bleibt nach Gl. (9) (durchschnittlich) über einige Weglängen erhalten[1]). Doch kann der Zusammenhang der einzelnen τ_ξ nicht stark sein, da die die aufeinander folgenden Geschwindigkeiten verbindenden μ_ξ unabhängig von diesen Geschwindigkeiten zwischen 1 und $2\mu - 1$ variieren[2]) und da außerdem jedes τ_ξ nicht nur von der Geschwindigkeit, sondern ebensosehr auch von der Länge des freien Weges abhängt, welche letztere weit mehr durch die von der Geschwindigkeit des Partikels unabhängige augenblickliche Lage der Nachbarmoleküle relativ zum Partikel und seiner Bahn bedingt ist, als durch die Geschwindigkeit. Wir können uns daher damit begnügen, unmittelbar benachbarte τ_ξ als nicht unabhängig voneinander anzusehen, während wir für fernerstehende τ_ξ die Annahme gänzlicher Unabhängigkeit beibehalten. Da die U_ξ ebenfalls von der Geschwindigkeit des Partikels abhängen, wie die τ_ξ, wenn auch in geringerem Maße als diese, so nehmen wir auch für U_ξ merkliche Abhängigkeit von $\tau_{\xi-1}$, τ_ξ und $\tau_{\xi+1}$ an, aber nur unmerkliche Abhängigkeit von allen fernerstehenden τ.

101. Es können demnach — in Zusammenfassung — auch für die verfeinerten Ansprüche, welche wir jetzt stellen wollen, die 3ξ Größen μ_ξ, τ_ξ und U_ξ als merklich unabhängig voneinander angesehen werden, ausgenommen nur zu benachbarten Weglängen gehörige τ_ξ und U_ξ, deren gegenseitige Abhängigkeit nicht vernachlässigt werden soll.

102. *Hilfssätze.* — Es gilt für 2ξ voneinander unabhängige Größen a_ξ und b_ξ, welche keiner weiteren Bedingung unterworfen sind, als daß sie um Mittelwerte a bzw. b nach irgendwelchen Wahrscheinlichkeitsgesetzen schwanken, der Satz

$$\sum_1^\xi a_\xi b_\xi = \frac{1}{\xi} \sum_1^\xi a \cdot \sum_1^\xi b_\xi \quad (\lim \xi = \infty). \tag{23}$$

---

1) Es ist dies nach Gl. (9) für jede Komponente der Geschwindigkeit um so mehr der Fall, je näher μ der Einheit liegt.

2) Es sind dies die für streifenden bzw. zentralen Stoß geltenden Extremwerte.

Denn es stellt $\sum_1^\xi a_\xi \cdot \sum_1^\xi b_\xi$ die Summe von ξ^2 willkürlich zusammengestellten Produkten aus je zwei Größen a_ξ und b dar, und $\sum_1^\xi a_\xi b_\xi$ ist die Summe von ξ ebensolchen Produkten.

Danach ist außerdem

$$\overline{a\,b} = \bar{a} \cdot \bar{b}; \tag{24}$$

denn es ist

$$\sum_1^\xi a_\xi = \xi \cdot \bar{a}, \quad \sum_1^\xi b_\xi = \xi \cdot \bar{b} \quad \text{und} \quad \sum_1^\xi a_\xi b_\xi = \xi \cdot \overline{a\,b}.$$

Endlich folgt auch

$$\sum_1^\xi a_\xi b_\xi = \bar{a} \sum_1^\xi b_\xi = \bar{b} \sum_1^\xi a_\xi = \xi\, \overline{a\,b}. \tag{25}$$

Diese Sätze Gl. (23), (24) und (25) wenden wir im folgenden an.

103. Wir entwickeln nun $\sum_1^\vartheta u'_{\xi-1}\tau_\xi$.

Es ist nach Gl. (9)

$$u'_\xi = \mu_\xi\, u_\xi + (1-\mu_\xi)\, U_\xi,$$

worin

$$u_\xi = u'_{\xi-1} + b\,\tau_\xi,$$

und es ergibt hiermit die in Teil I S. 416 tabellarisch erläuterte Rechnungsweise, welche die Geschwindigkeiten des Partikels von Weglänge zu Weglänge verfolgt, für große ξ, welcher Fall hier allein in Betracht kommt[1]),

$$\left.\begin{aligned} u' &= b\,(\tau_\xi \mu_\xi + \tau_{\xi-1}\mu_{\xi-1}\mu_\xi + \tau_{\xi-2}\mu_{\xi-2}\mu_{\xi-1}\mu_\xi + \cdots \\ &\qquad \cdots + \tau_2\mu_2\mu_3\mu_4\cdots\mu_\xi + \tau_1\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_\xi) \\ &+ U_\xi\,(1-\mu_\xi) + U_{\xi-1}\,(1-\mu_{\xi-1})\,\mu_\xi \\ &+ U_{\xi-2}\,(1-\mu_{\xi-2})\,\mu_{\xi-1}\mu_\xi + \cdots \\ &\qquad \cdots + U_2\,(1-\mu_2)\,\mu_3\mu_4\cdots\mu_{\xi-1} \\ &+ U_1\,(1-\mu_1)\,\mu_2\mu_3\cdots\mu_\xi \cdot \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

1) In Teil I wurden auch beliebig kleine ξ betrachtet. Es ist dann μ noch merklich Funktion der zu Beginn der Wanderung vorhandenen Geschwindigkeitskomponente u, weshalb dort für dieselbe Größe, die wir hier u'_ξ nennen, das Zeichen $c_\xi(u)$ gewählt war.

$$
(27)\quad
\begin{cases}
\text{Hiernach ist } \sum_1^{\xi} u'_{\xi-1}\tau_\xi \\
= b\,\tau_1\mu_1\tau_2 \\
+ b\,(\tau_1\mu_1\mu_2 + \tau_2\mu_2)\,\tau_3 \\
+ b\,(\tau_1\mu_1\mu_2\mu_3 + \tau_2\mu_2\mu_3 + \tau_3\mu_3)\,\tau_4 \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ b\,(\tau_1\mu_1\mu_2\dots\mu_{\xi-2}\,\mu_{\xi-1} + \tau_2\mu_2\mu_3\dots\mu_{\xi-2}\,\mu_{\xi-1} \\
\quad + \dots + \tau_{\xi-2}\,\mu_{\xi-2}\,\mu_{\xi-1} + \tau_{\xi-1}\,\mu_{\xi-1})\,\tau_\xi \\
+ U_1\,(1-\mu_1)\,\tau_2 \\
+ [U_1\,(1-\mu_1)\,\mu_2 + U_2\,(1-\mu_2)]\,\tau_3 \\
+ [U_1\,(1-\mu_1)\,\mu_2\mu_3 + U_2\,(1-\mu_2)\,\mu_3 + U_3\,(1-\mu_3)]\,\tau_4 \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ [U_1(1-\mu_1)\mu_2\mu_3\dots\mu_{\xi-2}\mu_{\xi+1} + U_2(1-\mu_2)\mu_3\dots\mu_{\xi-2}\mu_{\xi-1} \\
\quad + \dots + U_{\xi-2}\,(1-\mu_{\xi-2})\,\mu_{\xi-1} + U_{\xi-1}\,(1-\mu_{\xi-1})]\tau_\xi\,,
\end{cases}
$$

oder durch Umordnung der Glieder (nach Vertikalreihen) und Zusammenfassung:

$$
(27a)\quad
\begin{cases}
\sum_1^{\xi} u'_{\xi-1}\tau_\xi \\
= [b\,\tau_1\mu_1 + U_1\,(1-\mu_1)]\,(\tau_2 + \tau_3\mu_2 + \tau_4\mu_2\mu_3 \\
\qquad + \tau_5\mu_2\mu_3\mu_4 + \dots + \tau_\xi\mu_2\mu_3\dots\mu_{\xi-1}) \\
+ [b\,\tau_2\mu_2 + U_2\,(1-\mu_2)]\,(\tau_3 + \tau_4\mu_3 + \tau_5\mu_3\mu_4 + \dots \\
\qquad + \tau_\xi\mu_3\mu_4\dots\mu_{\xi-1}) \\
+ [b\,\tau_3\mu_3 + U_3\,(1-\mu_3)]\,(\tau_4 + \tau_5\mu_4 + \tau_6\mu_4\mu_5 + \dots \\
\qquad + \tau_\xi\mu_4\dots\mu_{\xi-1}) \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ [b\,\tau_{\xi-3}\,\mu_{\xi-3} + U_{\xi-3}\,(1-\mu_{\xi-3})]\,(\tau_{\xi-2} + \tau_{\xi-1}\,\mu_{\xi-2} \\
\qquad + \tau_\xi\,\mu_{\xi-2}\,\mu_{\xi-1}) \\
+ [b\,\tau_{\xi-2}\,\mu_{\xi-2} + U_{\xi-2}\,(1-\mu_{\xi-2})]\,(\tau_{\xi-1} + \tau_\xi\,\mu_{\xi-1}) \\
+ [b\,\tau_{\xi-1}\,\mu_{\xi-1} + U_{\xi-1}\,(1-\mu_{\xi-1})]\,\tau_\xi\,.
\end{cases}
$$

In dieser Form erkennt man leicht, daß auch geschrieben werden kann:

$$
(27b)\quad
\begin{cases}
\sum_1^{\xi} u'_{\xi-1}\tau_\xi = \sum_{\eta=1}^{\eta=\xi-1} [b\,\tau_\eta\,\mu_\eta + U_\eta(1-\mu_\eta)]\,\tau_{\eta-1} \\
\quad + \sum_{n=2}^{n=\xi-1} \sum_{m=1}^{m=\xi-n} [b\,\tau_m\,\mu_m + U_m(1-\mu_m)]\,\tau_{m+n}\,\mu_2\dots\mu_{m+n-1}\,,
\end{cases}
$$

wobei alle diejenigen Produkte, welche Faktoren enthalten, die nach (101) als voneinander abhängig zu betrachten sind, im ersten Summanden (einfache Summe), die anderen Produkte im zweiten Summanden (Doppelsumme) zusammengefaßt sind. Auf diesen zweiten Summanden dürfen daher die in den Gl. (23), (24), (25) enthaltenen Beziehungen angewandt werden. Er nimmt dann die Form an

$$\sum_{n=2}^{n=\xi-1}\sum_{m=1}^{m=\xi-n} = \sum_{n=2}^{n=\xi-1}(\xi-n)\overline{[b\tau_m\mu_m + U_m(1-\mu_m)]\tau_{m+n}\mu_2\cdots\mu_{m+n-1}}$$

$$= \sum_{n=2}^{n=\xi-1}(\xi-n)[b\bar{\tau}\bar{\mu} + \bar{U}(1-\bar{\mu})]\bar{\tau}\bar{\mu}^{n-1},$$

worin die durch Überstreichung angezeigten Mittelwerte über $m = 1$ bis $m = \xi - n$ zu nehmen sind, was aber, da $\lim \xi = \infty$, dasselbe ist wie über sehr viele Einzelwerte überhaupt, weshalb die Indexe auch weggelassen werden konnten, und $\bar{\mu} = \mu$ ist. Die Summierung der Reihe, welche für $\lim \xi = \infty$ als einfache geometrische Reihe zu behandeln ist, ergibt, da stets $\bar{\mu} < 1$,

$$\sum_{n=2}^{n=\xi-1}\sum_{m=1}^{m=\xi-n} = \xi[b\bar{\tau}\mu + \bar{U}(1-\mu)]\bar{\tau}\frac{\mu}{1-\mu}$$

$$= \xi\bar{\tau}\left[b\frac{\mu^2}{1-\mu}\bar{\tau} + \bar{U}\mu\right].$$

Hiermit wird

$$\text{(27c)}\quad \left\{\begin{aligned}\sum_{1}^{\xi} u'_{\xi-1}\tau_\xi &= \sum_{\eta=1}^{\eta=\xi-1}[b\tau_\eta\mu_\eta + U_\eta(1-\mu_\eta)]\tau_{\eta+1}\\ &\quad + \xi\bar{\tau}\left[b\frac{\mu^2}{1-\mu}\bar{\tau} + \bar{U}\mu\right].\end{aligned}\right.$$

104. Nähme man auch im ersten Gliede die τ und U voneinander unabhängig an, wie es unseren einfachen Herleitungen im Teil I und II und oben in den Abschnitten 1 und 2 entspräche, so würde dieses Glied für $\lim \xi = \infty$:

$$\sum_{\eta=1}^{\eta=\xi-1} = \xi[b\bar{\tau}\mu + \bar{U}(1-\mu)]\bar{\tau},$$

womit

$$\sum_{1}^{\xi} u'_{\xi-1}\tau_\xi = \xi\bar{\tau}\left[b\bar{\tau}\frac{\mu}{1-\mu} + \bar{U}\right]$$

und daher, weil $\xi\,\bar{\tau} = \sum_1^{\xi} \tau_\xi$,

$$\omega = b\left[\frac{1}{2}\,\frac{\overline{\tau^2}}{\tau} + \frac{\mu}{1-\mu}\,\bar{\tau}\right] + \bar{U}, \tag{28}$$

wie es unter dieser Annahme bereits gefunden wurde [Gl. (10)], wobei aber damals die einzelnen μ_ξ bereits von vornherein alle durch den Mittelwert μ ersetzt worden waren. Die Übereinstimmung der Gl. (28) und (10) zeigt somit, daß letzteres ohne Fehler erlaubt war.

105. Um nun den Einfluß der anderen vereinfachenden Annahme zu untersuchen, welche bei Ableitung der Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung (10) gemacht war — Annahme gänzlicher Unabhängigkeit aller τ und U voneinander — nehmen wir an Stelle dieser Unabhängigkeit übertriebene Abhängigkeit an; wir werden dann den begangenen Fehler überkompensiert haben und dadurch eine Grenze für seine Größe erfahren. Eine übertriebene Abhängigkeit erhalten wir, wenn wir $\tau_{\eta+1} = z_\eta\,\tau_\eta$ setzen und alle z_η nahe 1 annehmen, d. i. wenn wir annehmen, daß die Aufeinanderfolge nahe gleicher Stoßzeiten nicht nur etwas wahrscheinlicher ist als die sehr ungleicher — welches letztere, wie wir oben erläuterten, der wirkliche Sachverhalt ist —, sondern daß diese Aufeinanderfolge sogar regelmäßig stattfindet. Es wird dann, indem wir zugleich den Mittelwert μ einführen — was bereits als erlaubt gezeigt ist —, das erste Glied der Gleichung

$$\sum_{\eta=1}^{\eta=\xi-1} = \sum_{\eta=1}^{\eta=\xi-1} [b\,z_\eta\,\tau_\eta{}^2\mu + (1-\mu)\,U_\eta\,z_\eta\,\tau_\eta]$$

oder, wegen der Unabhängigkeit der z_η von τ_η und U_η,

$$= (\xi-1)\,b\,\mu\,\bar{z}\,\overline{\tau^2} + (1-\mu)\,\bar{z}\sum_{\eta=1}^{\eta=\xi-1} U_\eta\,\tau_\eta \quad (\lim \xi = \infty).$$

Hierin ist, wie durch ähnliche Rechnung wie bei Gl. (18) gezeigt werden kann, $\sum U_\eta\,\tau_\eta = 0$[1]) und es wird daher [Gl. (27c)]:

1) Den exakten Beweis dieser Gleichung verdanke ich Herrn H. F. Mayer. Auf die Mitteilung des Beweises glaubte ich verzichten zu dürfen, da die Gleichung hier nur zur Beurteilung des erreichten Genauigkeitsgrades dient und auch dabei keine ausschlaggebende Rolle spielt. Daß $\Sigma\,U_\eta\,\tau_\eta$ jedenfalls sehr klein sein müsse, sieht man auch ohne Rechnung ein; denn es ist $\bar{U}$ nicht groß und negativ, letzteres

$$(29) \qquad \sum_{1}^{\xi} u'_{\xi-1}\tau_\xi = \xi\bar{\tau}\left[b\mu\bar{z}\frac{\overline{\tau^3}}{\bar{\tau}} + b\frac{\mu^3}{1-\mu}\bar{\tau} + \bar{U}\mu\right],$$

womit die überkompensierte Wanderungsgeschwindigkeit

$$\omega' = b\left[\left(\tfrac{1}{2}+\mu\bar{z}\right)\frac{\overline{\tau^3}}{\bar{\tau}} + \frac{\mu^3}{1-\mu}\bar{\tau}\right] + \bar{U}\mu,$$

oder, da $\bar{U} = -\frac{1}{3}\mu\omega'$ zu setzen ist [Gl. (19)] und $\bar{z} = 1$,

$$(30) \qquad \omega' = \frac{3}{3+\mu^2}\,b\left[\frac{1+2\mu}{2}\frac{\overline{\tau^3}}{\bar{\tau}} + \frac{\mu^3}{1-\mu}\bar{\tau}\right].$$

106. Diese überkompensierte Wanderungsgeschwindigkeit ω' unterscheidet sich von der früher abgeleiteten nicht kompensierten, ω [Gl. (20)], nur wenig. Beide sind sogar sowohl bei $\mu = 0$ als auch bei $\mu = 1$ einander gleich; nur für mittlere Werte von μ sind Unterschiede vorhanden. Für $\mu = \frac{1}{2}$ ist $\omega' = 1{,}85\,[\omega]$, während $\omega = 1{,}80\,[\omega]$ (s. Tab. I); die Unterschiede sind also selbst hier nicht groß. Berücksichtigt man, daß die bei ω' gemachte Annahme eine sehr starke Überkompensation der in ω vorhandenen Vernachlässigung der gegenseitigen Abhängigkeit der τ und U bedeutet, so ist damit gezeigt, daß diese Vernachlässigung für kleinste und größte Partikel ganz einflußlos und bei Partikeln mittlerer Größe nur von sehr geringem Einfluß ist.

Ein Anlaß zu weiterer Verfeinerung der Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung Gl. (21) ist daher auch von dieser Seite her nicht ersichtlich geworden.

Abschnitt 4. Über die Stoßzeiten der Moleküle in Gasgemischen.[1])

107. Unter Stoßzeiten, genauer Stoßzwischenzeiten, verstehen wir hier die Zeitdauern der freien Weglängen der Gasmoleküle, also Zeiten von Stoß zu Stoß. Die Zeitdauern der

---

wegen des Überwiegens negativer U_ξ über die positiven, und es gehören zu den negativen U_ξ kleinere τ_ξ als zu den positiven — was leicht unmittelbar einzusehen ist —, wodurch ihr Überwiegen kompensiert wird, so daß die Summe zu Null kommt.

1) Dieser Abschnitt verdankt seine volle Durchführung sowohl in prinzipieller als in rechnerischer Beziehung wesentlich Herrn Hans Ferd. Mayers Mitarbeit. — W. Weick hatte schon vorher (1913) auf meinen Wunsch im Anschluß an Teil II mühevolle graphische Integrationen zu den erforderlichen numerischen Berechnungen geliefert, welche zwar zunächst nur auf die genäherte Durchführung der Wahr-

Stöße selbst können bekanntlich in der kinetischen Gastheorie als unendlich kurz angenommen werden.

108. Es handelt sich hier um die Berechnung der Wahrscheinlichkeit gegebener Stoßzeiten für eine Molekülsorte — Partikel — die in geringer Menge zwischen anderen Molekülen — Mediumsmolekülen — in Wärmebewegung begriffen ist. Mittels der Kenntnis dieser Wahrscheinlichkeit folgen dann auch die für das Wanderungsgeschwindigkeitsproblem erforderlichen linearen und quadratischen Mittelwerte der Stoßzeiten.

Wir haben die hierhergehörigen Berechnungen nur teilweise in der Literatur vorfinden können[1]) und teilen sie daher hier mit, um so mehr als wir sie erschöpfender durchgeführt haben als es für das Wanderungsgeschwindigkeitsproblem allein notwendig gewesen wäre, was für andere Zwecke von Nutzen sein kann. Natürlich umfassen unsere Resultate auch den Fall eines einheitlichen Gases.

109. Man hat zwei Arten von Stoßzeitwahrscheinlichkeiten bzw. Mittelwerten zu unterscheiden, analog den zwei Arten von Weglängenmitteln, welche man in Werken über kinetische Gastheorie betrachtet findet. Bei der ersten Art werden sehr viele Moleküle (Partikel) betrachtet, aber von jedem nur *eine Weglänge*; bei der zweiten Art wird nur ein Molekül (Partikel) verfolgt, aber über sehr lange Zeit, also über *sehr viele Weglängen*. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeiten bzw. Mittelwerte der ersten Art als „*zeitig*", die der zweiten Art als „*bahnig*", weil es sich bei der ersten Art um die Vergleichung der Stoßzeiten *gleichzeitig* in Zurücklegung begriffener Weglängen handelt, bei der zweiten Art um die Vergleichung der zu ein- und derselben *Bahn* (des betrachteten Partikels) gehörigen Stoßzeiten, so daß man in kürzester Charakteristik sagen kann, die erste Art beziehe sich auf eine gewisse Zeit, die zweite auf eine gewisse Bahn.

---

scheinlichkeitsprobleme sich bezog, welche aber auch für die exakte Durchführung unentbehrlich blieben, wo die bekannten Tafeln des Gaussschen Fehlerintegrals wegen zu starker Annäherung an den Wert Null versagten. Außerdem hatte Herr Ishino im Sommer 1914 (damals im Radiologischen Institut arbeitend) die Weickschen Resultate auf dem von ihm selbst vorgeschlagenen Wege der mechanischen Quadratur für einen bestimmten Fall kontrolliert und gut bestätigt gefunden.

1) Vgl. die Fußnote 3 S. 74 in Teil II.

Wir haben die Berechnung für beide Arten sowohl in der Annäherung durchgeführt, welche zwar für das Partikel die Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung und die Clausiussche Weglängenverteilung voll berücksichtigt, für die Mediumsmoleküle jedoch nur mittlere Geschwindigkeiten annimmt, als auch exakt mit durchgehender Berücksichtigung dieser Verteilungen. Es zeigte sich, daß die exakte Berechnung zwar naturgemäß auf komplizierter gebaute Integrale führt als die angenäherte, daß aber diese Integrale doch schließlich in einfachere Form zu bringen und leichter numerisch verwertbar sind als die angenäherten. Daß wir hier dennoch auch die (von uns zuerst durchgeführte) angenäherte Rechnung mitteilen, und zwar diese ausführlicher als die exakte, ist dadurch begründet, daß die angenäherte Rechnung alle wesentlichen Gedanken in kleinstem Raum, nämlich ohne Unterbrechung durch rein mathematische Entwicklungen, ersichtlich macht.

110. Wir nehmen demnach zuerst konstante mittlere Geschwindigkeit W für die Mediumsmoleküle an.

Es ist nach Clausius die Wahrscheinlichkeit $(q \pm \frac{1}{2} dq)$-fach mittlerer Weglänge L_t des Partikels gleich $e^{-q} dq$.

Ist die Geschwindigkeit des Partikels das p-fache der Mittelgeschwindigkeit W_t, so ist

$$q L_p = p W_t \tau,$$

worin

$$L_p = p W_t / N \pi s^2 \sqrt{p^2 W_t^2 + W^2},$$

also

$$q = \frac{p W_t}{L_p} \tau = N \pi s^2 \sqrt{p^2 W_t^2 + W^2}\, \tau = N \pi s^2 W \sqrt{p^2 \frac{M}{M_t} + 1}\, \tau /$$

$$= N \pi s^2 W \sqrt{p^2 \frac{1-\mu}{\mu} + 1}\, \tau,$$

und damit die genannte Wahrscheinlichkeit, d. i. auch die Wahrscheinlichkeit der Stoßzeit $\tau \pm \frac{1}{2} d\tau$

$$N \pi s^2 \sqrt{p^2 W_t^2 + W^2}\, e^{-N \pi s^2 \sqrt{p^2 W_t^2 + W^2}\, \tau} d\tau = A d\tau. \tag{31}$$

Die Wahrscheinlichkeit der vorausgesetzten Geschwindigkeit $(p \pm \frac{1}{2} dp) W_t$ ist aber nach Maxwell-Boltzmann:

$$\frac{32}{\pi^2} p^2 e^{-\frac{4p^2}{\pi}} dp = B dp, \tag{32}$$

wobei man nach dem Sinne dieses Verteilungsgesetzes eine große Anzahl von Partikeln gleichzeitig oder auch ein und dasselbe Partikel in einer großen Zahl beliebiger verschiedener Augenblicke in Vergleich zieht, so daß es sich um die von uns als *zeitig* definierte Wahrscheinlichkeit handelt.

Es ist daher die zeitige Wahrscheinlichkeit der Stoßzeit $\tau \pm \frac{1}{2} d\tau$ bei allen vorkommenden Geschwindigkeiten überhaupt

$$X_\mu(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty A B\, dp\, d\tau, \tag{33}$$

so daß

$$\left\{ \begin{aligned} X_\mu(\tau) &= \frac{32}{\pi} N s^2 W \\ &\int_0^\infty p^3 \sqrt{p^3 \frac{M}{M_1} + 1}\, e^{-\tau \pi N s^2 W \sqrt{p^3 \frac{M}{M_1} + 1} - \frac{4 p^3}{\pi}}\, dp. \end{aligned} \right. \tag{34}$$

Dieser Ausdruck wurde bereits in Teil II angegeben [Gl. (68), S. 74 dort]; nach der feineren Unterscheidung, welche wir hier eingeführt haben, ist hinzuzufügen, daß er die *zeitige* Wahrscheinlichkeit betrifft.

111. Führt man Vielfache des Weggeschwindigkeitsmittels $[\tau]$ der Stoßzeit ein [vgl. Gl. (6)], so daß

$$\tau = t[\tau] = t \frac{L_1}{W_1} = t \frac{\sqrt{u}}{N \pi s^2 W}, \tag{35}$$

so wird die zeitige Wahrscheinlichkeit für das $t \pm \frac{1}{2} dt$-fache dieses Stoßzeitmittels

$$\left\{ \begin{aligned} X_\mu(t)\, dt &= X_\mu(t[\tau])\, d(t[\tau]) \\ &= \frac{32}{\pi^2} \int_0^\infty p^3 \sqrt{p^2(1-\mu) + \mu}\, e^{-t \sqrt{p^2(1-\mu)+\mu} - \frac{4 p^3}{\pi}}\, dp\, dt. \end{aligned} \right. \tag{36}$$

112. Um die *bahnige* Wahrscheinlichkeit $B' dp$ der Geschwindigkeit $(p \pm \frac{1}{2} dp) W_1$ zu erhalten, hat man nur zu bedenken, daß es sich dabei nicht — wie bei der zeitigen Wahrscheinlichkeit $B\, dp$ — um den Bruchteil der *Zeitelemente* handelt, zu welchen die besagte Geschwindigkeit vorkommt, sondern um den Bruchteil der *freien Weglängen*, längs welchem diese Geschwindigkeit vorhanden ist. B' und B sind voneinander verschieden, weil die Zeitdauer der einzelnen Weg-

längen abhängt von der Geschwindigkeit, mit welcher sie zurückgelegt werden. Es ist

$$B'\,dp = \frac{\text{Weglängenzahl mit } (p \pm \tfrac{1}{2}dp)\,W_t}{\text{Gesamte Weglängenzahl}}$$

und

$$B\,dp = \frac{\text{Zeit während welcher } (p \pm \tfrac{1}{2}dp)\,W_t \text{ vohanden ist}}{\text{Gesamtzeit}}$$

$$= \frac{\text{Weglängenzahl mit } (p \pm \tfrac{1}{2}dp)\,W_t \times \text{Mittl. Wegl. bei } p\,W_t \times \dfrac{1}{p\,W_t}}{\text{Gesamte Weglängenzahl} \times \text{Mittl. Wegl. überhaupt} \times \dfrac{1}{W_t}}$$

$$= B'\,dp \cdot \frac{\dfrac{p\,W_t}{N\pi s^2\sqrt{p^2 W_t^2 + W^2}} \cdot \dfrac{1}{p\,W_t}}{\dfrac{W_t}{N\pi s^2\sqrt{W_t^2 + W^2}} \cdot \dfrac{1}{W_t}},$$

daher

$$(37)\quad \left\{ \begin{aligned} B' = B \cdot \frac{\sqrt{p^2 W_t^2 + W^2}}{\sqrt{W_t^2 + W^2}} &= B\sqrt{\mu}\sqrt{p^2\frac{M}{M_t} + 1} \\ &= B\sqrt{p^2(1-\mu) + \mu}. \end{aligned} \right.$$

Das Verhältnis $B' : B$ der beiden Wahrscheinlichkeiten ist also wie die erste Form der rechten Seite von Gl. (37) unmittelbar zeigt, gleich dem Verhältnis derjenigen Relativgeschwindigkeit Partikel-Mediumsmolekül, welche bei der betrachteten Geschwindigkeit $p\,W_t$ im Mittel vorhanden ist, zur mittleren Relativgeschwindigkeit überhaupt.[1])

113. Man erhält nun die gesuchte bahnige Wahrscheinlichkeit $X'_\mu(\tau)\,d\tau$ der Stoßzeit $\tau \pm \frac{1}{2}d\tau$, wenn man B in Gl. (33) durch B' ersetzt, womit

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} X'_\mu(\tau) = \frac{32}{\pi} N s^2 W \sqrt{\mu} \\ \times \int_0^\infty p^2 \left(p^2\frac{M}{M_t} + 1\right) e^{-\tau N \pi s^2 W \sqrt{p^2 \frac{M}{M_t} + 1} - \frac{4p^2}{\pi}}\, dp. \end{aligned} \right.$$

114. Die bahnige Wahrscheinlichkeit des $t \pm \frac{1}{2}dt$-fachen Weggeschwindigkeitsmittels der Stoßzeit wird damit

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} X'_\mu(t)\,dt &= X'_\mu(t[\tau]\,d(t[\tau]) \\ &= \frac{32}{\pi^2}\int_0^\infty p^2 \{p^2(1-\mu) + \mu\} e^{-t\sqrt{p^2(1-\mu)+\mu} - \frac{4p^2}{\pi}}\, dp\, dt. \end{aligned} \right.$$

1) Dieses Resultat ist seiner Herleitung nach unabhängig von der Voraussetzung einheitlicher Geschwindigkeit der Mediumsmoleküle.

115. Die exakte Rechnung, welche noch die Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung der Mediumsmoleküle hinzufügt, geht aus der soeben durchgeführten Rechnung dadurch hervor, daß man überall den Ausdruck für die Relativgeschwindigkeit $\sqrt{p^2 W_i^2 + W^2}$ oder $W\sqrt{p^2 M/M_i + 1}$ ersetzt durch $\sqrt{(u-\mathfrak{U})^2 + (v-\mathfrak{V})^2 + (w-\mathfrak{W})^2}$ — denn in anderen Kombinationen als in dieser Relativgeschwindigkeit kommt die Geschwindigkeit der Mediumsmoleküle nicht vor —, dann dementsprechend $B\,dp$ ersetzt durch

$$\left(\frac{2}{\pi W_i}\right)^3 e^{-\frac{4}{\pi W_i^2}(u^2+v^2+w^2)}\,du\,dv\,dw \cdot \left(\frac{2}{\pi W}\right)^3 e^{-\frac{4}{\pi W^2}(\mathfrak{U}^2+\mathfrak{V}^2+\mathfrak{W}^2)}\,d\mathfrak{U}\,d\mathfrak{V}\,d\mathfrak{W}$$

und die Integration über alle sechs Geschwindigkeitskomponenten erstreckt. Die Integrale lassen sich durch geeignete Substitutionen reduzieren und man erhält, indem man schließlich wieder das p-fache der mittleren Geschwindigkeit einführt, für die zeitige Wahrscheinlichkeit der Stoßzeit τ

$$X(\tau) = \frac{32}{\pi}\frac{N s^2 W}{\sqrt{\mu}} \int_0^\infty p^3 e^{-\frac{N\pi s^2 W p}{\sqrt{\mu}}\tau - \frac{4p^2}{\pi}}\,dp \tag{40}$$

und für die bahnige Wahrscheinlichkeit

$$X'(\tau) = \frac{32}{\pi}\frac{N s^2 W}{\sqrt{\mu}} \int_0^\infty p^4 e^{-\frac{N\pi s^2 W p}{\sqrt{\mu}}\tau - \frac{4p^2}{\pi}}\,dp\,. \tag{41}$$

116. Die zeitige Wahrscheinlichkeit des $t \pm \frac{1}{2}dt$-fachen Weggeschwindigkeitsmittels $[\tau]$ der Stoßzeit ist demnach

$$\mathfrak{X}(t)\,dt = X(t[\tau])\,d(t[\tau]) = \frac{32}{\pi^2}\int_0^\infty p^3 e^{-tp - \frac{4p^2}{\pi}}\,dp\,dt \tag{42}$$

und die bahnige Wahrscheinlichkeit

$$\mathfrak{X}'(t)\,dt = X'(t[\tau])\,d(t[\tau]) = \frac{32}{\pi^2}\int_0^\infty p^4 e^{-tp - \frac{4p^2}{\pi}}\,dp\,dt\,. \tag{43}$$

Wie man sieht, sind diese Integrale, im Gegensatz zu den angenäherten [Gl. (36) und (39)] nicht Funktionen von μ, weshalb wir auch zur Bezeichnung den Index μ bei X und $\mathfrak{X}$ weggelassen haben. Die Abhängigkeit von μ ist übrigens auch bei den angenäherten Integralen nicht stark, und für $\mu = 0$ stimmen dieselben, wie leicht zu sehen, mit den exakten

überein.[1]) Für $\mu = 1$ gehen die angenäherten Integrale, zeitig und bahnig, in eine einfache Exponentialfunktion über; es ist

$$\mathfrak{X}_1(t) = \mathfrak{X}_1'(t) = e^{-t}, \tag{44}$$

und diese Funktion unterscheidet sich für die größeren Wahrscheinlichkeitswerte, oder wenn überhaupt nur Zehntel und Hundertstel des Wahrscheinlichkeitsbruchs in Betracht kommen, nur sehr wenig von der exakten Lösung, so daß sie für manche Zwecke an Stelle dieser vereinfachte Dienste leisten kann (vgl. Tab. II).[2]) Genaue Übereinstimmung mit der Exponentialfunktion ist (wie die Tab. II zeigt) sowohl bei der zeitigen

Tabelle II.

Wahrscheinlichkeiten t-fach mittlerer Stoßzwischenzeiten.*)

t	zeitig $\mathfrak{X}(t)$	bahnig $\mathfrak{X}'(t)$	e^{-t}	t	zeitig $\mathfrak{X}(t)$	bahnig $\mathfrak{X}'(t)$	e^{-t}
0	1,000	1,178	1,000	3,5	0,0398	0,0297	0,0302
0,1	0,895	1,228	0,905	4	0,0284	0,0195	0,0183
0,2	0,799	0,903	0,819	5	0,0155	0,0085	0,0067
0,3	0,710	0,796	0,740	6	0,00885	0,00443	0,00248
0,4	0,635	0,700	0,670	7	0,00536	0,00245	0,00091
0,5	0,570	0,621	0,607	8	0,00340	0,00150	0,000336
0,6	0,511	0,555	0,549	9	0,00224	0,00096	0,000123
0,7	0,464	0,492	0,497	10	0,00152	0,00068	0,000045
0,8	0,418	0,435	0,449	15	0,000336	0,000145	0,0000003
0,9	0,377	0,382	0,407	20	0,000112	0,000035	$2{,}1 \cdot 10^{-9}$
1,0	0,335	0,336	0,368	30	0,0000230	0,0000072	$9{,}4 \cdot 10^{-14}$
1,2	0,271	0,261	0,301	40	0,00000740	0,00000186	$4{,}2 \cdot 10^{-18}$
1,4	0,223	0,210	0,246	50	0,00000306	0,00000070	$1{,}9 \cdot 10^{-22}$
1,6	0,187	0,171	0,202	60	0,00000148	0,00000031	$8{,}8 \cdot 10^{-27}$
1,8	0,156	0,141	0,165	70	0,00000080	0,00000015	$4{,}0 \cdot 10^{-31}$
2,0	0,130	0,114	0,135	80	0,00000047	0,00000009	$1{,}8 \cdot 10^{-35}$
2,5	0,087	0,076	0,082	90	0,00000030	0,00000005	$8{,}2 \cdot 10^{-40}$
3,0	0,058	0,045	0,050	100	0,00000019	0,00000003	$3{,}7 \cdot 10^{-44}$

*) Spalte 2 berechnet von Herrn Hans Ferd. Mayer nach Gl. (45), übereinstimmend mit W. Weicks graphischen Integrationen nach Gl. (36) mit $\mu = 0{,}00002$. Spalte 3 berechnet von Herrn Hans Ferd. Mayer nach Gl. (45). Spalte 6 nach W. Weicks graphischen Integrationen nach Gl. (36) mit $\mu = 0{,}00002$. Spalte 7 berechnet nach Spalte 6 von Herrn Hans Ferd. Mayer [Gl. (46)].

1) Es konnten daher in Tab. II an Stelle der exakten Werte teilweise die angenäherten für $\mu = 0{,}00002$ gesetzt werden, wie dort des näheren angegeben.

2) Der Ersatz der Stoßzeitwahrscheinlichkeiten durch die Exponentialfunktion kommt, wie leicht einzusehen, darauf hinaus, daß

wie auch bei der bahnigen Wahrscheinlichkeit an je zwei Punkten des Gesamtbereichs von t vorhanden, und nur bei Wahrscheinlichkeiten unter 0,01, d. i. bei $t > 5$, ergibt die Exponentialfunktion falsche Größenordnungen.

Kleinste Stoßzeiten haben, nach diesem Verlauf der Funktionen, stets — zeitig wie bahnig — die größte Wahrscheinlichkeit.

117. Die Zahlen der Tab. II, welche das Vorstehende im einzelnen zeigen, sind W. Weicks graphischen Integrationen und Herrn H. F. Mayers mit großem Geschick vorgenommenen Umformungen der Integrale[1]) zu verdanken. Es zeigt sich, daß bei $t = 1$ nahe Übereinstimmung zwischen zeitiger und bahniger Wahrscheinlichkeit besteht.

118. Aus den Wahrscheinlichkeiten gegebener Stoßzeiten folgen auch leicht die verschiedenartigen möglichen Mittelwerte der Stoßzeiten. Wir haben von diesen bereits den Weggeschwindigkeitsmittelwert eingeführt [Gl. (6) bzw. (35)]

$$[\tau] = L_i / W_i = \sqrt{\mu} / N \pi s^2 W ,$$

und wir werden hier die übrigen Mittelwerte als Vielfache dieses Mittelwerts ausdrücken. Es kommen in Betracht:

---

man für die Mediumsmoleküle sowohl, als auch für das Partikel konstante Mittelgeschwindigkeit annimmt, wodurch alle Stoßzeitunterschiede nur mehr Folge der Weglängenunterschiede sind, für welche bekanntlich die Exponentialfunktion maßgebend ist. Würde man diese vereinfachte Annahme zur Berechnung von Ω_μ anwenden, so ergäbe sich für Ω_0 2 statt 2,546.

1) Es ist

$$(45)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}(t) = 1 + x^2 - (3x + 2x^3) e^{x^2} \int_x^\infty e^{-x^2} dx \\ \text{und} \\ \mathfrak{X}'(t) = \sqrt{\pi} \left\{ -\frac{x^3}{2} - \frac{5x}{4} + (\tfrac{3}{4} + 3x^2 + x^4) e^{x^2} \int_x^\infty e^{-x^2} dx \right\}, \end{cases}$$

worin $x = \sqrt{\pi}\, t / 4$, und es besteht danach auch die Beziehung

$$(46)\qquad \mathfrak{X}'(t) = \frac{192 (1 + 2\,\mathfrak{X}(t) - (24 + \pi t^2)^2\, \mathfrak{X}(t)}{8 t (24 + \pi t^2)} .$$

der zeitige lineare Mittelwert

$$\overline{\tau_z} = \int_0^\infty \tau\, X(\tau)\, d\tau = [\tau] \int_0^\infty t\, \bar{X}(t)\, dt, \tag{47}$$

der bahnige lineare Mittelwert

$$\overline{\tau_b} = \int_0^\infty \tau\, X'(\tau)\, d\tau = [\tau] \int_0^\infty t\, \bar{X}'(t)\, dt, \tag{48}$$

und die zwei entsprechenden quadratischen Mittelwerte $\sqrt{\overline{\tau_z^2}}$ und $\sqrt{\overline{\tau_b^2}}$, deren Quadrate sind:

$$\overline{\tau_z^2} = \int_0^\infty \tau^2\, X(\tau)\, d\tau = [\tau]^2 \int_0^\infty t^2\, \bar{X}(t)\, dt \tag{49}$$

und

$$\overline{\tau_b^2} = \int_0^\infty \tau^2\, X'(\tau)\, d\tau = [\tau]^2 \int_0^\infty t^2\, \bar{X}'(t)\, dt. \tag{50}$$

119. Die Integrale sind sämtlich ausführbar[1]), und man erhält:

$$\begin{cases} \overline{\tau_z} = \frac{4}{\pi}[\tau] = 1{,}274\,[\tau], \qquad \overline{\tau_b} = [\tau], \\ \sqrt{\overline{\tau_z^2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}[\tau] = 2{,}256\,[\tau], \quad \sqrt{\overline{\tau_b^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}[\tau] = 1{,}595\,[\tau]. \end{cases} \tag{51}$$

$\overline{\tau_b}$ und $\overline{\tau_b^2}$ haben wir in den vorhergehenden Abschnitten bereits benutzt und dort kurz mit τ und $\overline{\tau^2}$ bezeichnet.

Abschnitt 5. Verschiedene Annahmen über das Verhalten der Mediumsmoleküle an der Partikeloberfläche.

120. Wir führen hier die verschiedenen charakteristischen Grenzfälle des möglichen Verhaltens der Mediumsmoleküle an der Partikeloberfläche zunächst der Reihe nach an, um sie nachher (Abschn. 6), soweit sie in der Wirklichkeit eine Rolle spielen, den Wanderungsgeschwindigkeitsberechnungen zugrunde zu legen. Vorausbemerkt sei, daß, wenn wir von elastischen oder anderen „Stoß"-Wirkungen zwischen den Molekülen des

1) Benutzt man die angenäherten Wahrscheinlichkeiten X_μ und X_μ', an Stelle der exakten, so ist die Integration in geschlossener Form nicht möglich.

Mediums und dem Partikel reden, dies immer nur mit Bezug auf das Endresultat der Wirkung, nämlich auf die Bewegung des Mediumsmoleküls und des Partikels nach dem Zusammentreffen geschieht. Die wirklichen, während der Berührungszeit tätigen Kräfte sind wohl unzweifelhaft elektromagnetischer Natur und komplizierter Art; das Wesentliche ist aber, daß sie nur innerhalb kleiner, dem Atomradius gegenüber fast verschwindender Abstandsbereiche wirken[1]) und daß es infolgedessen für unsere Berechnungen gar nicht auf alle Einzelheiten ihrer Wirkung ankommt, sondern daß nur die einfachen mechanischen und geometrischen Prinzipien maßgebend sind, welche in jedem der zu betrachtenden Fälle das genannte Endresultat bestimmen. Wir werden es daher nur mit diesen Prinzipien zu tun haben, und es wird für die Kennzeichnung der verschiedenen zu betrachtenden Stoßfälle nur darauf ankommen, jedesmal die als maßgebend genommenen Prinzipien genügend hervorzuheben, was im Folgenden auch durchgehend geschehen soll.[2])

121. *Fall A*: *Elastische Stöße bei vollkommener Kugelgestalt des Partikels.* — Die von mir im Jahre 1900 abgeleitete Wanderungsgeschwindigkeitsformel nimmt an, daß die Moleküle des Mediums wie vollkommen elastische Kugeln von der als glatt kugelförmig angenommenen Oberfläche des wandernden Partikels reflektiert werden. Es gilt dann für den Stoß außer dem Schwerpunktsprinzip das Prinzip der lebendigen Kraft; es kommen nur zentrale Kräfte während der Stoßzeit zur Geltung, und die Reflexion erfolgt mit Gleichheit von Einfalls- und Reflexionswinkel, wobei das Einfallslot der Kugelradius des Partikels ist. Wir nennen diese Annahme, welche übrigens bekanntlich in der kinetischen Gastheorie auch sonst ausgiebig und mit großem Erfolge benutzt worden ist, kurz „Fall der elastischen Stöße" und bezeichnen sie mit *A*. Sie liegt auch den späteren Wanderungsgeschwindig-

1) Es ist wichtig, dies hervorzuheben. Auf größere Abstände wirkende „Fernkräfte" irgendwelcher Art zwischen Partikel und Mediumsmolekülen kommen im Wanderungsgeschwindigkeitsproblem nicht zur Geltung. Vgl. den Fall *E* weiter unten, der hierauf sich bezieht.

2) Für den a. a. O. 1900 schon durchgeführten Fall *A* ist dies bereits dort geschehen und wird hier nur der Vollständigkeit halber wiederholt.

keitsformeln anderer Autoren zugrunde. Die Annahme ist als Notbehelf gerechtfertigt, *wenn das wandernde Partikel eine Gruppe von wenigen Molekülen oder auch ein einzelnes Molekül oder ein Elektron ist.* Denn die genaue Oberflächenbeschaffenheit ist dann unbekannt und es bleibt wegen des gleich wahrscheinlichen Vorkommens aller möglichen Orientierungen des Partikels zur Wanderungsgeschwindigkeitsrichtung die Annahme der Kugelgestalt für Mittelwertswirkungen als nächstliegender Ersatz für die davon wahrscheinlich nur wenig abweichende Wirklichkeit übrig. Es zeigt sich auch, daß die in den genannten Fällen ebenso berechtigt erscheinende Annahme *B* zu nur wenig verschiedenen Resultaten führt. Vielleicht liegt die Wirklichkeit bei kleinen und kleinsten Partikeln meist zwischen *A* und *B*.

Kommen mit gleichmäßiger räumlicher Dichte verteilte, parallel bewegte Moleküle an das kugelförmige Partikel (von beliebiger Masse und Anfangsgeschwindigkeit) heran, so finden sie sich im Falle *A* nach der Reflexion vom Partikel allseitig gleichförmig zerstreut, so daß für ein beliebig herausgegriffenes Molekül, das nur überhaupt das Partikel trifft, jede Geschwindigkeitsrichtung nach der Reflexion gleich wahrscheinlich ist.

122. *Fall B: Diffuse Reflexion.* — Ist das wandernde Partikel *aus einer genügend großen Zahl von Molekülen aufgebaut*, so ist an seiner Oberfläche *molekulare oder außerdem auch gröbere Rauhigkeit* anzunehmen, wie an der Oberfläche großer fester Körper. In diesem Falle kann man jedem Oberflächenelement des (im Groben) kugelförmigen Partikels die Eigenschaft zuschreiben, in beliebiger Richtung herankommende Moleküle bei der Reflexion genau oder angenähert so zu zerstreuen, daß jede Richtung des Fortgehens innerhalb der vom getroffenen Oberflächenelement nach außen gerichteten Halbkugel gleich wahrscheinlich ist, ganz ähnlich wie bei der diffusen Reflexion von Licht an vollkommen rauher Oberfläche.[1]) Wir nennen dies den „Fall der diffusen Reflexion" und bezeichnen ihn mit *B*. Diese diffuse Reflexion ergibt

1) Die Annahme bedeutet Bevorzugung der normalen Komponenten der Fortgangsrichtung nach dem Kosinusgesetz. Wir untersuchen unter *D* den noch weiter gehenden Fall des Fortgehens in ausschließlich normaler Richtung und finden keinen großen Unterschied im Endresultat der beiden Fälle.

sich bei Annahme elastischer Reflexionen mit gleichem Einfalls- und Reflexionswinkel, wenn man die Rauhigkeiten der Partikeloberfläche als kugelig annimmt (vgl. das Resultat von Fall *A* oben), was wohl zuerst von C. Maxwell erläutert und in bezug auf die Reflexion von Gasmolekülen an festen Oberflächen in Betracht gezogen worden ist.[1]) Die Stöße zwischen Mediumsmolekülen und Partikel können dann wieder als vollkommen elastisch betrachtet werden, wei bei *A*, jedoch mit dem Unterschiede, daß nun auch nichtzentrale Kraftkomponenten während der Stoßzeit vorkommen. Zu experimenteller Prüfung ist die Annahme *B* von Herrn Knudsen[2]) eingehend durchgeführt worden und Herr Gaede hat weiterhin gezeigt, daß sie (an geschliffenen Glasoberflächen) *in sehr verdünnten und trockenen Gasen* (unterhalb 0,001 mm Druck) mindestens angenähert der Wirklichkeit entspricht, wogegen bei höheren Gasdrucken die Annahme *C* bzw. *D* zur Geltung kommt, wahrscheinlich weil alsdann eine Flüssigkeitshaut die feste Oberfläche bedeckt.[3])

In gleichmäßiger Dichte parallel bewegt an eine Kugel herankommende Moleküle finden sich bei dieser Annahme *B* — wie beim Vergleich mit der Annahme *A* leicht einzusehen — nach der Reflexion nicht allseitig gleichförmig zerstreut, sondern mit Bevorzugung der der ursprünglichen Richtung entgegengesetzten Komponenten. Wir führen die Annahme *B* im Abschn. 6 in rein gaskinetischer Betrachtung durch und zeigen, daß sie, verglichen mit der Annahme *A*, eine nahezu im Verhältnis 4:3 verminderte Wanderungsgeschwindigkeit ergibt. Im Anschluß an die hydrodynamische Betrachtung ist die Annahme *B* bereits von den Herren Cunningham und Mac Keehan durchgeführt worden (a. a. O.). Wir zeigen unter 163, daß das gaskinetische und das hydrodynamische Resultat genügend gut aneinanderschließen.

123. *Aufnahme der Mediumsmoleküle in die Partikeloberfläche und nachheriges Abdampfen aus derselben.*

Wenn die Partikeloberfläche flüssig ist, sei es, daß das ganze Partikel diesen Aggregatzustand hat, sei es, daß es

1) C. Maxwell, Phil. Trans. 170. S. 231. 1879. Ges. Schriften, Bd. II, S. 764ff.

2) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28. S. 75. 1909.

3) W. Gaede, Ann. d. Phys. 41. S. 289. 1913.

fest und *mit einer Haut verdichteten Gases oder Dampfes überzogen* ist, so kann man annehmen, daß die das Partikel treffenden Mediumsmoleküle in der Oberflächenschicht untertauchen (absorbiert werden) und später wieder aus derselben abdampfen, wobei sie unabhängig vom Einfallswinkel vorwiegend senkrecht zum Oberflächenelement entweichen. Eine derartige Annahme ist ebenfalls bereits von C. Maxwell erwogen worden (a. a. O.). Nach Herrn Mac Keehans Fallversuchen an kleinen Wachskügelchen ist die Annahme nahe senkrechten Abgehens der Moleküle in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit, und dasselbe gilt auch von entsprechenden Versuchen der Herren Silvey[1]) und Knudsen und Weber[2]) an Quecksilbertröpfchen bzw. Glaskugeln in Luft. Herr Gaede endlich gelangt von ganz anderer Seite her zu eben derselben Annahme des senkrechten Abgehens der Moleküle von festen Oberflächen in Gasen, indem er mittels dieser Annahme imstande ist, das eigentümliche, schon von Herrn Knudsen beobachtete Minimum der Durchströmungsgeschwindigkeit von Gas durch Kapillaren zu erklären.[3]) Herr Gaede nimmt eine „Gashaut" an der Oberfläche der festen Körper an, welche die Austrittsrichtung der Gasmoleküle dahin beeinflussen, daß der senkrechte Austritt bevorzugt ist.[4]) Ich glaube indessen, daß die Haut hauptsächlich aus Wassermolekülen bestehen dürfte, daß sie nämlich identisch ist mit den von Bunsen[5]) und auch von den Herren Warburg und Ihmori[6]) eingehend studierten Wasserüberzügen an blanken Glasflächen und anderen Oberflächen. Hierauf deutet auch eine von Herrn Gaede selbst mitgeteilte Beobachtung

1) Zitate vgl. in der Einleitung.

2) Knudsen und Weber, Ann. d. Phys. **36**. S. 981. 1911. Die Versuche führten für kleine Kugelradien zu sehr nahe demselben Wert von A in Cunninghams Formel, welcher nach Mac Keehan zum senkrechten Austritt der Moleküle gehört (vgl. 155).

3) Gaede, Ann. d. Phys. **41**. S. 289. 1913.

4) W. Gaede, Ann. d. Phys. **41**. S. 289. 1913. Es heißt dort (S. 335): „Bei schrägem Austritt haben die Moleküle eine längere Strecke in der sehr dichten Gashaut zurückzulegen, so daß der freie Durchtritt um so mehr gehindert ist, je schräger die Austrittsrichtung ist."

5) R. W. Bunsen, „Über kapillare Gasabsorption", Ann. d. Phys. u. Chem. **24**. S. 321. 1885.

6) Warburg und Ihmori, Ann. d. Phys. u. Chem. **27**. S. 481. 1886.

über den Einfluß von Wasserdampf auf die Gasbewegung in engen Räumen[1]), während die von ihm mit bestens getrockneten Gasen ausgeführten Versuche der Annahme der Wasserhaut keineswegs widersprechen, indem eine solche, in gewöhnlicher Luft einmal gebildete Wasserhaut in absehbarer Zeit nur bei hohem Erhitzen sich verflüchtigt[2]), worauf der von Herrn Gaede benutzte Durchströmungsspalt nicht eingerichtet war. Das Verhalten der Gasmoleküle an einer mit einer Wasserhaut überzogenen festen Oberfläche wäre danach überhaupt nicht als Reflexion der Moleküle aufzufassen, sondern als Eindringen in die Wasserhaut — Absorption oder Kondensation — und späteres Wiederabdampfen aus derselben, wie bereits oben angegeben, ähnlich also dem Vorgang beim dynamischen Gleichgewicht irgendeines Dampfes mit seiner Flüssigkeit. Daß beim Wiederabdampfen die senkrechte Austrittsrichtung bevorzugt ist, folgt aus der zur Flüssigkeitsoberfläche senkrecht gerichteten Molekularkraft (Normalkraft der Oberflächenspannung), welche schief austretende Moleküle großenteils wieder zur Flüssigkeitsoberfläche zurückbringt. Die Annahme genau senkrechten Austritts ist übrigens zur Erklärung der von Herrn Gaede untersuchten Erscheinungen auch nicht nötig; es kommt nur auf Bevorzugung nahe senkrechter Austrittsrichtung an.

Daß *auch kleine Partikel, deren Durchmesser nicht die volle Größe des Radius der Wirkungssphäre umfaßt*, eine Wasserschicht an ihrer Oberfläche verdichten können, mindestens wenn sie elektrisch geladen sind, wurde bei der Untersuchung der Elektrizitätsträger und Kondensationskerne in Gasen sehr wahrscheinlich, indem sich zeigte, daß auch die kleinsten derselben stets komplexe Moleküle sind und daß die Anlagerungen, denen sie ihre Größe und Beständigkeit verdanken, in den gewöhnlichen Gasen sehr wahrscheinlich aus Wassermolekülen bestehen[3]), deren Anwesenheit auch bei sorgfältigster Gastrocknung in Glasgefäßen kaum auszuschließen ist.

1) W. Gaede, a. a. O., S. 293, 1913.

2) R. W. Bunsen, a. a. O. Auch die gewöhnliche Erfahrung beim Auspumpen elektrischer Entladungsröhren zeigt, daß Glasoberflächen selbst im Vakuum nur dann schnell von ihrem Wasserüberzug befreit werden, wenn man sie hoch erhitzt.

3) P. Lenard, „Probleme komplexer Moleküle", Heidelb. Akad. 1914, A. 29, S. 58.

124. Da alle diese sehr verschiedenartigen Erfahrungen gut zur Annahme des Festgehaltenwerdens der Mediumsmoleküle mit nachherigem Abdampfen unter Bevorzugung senkrechten Austritts passen, kann die Annahme für die durch diese Erfahrungen angezeigten Fälle mit Recht der Wanderungsgeschwindigkeitsberechnung zugrunde gelegt werden, nämlich *bei festen oder auch flüssigen aus nicht zu wenigen Atomen aufgebauten Partikeln in gewöhnlichen* (nicht absolut wasserdampffreien) *Gasen von nicht zu geringem Druck* (über 0,001 mm Quecksilber nach Gaede). Man kann als Grenzfall den des rein senkrechten Abgangs der wieder entweichenden Moleküle annehmen, wie wir es im folgenden unter *D* tun. Es sind jedoch bei dieser Annahme des Festgehaltenwerdens und Wiederabgehens der Moleküle zwei Fälle zu unterscheiden, welche in bezug auf die Wanderungsgeschwindigkeit verschiedene Resultate ergeben, nämlich *je nachdem das wandernde Partikel Rotationen von genügender Geschwindigkeit ausführt, bzw. genügend leicht Wärme leitet, oder nicht.* Wir betrachten daher diese beiden Fälle im folgenden gesondert: *C* und *D*.

125. *Fall C: Aufnahme der Mediumsmoleküle in die Partikeloberfläche und späterer Wiederaustritt bei rotierendem oder gut wärmedurchlässigem Partikel.* — Führt das Partikel Drehbewegungen aus, wozu durch schiefe Stöße von seiten der Mediumsmoleküle der Anlaß gegeben ist, so werden *die Wiederaustritte* der aufgenommenen Mediumsmoleküle, weil sie verspätet stattfinden, *ohne alle Beziehung zur Wanderungsgeschwindigkeitsrichtung mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach jeder beliebigen Richtung des Raumes hin stattfinden.* Denn die Rotationen lassen ebenso regellosen Wechsel von Achse und Geschwindigkeit erwarten, wie die Schiefe der sie erzeugenden Stöße regellos wechselt, und außerdem ist auch die Verspätungszeit vom Eintritt bis zum Wiederaustritt eines Mediumsmoleküls nicht als einheitlich anzusehen, was bei vorhandener Rotation an sich schon die Austritte allseitig gleichmäßig verteilen würde, wenn nur *die Rotationsachse keine Beziehung zur Kraftrichtung* hat. Es ist dann aber auch gleichgültig, ob die Wiederaustritte senkrecht oder schief zur Partikeloberfläche erfolgen, wonach in diesem Falle *C* das allein Wesentliche überhaupt nur *die Verspätung des Wiederaustritts* ist.

Wenn aber demnach der Wiederaustritt nach jeder Richtung

des Raumes hin mit gleicher Wahrscheinlichkeit erfolgt, kann die beim Wiederaustritt auf das Partikel ausgeübte Kraftwirkung keinen Einfluß auf die einseitig gerichtete Wanderungsgeschwindigkeit haben. Es besteht daher in diesem Falle *C* die Beeinflussung der Wanderungsgeschwindigkeit durch die Mediumsmoleküle nur in der Stoßwirkung *bei der Aufnahme* der Moleküle in die Oberflächenschicht des Partikels. Für die Aufnahme gilt aber die einfache Bedingung, daß Mediumsmolekül und Partikel eine gemeinsame Geschwindigkeit annehmen, wie beim vollkommen unelastischen Stoße, wobei außerdem nur noch das Schwerpunktsprinzip maßgebend ist. Auf dieser Grundlage berechnen wir die Wanderungsgeschwindigkeit für diesen Fall *C* im folgenden Abschnitt 6, und wir finden sie von gleicher Größe wie im Falle *A*.

126. Als eine besondere Voraussetzung für das Eintreten des Falles *C* ist ersichtlich, daß die *Zwischenzeit vom Eintritt bis zum Austritt des Moleküls nicht klein ist gegenüber der Umdrehungsdauer des Partikels*. Es ist anzunehmen, daß diese Voraussetzung bei den *kleinen Partikeln*, um welche es sich innerhalb des Gültigkeitsbereiches der gaskinetischen Formel handelt, erfüllt ist. Denn je kleiner das Partikel ist, desto schnellere Rotationen müssen eintreten, da das Trägheitsmoment mit abnehmendem Radius des Partikels schneller sinkt als die Drehmomente der Stoßkräfte.

Außer der Rotation mit unabhängiger Achsenrichtung kann auch *schneller Wärmeaustausch innerhalb des Partikels* dieselbe für das Eintreten des Falles *C* maßgebende Wirkung der allseitigen Verstreuung der Austritte haben. Denn es muß für jedes in die Oberflächenschicht eintretende und in ihr festgehaltene Mediumsmolekül eine gewisse Wärmemenge im Partikel auftreten, welche als Kondensationswärme bzw. als Äquivalent der bei der Festhaltung verlorenen kinetischen Energie des Moleküls aufzufassen ist, und diese Wärmemenge kann durch Leitung an eine andere Stelle der Partikeloberfläche gelangen und dort das Freiwerden eines anderen Mediumsmoleküls bewirken, welches demnach an einer Stelle austritt, deren räumliche Lage um so weniger Beziehung zur Eintrittsstelle hat, je besser der Wärmeaustausch im Partikel ist. Auch hierfür kommt es danach, wie für das Auftreten genügend schneller Rotationen, auf *genügende Kleinheit* des Partikels an.

Es ist daher zu erwarten, *daß der Fall C auf Partikel paßt, bei welchen nach 123 u. 124 der verspätete Austritt anzunehmen ist und die außerdem genügend klein sind.* Letzteres dürfte übrigens wohl immer zutreffen, sobald überhaupt die gaskinetische Lösung in Betracht kommt, wofür wir im Abschnitt 8 die Bedingungen untersuchen.

127. *Fall D: Senkrechtes Abdampfen der Moleküle bei nichtrotierendem Partikel.* — Bei Partikeln, die infolge ihrer erheblichen Größe viele Zusammenstöße mit Mediumsmolekülen nahe gleichzeitig erleiden, so daß die einzelnen Drehmomente vermöge der ebenfalls erheblichen Masse des Partikels nahe sich aufheben, kann keine schnelle Rotation eintreten; auch ist bei so großen Partikeln schneller innerer Wärmeaustausch ausgeschlossen. Die Stellen der Austritte der in die Partikeloberfläche aufgenommenen Mediumsmoleküle werden dann nahe den Eintrittsstellen liegen müssen, so daß man zur Vereinfachung zusammenfallen von Eintritts- und Austrittsstelle jedes Moleküls trotz der Verspätung des Austritts annehmen kann.

Es treten dann nicht nur beim Eintritt des Partikels, sondern auch beim Austritt Stoßkräfte auf, welche die in Richtung der Wanderungsbewegung fallende Geschwindigkeitskomponente des Partikels beeinflussen. Wir nehmen zur Berechnung des Falles im folgenden Abschnitte an, daß der Austritt in Richtung des Partikelsradius erfolgt und zwar mit solcher Geschwindigkeit, daß die beim Eintritt verlorene lebendige Kraft vollkommen wieder ersetzt wird, so daß keine Aufhäufung von Energie (Wärme) im Partikel erfolgt, seine Temperatur also konstant bleibt.[1]) Wir erhalten dabei eine Wanderungsgeschwindigkeit, welche $^3/_5$ derjenigen im

1) Da nach dieser Annahme lebendige Kraft bei den Zusammenstößen auch im Falle *D*, und ebenso *C*, nicht verloren geht, ebensowenig wie in den Fällen *A* und *B*, kann die ungeordnete Bewegung des Partikels in allen Fällen als gastheoretisch angenommen werden, so daß $M_i W_i^2 = M W^2$, was wir im folgenden Abschnitte benutzen. Die geringe Abweichung, die hiervon infolge der Überlagerung der Wanderungsbewegung des Partikels eintreten muß, dürfen wir vernachlässigen, da ω stets sehr klein anzunehmen ist gegenüber der gastheoretischen Geschwindigkeit W_i. Nur bei außerordentlich großen treibenden Kräften oder bei sehr tiefen Temperaturen oder wenn man ungeordnete Partikelgeschwindigkeiten annehmen will, die aus irgendwelchen Gründen viel kleiner als gastheoretisch sind, so daß die soeben

Falle *A* (elastische Reflexion) ist.[1]) Würde man statt genau senkrechtem Austritt nur Bevorzugung der normalen Austrittskomponente annehmen, so wäre dies offenbar ein Übergang zum Falle *B* der diffusen Reflexion, und man würde also dann einen Faktor zum Falle *A* erwarten müssen, der zwischen $^3/_5$ und $^3/_4$ liegt.[2])

Zu diesem Falle *D* gehören die relativ sehr großen, von den Herren Mac Keehan, Silvey, Knudsen und Weber bei ihren Versuchen benutzten Partikel, bei welchen — wie bereits bemerkt (123) — die Annahme senkrechten Austrittes bewährt gefunden worden ist.[3]) Daß die genannten Autoren bei Vergleichung ihrer Beobachtungen mit der Theorie die hydrodynamische Gleichung zum Ausgang nahmen, entspricht vollkommen der erheblichen Größe der benutzten Partikel, und es dürfte der Fall *D* mit Sicherheit auch überhaupt nur *bei Partikeln verwirklicht zu erwarten sein, die groß genug sind um in den Gültigkeitsbereich der hydrodynamischen Wanderungsgleichung zu fallen*; kleinere Partikel mit molekülfesthaltender Oberfläche dürften den Fall *C* ergeben. Unsere Entwicklung der gaskinetischen Lösung für den Fall *D* (Abschn. 6) erfolgt dementsprechend auch nicht so sehr mit Rücksicht auf unmittelbare Anwendung, sondern vielmehr besonders zur Vergleichung mit der hydrodynamischen Lösung. Wir finden dabei den gegenseitigen Anschluß der beiden Lösungen in diesem Falle *D* ebenso befriedigend, wie in den anderen Fällen (s. Abschn. 8).

128. *Fall E: Fernkräfte zwischen Partikel und Mediumsmolekülen.*

Dieser Fall ist von Herrn Langevin[4]) für Elektrizitäts-

---

angeführte gastheoretische Gleichung überhaupt ausgeschaltet ist, liegt der Fall anders. Es tritt dann die schon in Teil II, S. 55ff., durchgeführte Betrachtung in Kraft.

1) Mit $\mu = 1$ (große Partikel), was aber hier so gut wie allein in Betracht kommt.

2) Vgl. die Fußnote über das Kosinusgesetz zum Falle *B*.

3) Die Annahme der Nichtrotation ist dabei stillschweigend, aber mit Recht hinzugenommen worden.

4) P. Langevin, Ann. de Chim. et de Phys. 5. S. 245. 1905. Weiter fortgesetzt wurden die Fernkraftrechnungen von Wellisch (Trans. Roy. Soc. 209. S. 429. 1909) und Reinganum (Phys. Zeitschr. 12. S. 575, 666. 1911; Ann. d. Phys. 38. S. 649. 1912).

träger oder freie Elektronen als wandernde Partikel angenommen worden, wobei er von der Hypothese ausging, daß die elektrisch neutralen Mediumsmoleküle gegenüber der elektrischen Ladung des Partikels wie dielektrische Kugeln sich verhalten. Es ergeben sich dabei Fernkräfte, die bis auf sehr merkliche Vielfache des Molekülradius wirken würden.[1]) Daß aber die Annahme derartiger Fernkräfte nach bisheriger Kenntnis ganz unbegründet ist, indem Moleküle auch freien Elektronen gegenüber keinen wesentlich größeren Kraftwirkungsbereich zeigen als unelektrischen Molekülen gegenüber, daß also die Erfahrung sogar unmittelbar das Nichtbestehen der von Herrn Langevin angenommenen Fernkräfte zeigt, habe ich bereits früher auseinandergesetzt[2]), und es gilt das dort Vorgebrachte auch heute noch. Eine vorher anscheinend vorhanden gewesene teilweise Bestätigung von Herrn Langevins Annahme — bei den freien Elektronen in der Bunsenflamme[3]) — hat sich neueren Untersuchungen gegenüber verflüchtigt, indem die dabei zugrundegelegte Moreausche Messung der Wanderungsgeschwindigkeit dieser Elektronen, welche mit Herrn Langevins Annahme übereinstimmte, als gänzlich falsch sich erwies was ich eingehend gezeigt habe.[4]) Ebenso steht es auch mit

---

1) In der Wanderungsgeschwindigkeitsgleichung kommt dies als starke scheinbare Vergrößerung des Molekülradius bzw. des Partikelradius zur Geltung.

2) Vgl. Teil I, S. 407, 408. 1913.

3) Vgl. Teil I, S. 405, 406. Es ist dort (1913) die ganz verfehlte Moreausche Messung der Wanderungsgeschwindigkeit der Elektronen noch als zutreffend angenommen worden, da bis dahin von keiner Seite her irgendwelche Bedenken gegen dieselbe vorgebracht worden waren. Eben die Übereinstimmung von Herrn Langevins Annahme mit dieser Messung zeigt heute besonders deutlich die Unhaltbarkeit der Annahme der Fernkräfte.

4) P. Lenard, „Über Elektronen und Metallatome in Flammen", Heidelb. Akad. 1914, A 17, S. 3—6 und 16—19. Der dort eingehend entwickelte Nachweis des prinzipiellen Fehlschlusses, welcher Herrn Moreaus Meßweise der Wanderungsgeschwindigkeiten zugrunde liegt, ist in Herrn Marx' Darstellung der Flammenleitung im „Handbuch der Radiologie" (Bd. IV, Leipzig 1917) nicht eingesehen worden, wonach manche dortige Angaben nicht der gegenwärtigen Kenntnis entsprechen. Die zugehörigen Messungen von E. Wilckens sind inzwischen ebenfalls ausführlich veröffentlicht worden (Diss. Heidelb. 1914, gedruckt 1916).

den Wanderungsgeschwindigkeitsmessungen der positiven Träger, welche Herr Langevin benutzt hat, um seine Resultate mit der Erfahrung zu vergleichen.[1])

129. Wir lassen daher den Fall *E* im vorliegenden des weiteren außer Betracht. Es müßte abgewartet werden, ob sich noch experimentelle Grundlagen fänden, die die Aufrechterhaltung von Herrn Langevins Annahme vielleicht für gewisse Fälle zu rechtfertigen geeignet wären. Mangels solcher Grundlagen wird man aber schließen müssen, was ich bereits früher eingehend hervorgehoben habe, und wofür auch andere Anhaltspunkte sich finden, daß die von Herrn Langevin bei seiner Annahme benutzte Übertragung der gewöhnlichen Elektrodynamik auf einzelne Elementarquanten in diesem Falle unzulässig ist.[2]) Nachgewiesenermaßen kann ein Einfluß elektrischer Ladung eines Partikels auf seine Beweglichkeit zwischen neutralen Gasmolekülen ebensowenig angenommen werden, als ein Einfluß von Ladung auf die Dampfkondensationswirkung von Partikeln besteht.[3]) Beide Einflüsse müssen bis zum Beweise des Gegenteils als ganz willkürlich vorausgesetzt betrachtet werden; sie sind durch die bisherige Erfahrung nicht nur nicht bestätigt, sondern sogar deutlich widerlegt worden, worüber die hier zitierten Arbeiten nachzusehen sind. In beiden Fällen ist innerhalb der Genauigkeitsgrenze aller bisherigen Messungen nur die durch Atomzahl und Aufbau bedingte *Größe* des Partikels, *nicht seine Ladung* bestimmend. Auf die Größe eines Partikels hat elektrische Ladung allerdings insofern Einfluß, als durch die Ladung gewisse im Medium etwa vorhandene Molekülsorten (besonders H_2O) festgehalten werden, wodurch ursprünglich freie Elektronen oder monomolekulare Elektrizitätsträger meist in kurzer Frist

---

1) Vgl. hierüber bereits Teil I, S. 406, Fußnote 4, 1913.

2) Vgl. Teil II, S. 408, Fußnote 1. Andere Fälle von Besonderheiten im Verhalten einzelner Elektronen, welche auf eine in der gewöhnlichen Elektrodynamik nicht vorgesehene Diskontinuität der elektromagnetischen Kraftfelder hinweisen, vgl. in „Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten", Noten 517 und 695a, Heidelberg bei Winter, 1918.

3) Vgl. hierüber „Probleme komplexer Moleküle", Heidelb. Akad. 1914, A. 29, S. 35ff.

zu komplexen Molekülen werden[1]), um dann dauernd als solche weiter sich zu bewegen; mit dieser Vergrößerung des Partikels durch Anlagerungen ist aber die Wirkung seiner elektrischen Ladung in bezug auf die Mediumsmoleküle nach bisheriger Kenntnis auch erschöpft.

130. Selbstverständlich ist mit dem Fallenlassen der Annahme *E* nicht geleugnet, daß alle beim Zusammentreffen von Partikel und Mediumsmolekülen wirksamen Molekularkräfte elektromagnetischer Natur sind und also als „Fernkräfte" betrachtet werden können; jedoch handelt es sich hier nur um die Frage, ob die Abstandsbereiche, innerhalb deren diese Kräfte merklich wirksam werden, so große Bruchteile des Atomradius ausmachen, daß man für das Wanderungsproblem mit ihnen im einzelnen rechnen muß, wie es Herr Langevin und die anderen als seine Nachfolger oben genannten Autoren tun, statt bloße Stoßwirkung anzunehmen, und diese Frage ist zu verneinen.[2]) Es kommt nur darauf an, zur Berechnung der Stoßwirkung den richtigen Molekülradius einzusetzen.[3])

Ebensowenig ist natürlich geleugnet, daß Fernkräfte Coulombscher Art mit verhältnismäßig großem Wirkungsbereich zwischen elektrisch geladenen Partikeln und *elektrisch geladenen* Mediumsmolekülen bestehen; im Gegenteil ist *in diesem Falle* keine Ursache zu Zweifeln vorhanden.[4]) Dieser

1) Vgl. „Probleme komplexer Moleküle", Heidelb. Akad. 1914, A. 29, Teil III, S. 58.

2) Vgl. die Einleitung dieses Abschnittes.

3) Vgl. die ausführliche Auseinandersetzung hierzu in Teil I, S. 397—400. Es ist dort auch auf Herrn Sutherlands Beziehung, betreffend die für verschiedene Temperaturen gültigen Molekülradien hingewiesen. Herr Sutherland hat auch eine theoretische Untersuchung über die Abhängigkeit der Wanderungsgeschwindigkeiten von der Temperatur veröffentlicht (Phil. Mag. 18. S. 341. 1909), welcher wir indessen nicht zustimmen können, da sie die genannte Veränderlichkeit der Molekül*radien* und die Veränderungen in der *Zahl* der Moleküle komplexer Elektrizitätsträger — also zwei gänzlich verschiedene Dinge — in Verquickung behandelt, was auch zu sonderbaren, außer Zusammenhang mit sonstiger Erfahrung stehenden Schlußfolgerungen führt.

4) Dies ist auch bereits früher hervorgehoben worden (vgl. Teil I, 1913, Fußnote S. 408). Diese Fernkräfte zwischen je zwei elektrischen Ladungen bestehen in der Tat ebensowohl nach dem Coulombschen

Fall kommt aber für das Wanderungsgeschwindigkeitsproblem gar nicht in Betracht, da ausschließlich oder auch nur zu irgendwelchem wesentlichen Teil aus elektrisch geladenen Molekülen bestehende Medien nicht vorkommen.

Heidelberg, 8. August 1919.

(Schluß im nächsten Bande.)

Gesetz der gewöhnlichen Elektrostatik, als auch (als Mittelwerte) nach unserer Vorstellung von nur je einer Kraftlinie an jedem elektrischen Elementarquant. Dagegen kann im Falle des Gegenüberstehens einer elementaren elektrischen Ladung und eines elektrisch *neutralen* Moleküls (Atoms) in unserer Vorstellung *elektrische* Anziehung im allgemeinen überhaupt nicht stattfinden, da die elementare Ladung nur *eine* elektrische Kraftlinie zur Verfügung hat, welche nur dort endet, also auch — für sich allein bestehend — nur dorthin wirkt, wo die entgegengesetzte Ladung sitzt. Nur mittels *magnetischer* Kräfte kann in unserer Vorstellung ein Zusammenhalten einer elektrischen Elementarladung mit noch anderen Ladungen bestehen als nur mit der einen, ihr entgegengesetzten Ladung, an welcher ihre Kraftlinie augenblicklich endet. Solche magnetischen Kräfte kommen durch genügend schnelle Bewegung der Ladungen zustande. Ihnen schreiben wir beispielsweise auch den Zusammenhalt zu zwischen den Valenzelektronen elektropositiver Atome und den Valenzstellen elektronegativer Atome im Molekül. (Vgl. „Über Äther und Materie", 2. Aufl. S. 34, Heidelberg 1911, 1. Aufl. S. 17, 1910; „Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten", Heidelberg 1918, Note 300b, S. 107.) Dem entsprechen auch die von Hrn. W. Kossel angegebenen Molekülmodelle (Ann. d. Phys. 49. S. 359. 1916).

(Eingegangen 6. August 1919.)

4. *Über Thermokräfte in einem chemisch homogenen Leiterkreise; Bearbeitungs- und Oberflächenerscheinungen; von G. Borelius.*

§ 1. Einleitung.

Beobachtungen über Thermokräfte in chemisch homogenen aber mechanisch heterogenen Leiterkreisen sind fast ebenso alt, wie die Kenntnisse der thermoelektrischen Erscheinungen überhaupt, und sind während der letzten hundert Jahren wiederholt Gegenstand der Forschung gewesen. Die Untersuchungen bis zu 1894 sind von Wiedemann[1]) zusammengestellt und ausführlich referiert worden. Für Literaturangaben betreffend den älteren Arbeiten, die im folgenden erwähnt werden, wollen wir ein für alle Mal auf das Wiedemannsche Handbuch verweisen.

Wenn wir den Einfluß eines Magnetfeldes auf der thermoelektrischen Stellung eines Metalles ausschließen, können die übrigen in der Literatur beschriebenen Erscheinungen in drei Gruppen eingeteilt werden:

1. Temporäre und nachbleibende Änderungen der Thermokraft durch Druck und Zug.

Diese zuerst von Kelvin entdeckten Erscheinungen sind die zurzeit am besten bekannten. Eine Zusammenstellung der experimentell gefundenen Konstanten findet man bei Baedecker in Graetz Handbuch.[2]) Auf diese Erscheinungsgruppe wird im folgenden nicht näher eingegangen werden.

2. Die Änderung der Thermokraft hervorgerufen durch mechanische Bearbeitung, wie Ziehen, Walzen usw. oder umgekehrt durch thermische Behandlung der Metalle.

---

1) G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektrizität II, S. 259 f. 1894.

2) L. Graetz, Handbuch d. Elektrizität u. d. Magnet. 1. S. 714. 1918.

Obgleich es eine alltägliche Erfahrung eines jeden Forschers auf dem Gebiete der Thermoelektrizität ist, daß mechanische Bearbeitung eines Metalles oft eine bedeutende Änderung seiner Thermokraft hervorbringt, ist die Sache noch kaum systematisch untersucht oder eingehend diskutiert worden. Man hat sich im allgemeinen mit einem Vergleich von harten und weichen Drähten begnügt. So fand z. B. Noll[1]) Differenzen der Thermokraft zwischen harten und weichen Metallen die einige Zehntel Mikrovolt pro Grad erreichten und bald positiv bald negativ waren. Ihr Zeichen und Größe war übrigens von Verunreinigungen stark abhängig. Bei Au und Cu war die Differenz verschwindend klein. Tammann[2]) hat dieses Resultate zusammengestellt und diskutiert. Er nimmt an, daß die Bearbeitung nur eine Umorientierung der sonst intakten Strukturelemente der Metalle veranlaßt, und schließt, daß reines Au und Cu thermoelektrisch isotrop, die übrigen untersuchten Metalle und Legierungen anisotrop sind. Wir werden später sehen, daß diese Schlußart nicht berechtigt ist.

3. Thermokräfte hervorgerufen durch Assymetrie der Temperaturgefälle z. B. Thermokräfte bei der Berührung ungleich warmer Drähte, Thermokräfte bei Einschnürungen usw.

Bequerel entdeckte, daß zwei Pt-Drähte, die zu einem Galvanometer verbunden waren, wenn sie ungleich erwärmt über Kreuz gelegt wurden, thermoelektrische Ströme gaben. Ähnliches wurde dann von mehreren Forschern an anderen Metallen beobachtet. Quantitativ vergleichende Messungen führte Magnus aus. Bei seinen Messungen, die in mehreren Hinsichten die sorgfältigsten der bis jetzt ausgeführten sind, wurden bei bestimmten mäßigen Temperaturgefällen (8—100° bzw. 8—250°) gut gereinigte Drähte sowohl im weichen als harten Zustande gemessen. Leider war die Art der Berührung recht unbestimmt und die Drähte der Zeit gemäß sehr unrein. Da Magnus auch Versuche mit Quecksilber ausgeführt hatte und dabei zu negativem Resultat gekommen war, betrachtete er mechanische Zustandsvariationen in den festen Metallen als Ursache der Berührungserscheinungen. Die Aussagen über die Natur dieser Zustandsvariationen waren jedoch recht unbe-

1) K. Noll, Wied. Ann. 53. S. 874. 1894.
2) G. Tammann, Metallographie. S. 131. 1914.

stimmt. Franz, Gaugain u. a., die sich besonders mit dem Einfluß von Oxydschichten experimentell beschäftigten, waren geneigt auch bei den reinen Metallen die Berührungseffekte fremden Oberflächenschichten zuzuschreiben. Le Roux untersuchte besonders die Erscheinungen bei der Berührung von verschiedenartig geformten Drahtenden, und sieht als Ursache der dabei auftretenden Thermokräfte die auf Grund der ungleichen Wärmeausdehnung auftretenden Spannungen, Benedicks[1]), welcher aus theoretischen Gründen eine Abhängigkeit der Thermokraft von der Steilheit des Temperaturgefälles erwartete, benutzte die Berührung zweier Drähte, um große Temperaturgefälle für die Aufsuchung des erwarteten Effektes zu erzielen. Er führte bei 28 Metallen qualitative Zeichenbestimmungen aus und fand überall Übereinstimmung mit den Zeichen des Thomsoneffektes, was gerade seinen Erwartungen entgegenkommt. Diese Zeichenregel sowohl als das Vorhandensein des Berührungseffektes bei verschweisten Platindrähten und anderen untersuchten Beispielen, die entweder durch Oxydschichten noch durch thermische Spannungen erklärt werden können, machen Benedicks davon überzeugt, daß schon die Berührungserscheinungen bei festen Metallen als entscheidenden Beweis für die Existenz eines neuen thermoelektrischen Effektes gelten können.

Ebenso wie bei den Berührungserscheinungen gehen die Ansichten verschiedener Forscher über die Thermokräfte, die bei der Erwärmung eines Drahtes in der Nähe einer Einschnürung entstehen, weit auseinander. Benedicks[2]) hat auch die Umkehrung dieser Erscheinung, eine durch den elektrischen Strom erzeugte Erwärmung bzw. Abkühlung an den Seiten der Einschnürung beobachtet. Er sieht die Ursache zu dieser, formal mit dem Peltiereffekte übereinstimmenden Erscheinung in einer Mitführung der Wärme durch den Strom.

Unter den verschiedenen Hypothesen, die zur Erklärung der Erscheinungen unserer dritten Gruppe von verschiedenen Seiten aufgestellt worden sind, ist somit die Annahme von einer Abhängigkeit der Thermokraft von dem Temperaturgradienten wieder aktuell geworden. Nachdem die Abwesenheit eines solchen Effektes eine Zeit lang durch die Messungen

1) C. Benedicks, Ann. d. Phys. 55. S. 1 u. 103. 1918.
2) C. Benedicks, Compt. rend. 167. S. 296. 1918.

von Matteucci und besonders die von Magnus an flüssigen Quecksilber als bewiesen angesehen war, ist seiner Existenz wieder zuerst von Egg-Sieberg[1]) behauptet (seine Resultate wurden jedoch bald danach von Heinke[2]) bestritten) und jetzt, wie erwähnt, von Benedicks nach einer Reihe diesbezüglichen Messungen, angekündigt.

Es schien dem Verfasser als ob keine der vorliegenden Hypothesen für die Bearbeitungs- oder die Berührungserscheinungen als experimentell hinreichend gut gegründet angesehen werden konnte, und zwar wegen des vollständigen Mangels an allseitigen, quantitativen Messungen. Aus diesem Grund ist die vorliegende *quantitativ orientierende* Untersuchung begonnen. Sie hat einige Tatsachen aufgewiesen, die metallographisch und für die Erzeugung von konstanter Thermokräfte von Interesse sind, und scheint durch die Entdeckung einer Eigentümlichkeit der metallischen Oberflächenschichten den Schlüssel zu dem Verständnis der rätselhaften Berührungs- und Einschnürungserscheinungen gegeben zu haben.

§ 2. Prinzipielles über den Einfluß mechanischer Bearbeitung der Thermokraft.

Die Thomsonsche Theorie[3]) der Thermoelektrizität in kristallinischen Körpern besagt, daß die Thermokraft e in einer Richtung, die mit den thermoelektrischen Hauptsachen die Winkel α, β und γ einschließt, von der Größe

$$e = e_\alpha \cos^2 \alpha + e_\beta \cos^2 \beta + e_\gamma \cos^2 \gamma$$

ist, wenn e_α, e_β und e_γ die Thermokräfte in den Hauptachsenrichtungen sind. Hieraus ergibt sich, daß die Thermokraft in einem nicht orientierten Materiale durch

$$e_0 = \frac{e_\alpha + e_\beta + e_\gamma}{3}$$

gegeben sein soll. Hat man aber durch Bearbeitung das Material vollständig orientiert, so ist das experimentell aufweisbare notwendige Kriterium dafür, daß die Änderung der Thermo-

1) H. Egg-Sieberg, Elektrotechn. Zeitschr. 21. S. 619. 1900.
2) C. Heinke, Handb. d. Elektrotechn. I. 1. S. 260. 1902.
3) W. Thomson, Phil. mag. 11. S. 433. 1856.

kraft ausschließlich von einer Orientierung der Strukturelemente herrührt

$$(e_1 - e_0) + (e_2 - e_0) + (e_3 - e_0) = 0,$$

wo e_1, e_2, e_3 die Thermokräfte in drei beliebigen, zueinander senkrechten Richtungen sind. Entsteht bei der Seite der Orientierungseffekte noch andere z. B. isotrope Änderungen der Thermokraft durch die Bearbeitung, wird deren mittlere Größe durch

$$e_i = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{3} - e_0$$

gegeben.

Inwieweit die beobachteten Effekte der einen oder anderen Art sind, ist noch in keinem Falle festgestellt worden. Nur wissen wir aus einer qualitativen Untersuchung von Pilleur und Jannetaz[1]), daß verschiedene Metalle durch Walzen anisotrop gemacht werden können, und parallel und senkrecht der Walzrichtung verschiedene Thermokräfte zeigen.

§ 3. Erste Orientierung über die Änderung der Thermokraft durch Walzen und Ziehen.

Durch vorläufige Versuche hatte ich gefunden, daß die Änderung der Thermokraft, die bei der Erhitzung eines bearbeiteten Metalles eintritt, oft eine recht verwickelte Funktion der Erhitzungstemperatur sowie auch der Erhitzungsdauer ist, daß aber die Kompliziertheit der Erscheinung, wie in § 7 näher ausgeführt werden wird, einer chemischen Einwirkung der Atmosphäre, wahrscheinlich Absorption oder Abgabe von Gasen zuzuschreiben ist. Wenn wir die Thermokraftänderungen der rein mechanischen Einwirkungen auf chemisch unveränderten Metallpräparate verfolgen wollen, müssen wir von dem schon erhitzten Metalle ausgehen und den Einfluß verschiedener Bearbeitung untersuchen.

Wird nun ein erhitzter weicher Draht auf immer kleinere Dimensionen ausgewalzt oder ausgezogen, ändert sich seine Thermokraft erst verhältnismäßig stark. Bei weiter getriebener Bearbeitung erreicht aber die Thermokraft einen nahen konstanten Endwert, vorausgesetzt, daß die Querdimensionen nicht so klein geworden sind, daß die in § 5 näher beschriebenen

1) L. Pilleur u. E. Jannetaz, Journ. de Phis. 5 S. 172. 1886.

Oberflächenerscheinungen störend einwirken. Bei dieser ersten grob orientierenden Untersuchung über den Einfluß verschiedener Art der Bearbeitung habe ich die Bearbeitung soweit möglich vollständig getrieben, dagegen von der Einwirkung der Oberflächenerscheinungen abgesehen, wofür die erhaltenen Größen nur als approximativ zu betrachten sind.

Untersucht wurden gezogene Drähte sowie parallel und senkrecht zu ihrer Längsrichtung ausgewalzte Bänder. Die Ziehung geschah in einem Zieheisen. Zum Walzen wurde ein sehr geeigneter kleiner Werkstattwalzer benutzt, der auf meinen Wunsch von der Mechanikerfirma A. B. Vetenskapliga Instrument in Lund konstruiert wurde. Die Metalle konnten je nach ihrer Weichheit auf 0,05—0,005 mm Dicke ausgewalzt werden.

Zur Messung der Thermokräfte diente ein Apparat von folgender Konstruktion. Ein dickwandiges Messinggefäß trug am Deckel einen kupfernen Zylinderring von etwa 1 cm Dicke, 3 cm Höhe und 7 cm inneres Diameters. Durch Ring und Deckel gingen acht davon dünn isolierte Kupferzapfen, die außen sowie innen kupferne Klemmschrauben trugen. (Dieses Gefäß, innen verschiedenartig ausgestattet, ist auch zu mehreren der im Folgenden beschriebenen Messungen sowie zu einer früheren Untersuchung der Thomsonwärme benutzt worden.) Bei den vorliegenden Messungen war über dem Ende des Zylinderringes ein Glimmerblatt gespannt. In der Mitte dieses Blattes war ein kupferner, elektrisch erwärmter Heizkörper befestigt. Die Enden des Heizdrahtes führten zu zwei der acht Schrauben. An dem Heizkörper und den sechs übrigen Schrauben konnten bis zu sechs Metallpräparate befestigt und thermoelektrisch verglichen werden. Zwei von ihnen waren immer dieselben verschiedenen Silberdrähte, die als Vergleichsdrähte benutzt wurden, und deren Thermokraft, durch Vergleich mit einem kalibrierten Kupfer-Konstantanelement zu $29{,}9 \cdot 10^{-8}$ Volt pro Grad bestimmt wurde.

Nachdem die Temperatur des Heizkörpers konstant geworden war, wurde zu zwei und zwei der Schrauben über einen thermokraftfreien Stromwender ein Drehspulgalvanometer von Hartmann & Braun angeschlossen. Der Widerstand des Stromkreises war groß genug, damit die Verschiedenheiten der Präparatwiderstände versäumt, und die Thermokräfte der

Galvanometerausschläge einfach proportional gesetzt werden konnten. Die Temperatur des Gefäßes war Zimmertemperatur, 15—18°, die des Heizkörpers etwa 20° höher.

In dieser Weise wurde nun die Einwirkung verschiedener Art der Bearbeitung an mehreren Metallen untersucht. Das Resultat ist in der Tab. 1 zusammengeführt worden. Das Ausgangsmaterial auf dem die Thermokräfte bezogen sind, war bei Al, Ag, Cu, Au, Pb, Zn, Cd und Sn in einem Tiegelofen zum Schmelzpunkt erhitzt, Ni und Fe wurden in Drahtform elektrisch abgeschmolzen, Pt und Konstantan in der Gebläseflamme erhitzt. Die Bearbeitung war, mit Ausnahme des besonders hartbearbeiteten Ni, nahe vollständig, bei den parallel gewalzten Bändern am besten, bei den gezogenen Drähten am wenigsten gut. Bei Ni und Fe war die Thermokraft, wie später näher ausgeführt werden wird, nach der Bearbeitung zeitlich veränderlich. Die Zahlen der Tabelle sind etwa eine halbe Stunde nach der Bearbeitung erhalten.

Tabelle 1.

Thermokräfte kaltbearbeiteter Metalle gegen das geglühte Ausgangsmaterial in Volt. 10^{-6} pro Grad.

Material	Gewalzt ∥	Gewalzt ⊥	Gezogen	Bezugsquelle
Al I	+ 28	+ 40	+ 42	Unbekannt
Al II	+ 14	+ 14	+ 12	Kahlbaum
Fe	− 37	− 35	− 34	„
Ni	+ 38	+ 23	+ 38	„
Pt I	− 30	− 24	− 25	Unbekannt
Pt II	+ 6	+ 6		Heraeus
Cu I	+ 14	+ 12	+ 8	Kahlbaum
Cu II	+ 9	+ 8	+ 6	Kahlbaum (purriss)
Ag	+ 58	+ 48	+ 55	Nordiska Affineriert
Au I	+ 8	+ 5	+ 7	„ „
Pb	− 3	− 3	− 3	Kahlbaum
Zn	− 25	+ 28	+ 24	Unbekannt
Cd	+ 4	+ 113	+ 17	Kahlbaum
Sn	+ 17	− 11	± 0	Merck
Konstantan	− 72	+ 32	− 70	Unbekannt

Trotz des approximativen Charakters der Zahlen sind aus der Tabelle deutliche Gesetzmäßigkeiten auszulesen. Es ist ein bestimmter Unterschied in dem Verhalten der acht ersten Metalle oberhalb des Striches, die alle dem regulären Kristall-

systeme gehören, und in dem der Metalle Zn, Cd und Sn, die in anderen Formen kristallisieren. Zwar etwas extrapolatorisch können wir schließen, daß reine Metalle des regulären Systems bei vollständiger Bearbeitung dieselbe Änderung der Thermokraft bekommen, wenn sie gezogen und parallel oder senkrecht gewalzt werden. Verunreinigungen spielen, wie wir an Al, Pt und Cu sehen, eine große Rolle. Die Abweichungen der drei Kolummen können bei den regulären Metallen auf die Rechnung kleiner Verunreinigungen sowie mangeldner Bearbeitung und Oberflächenerscheinungen geschrieben werden, bei den übrigen sind sie deutlich mit der kristallinischen Anisotropie verknüpft.

§ 4. Unterscheidung zwischen Umorientierungseffekten und einer thermoelektrischen Änderung der Strukturelemente durch die Bearbeitung.

Es ist metallographisch und molekulartheoretisch von Interesse zu wissen, ob neben Umorientierungserscheinungen, deren Existenz für nicht reguläre und unreine reguläre Metalle aus der Tab. 1 deutlich hervorgeht, noch strukturelle thermoelektrische Variationen durch die Bearbeitung hervorgebracht werden können, wie z. B. bei den regulären Metallen eine isotropen Änderung der Thermokraft. Um diese Frage zu beantworten, ist es nach § 2 hinreichend und notwendig ein bearbeitetes Metallpräparat in drei zueinander senkrechten Richtungen gegen das nicht orientierte Material zu messen. Am einfachsten war es dann an dem gewalzten Materiale, wo schon zwei Richtungen untersucht waren, noch die Thermokraft senkrecht zum Bande zu messen. Als Untersuchungsmaterial empfiehlt sich in erster Hand Platin wegen seiner relativ kleinen Wärmeleitfähigkeit und wegen des guten Kontaktes, der zwischen aneinander gedrückten Oberflächen dieses Metalles erreicht werden kann. Es wurde das Platin I benutzt.

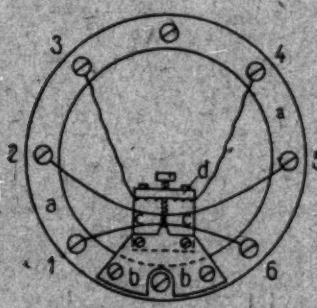


Fig. 1.

Die Messung geschah mit der in Fig. 1 gezeichneten Anordnung, *a a* ist der schon in § 8 beschriebene, in einem

Messinggefäß eingesetzte und mit acht isolierten Kontaktschrauben versehene Kupferring. *b b* ist eine daran festgeschraubte Kupferscheibe, die einen Fiberstück *c c* trägt, an dessen Ende die Kupferscheibe *d* sitzt. *b b* hat einen kupfernen Zapfen und *d* eine Kupferschraube, die einander gegenüberstehen und zwischen denen die gewalzten Platinblätter festgeschraubt wurden. Ihre Anordnung war zuerst die folgende. Äußerst, dem Zapfen und der Schraube zunächst, lagen die Enden zweier zu 1 und 2 führenden ausgeglühten Platinbänder. Dann folgten zwei harte Bänder, die zu 5 und 6 gingen, und zwischen diesen lagen 22 von dem harten Bande abgeschnittene Blätter von etwa 1,5 mm Kantlänge und 0,05 mm Dicke. Das Kupferstück *d* wurde durch einen mit 3 und 4 verbundenen Heizdraht elektrisch erwärmt. Nachdem das Temperaturgefälle konstant geworden war, wurde das Galvanometer zu 1 und 6 und zu 2 und 5 angelegt und die Thermokräfte dieser Kreise gemessen. Da die Thermokraft zwischen hartem und geglühtem Platin schon (§ 3) bekannt war, konnte hieraus die Temperaturdifferenz zwischen den äußersten Platinbändern ermittelt werden. Das Galvanometer wurde dann zu 1 und 2 angeschlossen und die Thermokraft senkrecht zu den harten Blättern gegen die des weichen Materiales erhalten. Als Resultat ergaben sich folgende Thermokräfte des gewalzten Platins gegen die des geglühten:

In der Walzebene, parallel zur Walzrichtung $30 \cdot 10^{-8}$ Volt pro Grad.

In der Walzebene, senkrecht zur Walzrichtung $23 \cdot 10^{-8}$ Volt pro Grad.

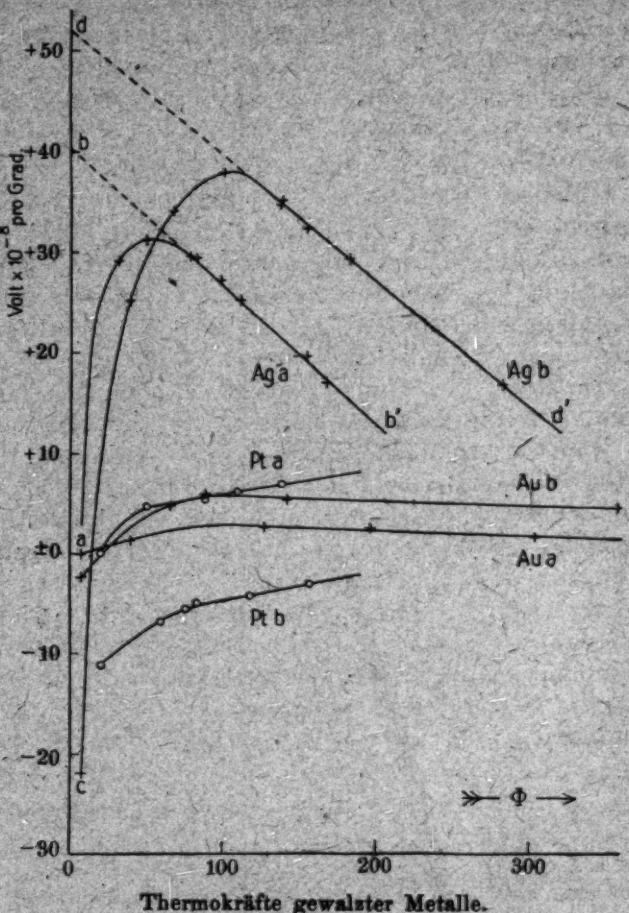
Senkrecht zur Walzebene $28 \cdot 10^{-8}$ Volt pro Grad.

In ähnlicher Weise wurde nun konstatiert, daß die Thermokraft in ausgeglühten Platinbändern in verschiedenen Richtungen nahe dieselbe war. Ganz streng konnte die Messung nicht durchgeführt werden, weil der Druck der Schrauben die Thermokraft des weichen Platins etwas änderte.

Es ist damit festgestellt worden, daß die beobachteten Einwirkungen der Bearbeitung bei einem regulär kristallisierenden Metalle wie das Platin zum überwiegenden Teile eine isotrope Änderung der Thermokraft zuzuschreiben sind. Die Differenzen der obigen Zahlen rührt wahrscheinlich von einer durch Verunreinigungen hervorgerufenen Anisotropie her.

§ 5. Die Thermoelektrizität der metallischen Oberflächenschichten.

Wird ein weicher Metalldraht z. B. durch Walzen bearbeitet, ändert sich seine Thermokraft zuerst stark, um dann



Thermokräfte gewalzter Metalle.

Fig. 2.

mehr konstant zu werden. Völlig konstant wird sie jedoch nicht, denn wenn der Streifen hinreichend dünn geworden ist, erscheint eine charakteristische Abhängigkeit der Thermokraft von der Dicke. Wenn diese Änderung der als Mittelwert über

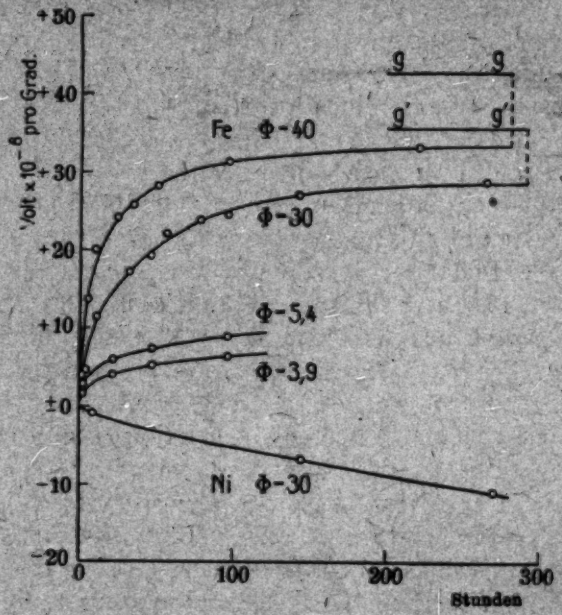
den Querschnitt des Streifens erhaltenen Thermokraft in eine thermoelektrische Verschiedenheit der Oberflächenschichten von den inneren Teilen des Streifens ihren Grund hat, müssen wir erwarten, daß sie in einem Diagramme, wo wir als Abszisse das Verhältnis der Randlänge zur Area des Querschnittes benutzen, besonders einfach hervortreten muß. In der Tat sehen wir in der Fig. 2, wie die gemessenen Thermokräfte nach genügender Bearbeitung der Metalle lineare Funktionen dieser relativen Randlängen werden. Für die relative Randlänge in Millimeter pro mm^2 gemessen, wollen wir im folgenden die Bezeichnung Φ benutzen ($\Phi = 2/d$, d Dicke des Streifens in mm).

Die Oberflächenverhältnisse sind bei Ag I und Au II (von Nordiska Affineriet in Hälsingborg) und bei Pt II (von Heraeus in Hanau) näher untersucht worden. Die Kurven Ag *a*, Au *a* und Pt *a* beziehen sich auf die von den Bezugsquellen erhaltenen halbharten Proben. Die Thermokräfte der ursprünglichen Drähte sind gutdünklich als Nullpunkte benutzt worden. Die Dicke der Drähte war bei Ag und Au 0,5, bei Pt 0,2 mm. Das Ag *b* war 10 Minuten auf 625° erhitzt, das Au *b* 15 Minuten auf 1000°, und das Pt *b* 140 Minuten auf 1050°. Die Kurven der erhitzten Drähte unterscheiden sich von denen der nicht erhitzten dadurch, daß der Bearbeitungseffekt größer ist, daß die maximale Bearbeitung erst bei größerer Verdünnung erreicht wird, und durch eine wohl durch chemische Einwirkung der Atmosphäre hervorgerufene Änderung der Thermokraft des maximal bearbeiteten Materiales. Dagegen ist die Änderung des Oberflächeneffektes des bearbeiteten Materiales, die Neigung der Geraden, wenigstens klein. Es ist in diesem Zusammenhange von Interesse zu bemerken, daß, wie Quinke gezeigt hat, die Metalloberflächen auch betreffend die Zugfestigkeit sich von den inneren Teilen der Metalle unterscheiden.

§ 6. Über eine zeitliche Veränderlichkeit der Thermokraft der Oberflächenschichten bei kaltbearbeitetem Eisen und Nickel.

Es wurde gelegentlich observiert, daß die Thermokraft zwischen einem geglühten Eisendraht und einem daraus gewalzten Bande mit der Zeit abnahm. Eine nähere Untersuchung ergab, daß die Abnahme ausschließlich dem kaltbearbeiteten Materiale zuzuschreiben war und mit dessen Dicke

stark variierte. Eine ähnliche Wirkung wurde auch bei Nickel gefunden. Die an Fe und Ni gemachten Beobachtungen sind in der Fig. 8 dargestellt. Man sieht, wie die Größe und Geschwindigkeit der Variationen mit dem Verhältnis (Φ) der Randlänge des Querschnittes in Millimeter, zu seiner Area in mm² stark anwächst. Die Linien $g\,g$ geben für die Eisenbänder die Thermokraft des geglühten Ausgangsmateriales an. Die Thermokraft des Ausgangsmateriales für die Drähte liegt in derselben Gegend. Die Thermokräfte der dünnsten Eisen-



Zeitliche Variationen der Thermokraft nach der Bearbeitung.

Fig. 8.

bänder erreichen Endwerte unweit der Thermokraft des Ausgangsmateriales. Tastende auf noch längere Zeiten ausgedehnte Messungen machen es wahrscheinlich, daß auch die dickeren Eisendrähte Endwerte zustreben, die um so tiefer liegen, je kleiner das Verhältnis Φ ist.

Die an Eisen erhaltenen experimentellen Ergebnisse zeigen, daß die untersuchte Wirkung von der Oberfläche ausgeht. Sie machen es weiter wahrscheinlich, daß die Wirkung in endlichen Zeiten sich nur in mäßiger Tiefe etwa von der Größenordnung

0,1 mm geltend macht. Eine nähere Untersuchung hierüber ist jedoch wünschenswert.

Andere untersuchten Metalle, Cu, Ag, Au, Al und Pt, zeigen keine ähnliche Wirkung von derselben Größenordnung.

§ 7. Reversible und irreversible Änderungen der Thermokraft kaltbearbeiteter Metalle durch Erwärmung.

Die direkt observierten Änderungen der Thermokraft, die der Erhitzung eines harten Drahtes auf verschiedenen Temperaturen folgen, sind im allgemeinen recht komplizierte Temperaturfunktionen. So finden wir z. B. für einen 0,5 mm Silberdraht erst ein Minimum bei etwa 400°, dann ein Maximum bei 600—800° (vgl. später § 9, Fig. 5). Eine nähere Analyse, die sich leicht mit Hilfe des Diagrammes in Fig. 2 durchführen läßt, löst jedoch die Erscheinung in zwei einfacheren auf, einen durch nochmalige Bearbeitung reversiblen Anteil und einen irreversiblen. Für das auf 625° erwärmte Silber wird z. B. der reversible Effekt durch die Ordinate cd definiert und ist somit bei sehr dünnen Proben von dem unbekannten Oberflächeneffekte des erwärmten Metalles etwas abhängig. Der irreversible Effekt wird durch den Abstand bd der Geraden bb' und dd' bestimmt.

Mit Hilfe solcher Diagramme habe ich die reversiblen und irreversiblen Effekte an Ag, Au und Pt in ihrer Abhängigkeit von Erhitzungstemperatur, Erhitzungsdauer und relativer Randlänge untersucht. Da die Linien bb und dd einander nahe parallel sind, habe ich im allgemeinen nur einen Punkt auf der Linie dd bestimmt und dessen Abstand von bb im Diagramme aufgemessen. Eine Auswahl der Messungen ist in der Tab. 2 zusammengeführt worden.

Von den in der Tabelle enthaltenen Resultaten heben wir besonders hervor, daß der reversible Effekt schon bei etwa 400° seinen Maximalwert sehr schnell erreicht und von da an konstant wird. Die Konstanz ist bei Ag sehr ausgeprägt. Die scheinbaren Änderungen mit Temperatur und Zeit, die besonders bei Au deutlich hervortreten, sind aller Wahrscheinlichkeit nach sekundäre Wirkungen der irreversiblen (chemischen) Einflüsse der Erwärmung.

Der reversible Effekt ist für Ag bei 200° zeitlich veränderlich, aber für die drei verschieden dicken Proben zu jeder

Tabelle 2.

Reversible ($e_{rev.}$) und irreversible ($e_{irr.}$) Thermokräfte erhitzter Metalle gegen das vollständig bearbeitete Ausgangsmaterial im Volt 10^{-6} pro Grad in ihrer Abhängigkeit von Erhitzungstemperatur (T Grad Celsius), Erhitzungsdauer (Z Minuten) und relative Randlänge (Φ mm pro mm^2).

	T	Z	Φ	$e_{rev.}$	$e_{irr.}$
Ag I	200°	3	17	− 40,3	
	200	3	40	40,8	
	200	3	74	40,0	
	200	7	17	− 43,7	sehr
	200	7	40	44,0	klein
	200	7	74	47,1	
	200	20	17	− 49,9	
	200	20	40	50,8	
	200	20	74	50,1	
	400	10	8	− 81,3	+ 5,3
	625	10	8	80,7	16,1
	800	10	8	79,5	21,5
	910	10	8	79,8	16,8
Au II	410	10	8	− 9,0	0,0
	800	10	8	9,6	+ 0,9
	1015	10	8	8,5	2,7
	1015	35	8	5,2	6,0
	1015	35	27	3,2	24,6
Pt II	400	20	20	− 6,0	0,0
	700	20	20	5,9	− 1,1
	1050	20	20	5,3	7,5
	1050	140	20	4,0	10,4
	1050	340	20	3,3	16,1
	1050	20	41	—	− 13,3
	1050	80	41	—	19,0
	1050	360	41	− 2,4	31,8
	1050	20	61	—	− 18,0
	1050	80	61	—	26,8
	1050	360	61	—	49,5

Zeit nahe gleich groß. Deuten wir dies in der einfachsten Weise so, daß die Thermokraft im ganzen Querschnitt nahe dieselbe ist, so sehen wir erstens, daß der reversible Effekt ein Volumeneffekt (nicht etwa von der Oberfläche ausgehend) ist, zweitens, daß die Oberflächenschicht bei den erwärmten Drähten recht nahe dieselbe Thermokraft hat, wie die inneren Teile der Proben. Sei die Variation der Thermokraft in Oberflächenschicht die-

selbe gewesen, wie bei hartem Silber, müssen nämlich die Proben mit $\Phi = 17$ und $\Phi = 74$ um etwa 8 unserer Einheiten verschieden gewesen sein. Wir werden diese Folgerung im § 9 auch in anderer Weise bestätigt finden.

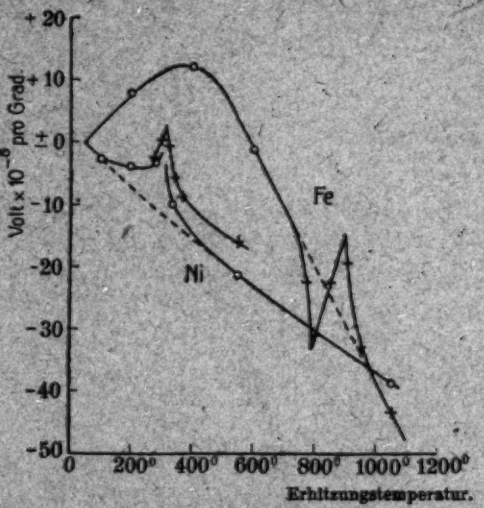
Bei Ag hat für Temperaturen oberhalb 400° schon nach einer Erhitzung während weniger als 5 Minuten der reversible Effekt vollständig, der irreversible beinahe einen konstanten Endwert erreicht. In der Tat sind die Angaben für 10 Minuten Erhitzung hier Mittelwerte von Messungen bei 5, 10 und 15 Minuten. Bei Au und Pt wächst der irreversible Effekt in so kleinen Zeiten immer weiter. Wenn verschieden dicke Proben gleiche Zeit auf gleiche Temperatur erhitzt werden, sind die irreversiblen Änderungen der Thermokraft der relativen Randlänge Φ proportional. Wir können dies aus den Messungen an Au und Pt auslesen.

Über die Natur der reversiblen isotropen Änderungen der Thermokraft können zurzeit nur lose Vermutungen ausgesprochen werden. Ihre Temperaturabhängigkeit läßt vermuten, daß sie durch die Ausbildung der Gleitebenen bei der Bearbeitung und umgekehrt durch die Rekristallisation bei der Erwärmung bedingt sind. Vielleicht sind sie dabei innerem Drucke oder Spannungen zuzuschreiben. Vielleicht sind kleine Verunreinigungen von wesentlichem Einfluß.

§ 8. Die nach Erwärmung auf verschiedene Temperaturen zurückbleibenden Änderungen der Thermokraft bei Metallen mit Umwandlungspunkten.

Die Messung der Thermokraft als Funktion der Erwärmungstemperatur bei Ni in der Nähe des in der Literatur angegebenen Umwandlungspunktes bei etwa 320°, bei Fe in der Nähe der Umwandlungspunkte bei etwa 770 und 890° und bei Sn um 161° gab das Resultat, daß die Umwandlungstemperaturen in den Thermokraft-Temperatur-Diagrammen als scharfe Spitzen hervortreten. Da diese Erscheinung eine einfache und scharfe Methode zur Bestimmung von Umwandlungspunkten bei Metallen und vielleicht auch Legierungen angibt, ist es meine Absicht, sie später näher zu untersuchen. Hier möchte ich nur in der Fig. 4 einige vorläufige Messungen an Fe und Ni mitteilen. In den Temperaturbestimmungen können hier leicht absolute Fehler von zehn Graden vorhanden sein;

relativ sind sie genauer. Das Ausgangsmaterial war für beide Metalle Platten von Kahlbaum. Es wurde als hartgezogener Draht von 0,5 mm Stärke mit Zutritt der Atmosphäre in dem Tiegelofen erhitzt, wobei natürlich bei höheren Temperaturen kräftige Oxydation eintrat, und dann schnell abgekühlt. Die Figur zeigt die Thermokräfte der erhitzten Drähte gegen die der nicht erhitzten, somit eine Summe von reversiblen und irreversiblen Effekten. Man bemerke an der Figur die erwähnten scharfen Spitzen, die an einer den Umwandlungstemperaturen stetig vorbeigehenden Kurve angebracht zu sein scheinen.



Erhitzungsdauer 15 Minuten +, etwa 100 Minuten ○.
Thermokräfte nach Erhitzung.

Fig. 4.

§ 9. Quantitative Beobachtungen über Thermokräfte bei der Berührung ungleich warmer Drähte desselben Metalles.

Nach den Ergebnissen der früheren Paragraphen müssen wir uns mit bestimmten Erwartungen den thermoelektrischen Berührungserscheinungen näheren. Wir kennen eine ganze Reihe von Erscheinungen, die sich geltend machen müssen, wenn zwei ungleich warme Drähte über Kreuz gelegt werden, und somit das Temperaturgefälle einerseits in der Längsrichtung des Drahtes erfolgt, andererseits senkrecht auf die Berührungsfläche steht. Lassen wir auch die in der früheren Diskussion

dieser Sache (vgl. § 1) vielfach erörterten Einflüsse fremder Oxydschichten und thermischer Spannungen bei Seite, so können außerdem Thermokräfte hervorgerufen werden erstens durch die in § 5 beschriebenen normalen Oberflächeneffekte, die wohl bei allen Metallen zu erwarten sind, zweitens (vgl. § 3) durch Orientierungseffekte bei allen nicht regulär kristallisierenden oder unreinen Metallen, drittens (vgl. § 7) durch die vermutlich auf Gasabsorbtion zurückzuführenden irreversiblen Änderungen der Oberflächenschichten, bei allen erwärmten Drähten.

Für die experimentelle Untersuchung der Erscheinungen habe ich die Anordnung der Fig. 5 benutzt. Der eine Draht war an einem von Wasserdampf durchgespühlten Kupferblock

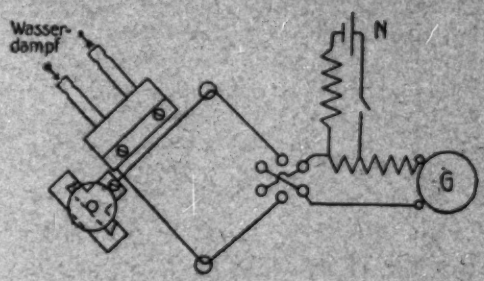


Fig. 5.

angemacht, der andere an einem Schlitten von der Temperatur des Zimmers. Der Schlitten konnte zwecks Zusammenführung der Drähte durch eine Schraube mit großem Schraubenkopfe langsam verschoben werden. Die Drähte wurden wenige Millimeter von ihren Festepunkten zur Berührung gebracht. Etwa 10 cm davon wurden sie, um gute Steuerung zu bekommen, an Korken festgemacht. Ihre Enden gingen zu einem thermokraftfreien kupfernen Stromwender, der mit einem Galvanometerkreise verbunden war. Die Voltempfindlichkeit der Anordnung wurde mit einem Normalelement in Nebenschluß mit großem Widerstand gemessen.

Die Berührungseffekte wurden im allgemeinen in der Weise untersucht, daß die Drähte zuerst federnd aneinander gelegt und dann allmählich entfernt wurden. Wegen der Konkurrenz der verschiedenen Effekte kann der Galvanometerausschlag dabei stark variieren und sogar bei verschiedenen

Drucken verschiedene Zeichen haben. Öfters ist der Effekt bei guter Anlegung klein; bei stark orientierten Drähten (z. B. gezogenem Konstantan) oder bei Drähten mit tiefgreifender Absorptionsschicht kann er jedoch sehr bedeutend sein. Wenn die Berührung sehr leicht wird, wächst der Ausschlag meistens stark an, bis daß der Kontakt gebrochen wird und der Ausschlag plötzlich verschwindet.

Das unmittelbar vor dem Kontraktbruch erreichte Maximum ist nun, da es die Thermokraft in der äußersten Oberflächenschicht angibt, von besonderem Interesse. Es ist auch recht gut quantitativ reproduzierbar und ist der hauptsächlichste Gegenstand meiner Messungen gewesen. Die Tab. 3

Tabelle 3.

Thermokräfte (e_L) in der Längsrichtung der Drähte und Thermokräfte (e_0) in der Oberflächenschicht gegen das vollständig bearbeitete Ausgangsmaterial in Volt, 10^{-6} pro Grad in ihrer Abhängigkeit von Erhitzungstemperatur (T Grad Celsius) und Erhitzungsdauer (Z Minuten).

	T	Z	e_L	e_0	Bemerkung
Ag I	—	10	− 42	− 88	
0,5 mm	400	10	76	59	
	600	10	64	47	
	800	10	58	41	
	930	10	63	96	
	—	—	− 42	− 30	Berührungsfläche abgefeilt
	600	10	64	42	
	930	10	63	44	
Au II	—	—	− 4	− 38	
0,5 mm	1000	10	6	6	
	—	—	− 4	− 11	Berührungsfläche abgefeilt
Pt II	—	—	− 4	+ 13	
0,2 mm	1050	20	16	8	
	1050	140	21	3	
	—	—	− 4	+ 9	Federnde Anlegung
	1050	20	16	− 11	
	1050	140	21	− 19	

enthält einige Resultate betreffend verschiedenartig behandelter Drähte von Silber, Gold und Platin. Für jede Drahtprobe wurden mehrere Anlegungen zu verschiedenen Stellen der

Drähte untersucht, und für jede Anlegung ein Mittel mehrerer Beobachtungen der Maximalausschläge gebildet. In der Tabelle werden Mittelwerte über sämtliche Anlegungen angegeben. Aus dem beobachteten Berührungseffekte kann durch Addition der mit der Bearbeitung variblen Thermokraft in der Längsrichtung des Drahtes e_L die Thermokraft e_0 der Oberflächenschicht in ihrer Abhängigkeit von der Bearbeitung erhalten werden. Alle Thermokräfte werden auf die für $\Phi = 0$ berechnete Thermokraft des vollständig harten (gewalzten) Ausgangsmateriales bezogen.

Wir sehen aus der Tabelle, wie die Oberfläche des gezogenen Materiales gegen die inneren Teile bei Ag und Au negativ bei Pt positiv ist. Zu demselben Resultat waren wir in § 5 nach einer ganz anderen Methode für gewalztes Material gekommen. Ein Vergleich der Resultate der beiden Methoden macht es nun auch möglich, die Größenordnung der Dicke d der thermoelektrisch wirksamen Oberflächenschicht zu schätzen. Ist e_0 die mittlere Thermokraft der Oberflächenschicht, e_J die des Metallinneren, so ist

$$d = \frac{de}{d\Phi} / (e_0 - e_J),$$

wo $de/d\Phi$ aus den Kurven der Fig. 2 erhalten werden. Wir finden, unter der Voraussetzung, daß die Oberflächen der gewalzten und gezogenen Proben vergleichbar sind, für Ag $d = 0{,}0016$, für Au $d = 0{,}0002$ und für Pt $d = 0{,}0018$ mm.

Die Verhältnisse an Silber werden durch die Fig. 6 näher erläutert. Wir sehen dort die gezogene Kurve der mittleren Thermokraft e_L in der Längsrichtung des Drahtes (Summe aus reversiblen und irreversiblen Wirkungen), die gestrichelte Thermokraftkurve der natürlichen Oberfläche des gezogenen Drahtes e_0' und die punktierte Thermokraftkurve der vor jeder Messung an der Berührungsfläche mit Feile und Schmirgeltusch behandelten Oberfläche e_0'', alles als Funktion der Erhitzungstemperatur. Die Temperaturabhängigkeit der Thermokraft der natürlichen Oberflächenschicht hat große Ähnlichkeit mit der unten an in gutdünklichem Maßstabe eingezeichneten irreversiblen Änderungen der Thermokraft (vgl. Tab. 2) und ist vermutlich größtenteils auf deren Rechnung zu schreiben, Der normale Oberflächeneffekt, von dem in § 5 die Rede war, kann somit sehr möglich auch bei der durch Ziehen gebildeten

Oberfläche von der Temperatur wenig abhängig sein, wie es bei der abgefeilten der Fall ist. Erwähnt sei auch, daß in Übereinstimmung mit dem, was in § 7 vorausgesagt werden könnte, die Thermokraft der Oberflächenschicht und die des Drahtinneren nach Erhitzung des Silbers auf 200° nahe gleich sind.

Eine Abhängigkeit der Berührungserscheinungen von den irreversiblen Änderungen in der Oberflächenschicht finden wir

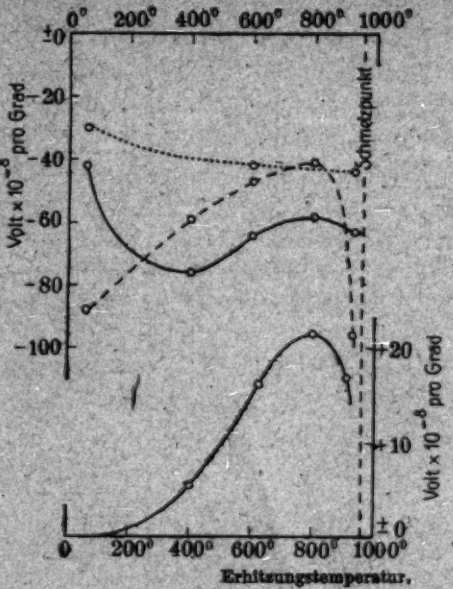


Fig. 6.

auch bei den zeitlichen Variationen an Pt wieder. Besonders deutlich wird dies bei den, freilich recht unsicheren, Messungen mit federnder Anlegung, wo die mittlere Thermokraft einer dickeren Oberflächenschicht erhalten wird.

Benedicks[1]) hat eine weitgehende Übereinstimmung in den Zeichen der thermoelektrischen Berührungseffekte und der Thomsoneffekte gefunden. Kann diese Zeichenregel, was zwar nicht von vornherein sicher ist, auf die normalen thermoelektrischen Oberflächeneffekte übergeführt werden, haben wir

1) C. Benedicks, a. a. O.

vielleicht hier ein Mittel zu einem näheren Verständnis der Erscheinung. Die Sache bedarf einer näheren experimentellen Auseinandersetzung.

§ 10. Über die Gültigkeit des Satzes von Magnus.

Wir erwähnten einleitungsweise, daß die Frage, ob es möglich ist durch bloße Assymetrie der Temperaturgefälle Thermokräfte hervorzurufen (dessen Verneinung als der Satz von Magnus bekannt ist), durch die Arbeiten von Benedicks wieder aktuell geworden ist. Es wird in diesen Arbeiten eine Reihe von Erscheinungen behandelt, deren Erklärung durch Assymetrieeffekte in der Tat sehr nahe liegen kann. Mit der erweiterten Kenntnis der Bearbeitungs- und besonders der Oberflächenerscheinungen, die in der jetzt vorliegenden Untersuchung gewonnen ist, glaube ich jedoch, daß es bei keiner außerhalb eines Magnetfeldes beobachteten Erscheinung notwendig oder auch nur zulässig ist dem Satze von Magnus anzuzweifeln. Ich möchte dies in den folgenden Punkten etwas näher begründen.

1. Eine thermoelektromotorische Kraft, deren Zeichen mit der Richtung des Temperaturgefälles umkehren soll, muß in ungeraden Potenzen des Temperaturgefälles dt/ds ausgedrückt werden können, und somit die Form haben:

$$e = \alpha \frac{dt}{ds} + \beta \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + \gamma \left(\frac{dt}{ds}\right)^5 + \ldots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ von dem Temperaturgefälle unabhängige Temperaturfunktionen sind. Das erste Glied ist aber nur die gewöhnliche thermoelektromotorische Kraft, dessen Integral über einen homogenen Leiterkreis verschwindet. Ein eventueller Assymetrieeffekt muß somit mindestens mit der dritten Potenz des Temperaturgefälles ansteigen. Diese Forderung kann nun leicht an den verschiedenen Erscheinungen experimentell geprüft werden.

2. Wir sahen in dem vorigen Paragraphen, wie die Berührungseffekte ohne Zuhilfenahme der Annahme eines Assymetrieeffektes, hauptsächlich auf drei nach den früheren Auseinandersetzungen gut bekannte Erscheinungen zurückgeführt werden könnten. Der allseitigen Sicherheit halber habe ich dazu noch an einem Beispiele (halbharter 0,5 mm Silberdraht) die

Temperaturabhängigkeit des Effektes gemessen. Dazu wurde der in § 3 beschriebene Apparat benutzt. Der eine Draht wurde an dem Heizkörper befestigt, dessen Temperatur mit einem Thermoelement gemessen wurde. Der andere Draht wurde nahe dem Heizkörper dem ersten leicht angelegt. Da die Anlegung von den kleinsten Erschütterungen beeinflußt wird und die Thermokraft daher etwas instabil erscheint, wurden nur zwei verschiedene Temperaturen dem Heizkörper gegeben und die zugehörigen Thermokräfte wiederholt und abwechselnd gemessen. Die Messung gab für ein Temperaturgefälle von 40° im Mittel die Thermokraft $16{,}2 \pm 0{,}7$, für 80° Temperaturgefälle $15{,}3 \pm 1{,}5$ Volt $\cdot 10^{-8}$ pro Grad. Der Berührungseffekt, hier etwa ein Viertel des maximalen Effektes, ist somit in erster Näherung dem Temperaturgefälle proportional, und ist als eine gewöhnliche Thermokraft zu betrachten.

3. Die Tatsache, daß Thermokräfte auch bei einem verschweißten Drahtkreuz beobachtet werden können, kann wie die Berührungseffekte durch Oberflächenerscheinungen erklärt werden. Die Oberflächenerscheinungen müssen sich immer geltend machen, so lange die Berührungsfläche nicht sehr groß gegen die Dicke der wirksamen Oberflächenschicht ist. Die Größenordnung dieser Dicke haben wir zu 0,001 mm gefunden. Thermokräfte berührter Art können wir somit besonders bei dünnen Drähten erwarten.

4. Die Thermokräfte bei Einschnürungen lassen sich ebenfalls auf die Oberflächeneffekte zurückführen. Die abweichende Thermokraft der Oberfläche tritt bei einem kleinen Querschnitt stärker hervor als bei einem großen. Außerdem können noch Orientierungseffekte mitwirken, da die Richtung des Temperaturgefälles bei einer kurzen Einschnürung teilweise geändert wird.

5. Eine durch einen elektrischen Strom hervorgebrachte, dem Strom proportionale Temperaturdifferenz zwischen zwei kreuzgelegten Drähten oder an den Seiten einer Einschnürung ist als eine den erörterten Thermokräften entsprechende Peltierwirkung zu betrachten.

6. Die Thermokräfte, die durch Assymetrie der Temperaturgefälle in der Längsrichtung eines Drahtes zustande kommen können, haben, wie schon ihre Größenordnung lehrt, mit den bis jetzt diskutierten wenig gemeinsam. Ich habe sie

an einem Beispiel derart studiert, daß ich in dem in § 8 beschriebenen Apparat, zwei 1 mm Konstantandrähte in einem kleinen Abstande von 3 mm einsetzte und um die Mitten derselben einen 0,15 mm starken, isolierten Kupferdraht wickelte, dessen Enden über zwei der Kontaktschrauben mit dem Galvanometer verbunden waren. Die beiden Konstantandrähte wurden wechselweise elektrisch erwärmt und erhielten so mit dem Quadrate der Stromstärke proportionale Temperaturen. Dabei war das Temperaturgefälle im Kupferdrahte zwischen den Konstantandrähten auf wenige Millimeter beschränkt, während die zu den Kontaktschrauben führenden Enden mehrere Zentimeter lang waren. Es zeigten sich nun immer kleine Thermokräfte. Diese waren aber bei fallender Temperatur der ersten Potenz des Temperaturgefälles streng proportional. Nach Erwärmung auf eine neue höhere Temperatur änderte die Thermokraft pro Grad ihre Größe und unter Umständen sogar ihr Zeichen. Jede neue Einsetzung eines Kupferdrahtes gab neue quantitative Ergebnisse. Es scheint mir daher kein Zweifel zu sein, daß die beobachteten Effekte gewöhnliche Thermokräfte sind, die den Strukturänderungen durch Erwärmung und durch die bei der Handhabung solcher dünnen Drähte unvermeidlichen Streckungen zuzuschreiben sind. Die Größenordnung der Effekte (einige Tausendstel Mikrovolt pro Grad) ist auch dieselbe wie die Größenordnung der in einem gespannten Drahte zurückbleibenden Thermokräfte.

7. Es mag zuletzt auch daran kurz erinnert werden, daß eine gute Erfüllung der Thomsonschen thermoelektrischen Gleichungen aus thermodynamischen Gründen reine Assymetrie effekte ausschließen.[1]) Dies ist neulich wieder von Laue[2]) bemerkt worden, welcher jedoch meines Erachtens den experimentellen Stand[3]) der Frage nach der Gültigkeit der Thomsonschen Gleichungen falsch beurteilt. Ich glaube aus eigenen Messungen[4]) schließen zu können, daß wir keine Abweichungen

1) Vgl. M. Planck, Wied. Ann. **36**. S. 624. 1889.

2) M. v. Laue, Jahrb. d. Radioakt. **15**. Fußnote S. 245—246. 1918.

3) Vgl. K. Baedeker, Graetz Handbuch d. Elektr. **1**. S. 276 f. 1918.

4) G. Borelius, Ann. d. Phys. **58**. S. 388. 1918.

auch noch von der Größenordnung $2 \cdot 10^{-8}$ Volt pro Grad zu erwarten haben.

Nach dem Gesagten muß ich das Gesetz von Magnus als außerhalb eines Magnetfeldes sehr genau gültig ansehen. Die als thermoelektrische Assymetrieeffekte angegebenen Erscheinungen, die Benedicks in einem Magnetfelde unter anderem auch an Quecksilber beobachtet hat, scheinen mir nunmehr eine recht isolierte Stellung einzunehmen. Ihre Größenordnung und Natur können daher meiner Meinung nach nicht als endgültig festgestellt angesehen werden, besonders auch, weil mögliche Störungen thermomagnetischer und magnetothermoelektrischer Art noch nicht ausführlich diskutiert worden sind.

Lund, Physikalisches Institut der Universität, Juni 1919.

(Eingegangen 13. Juni 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

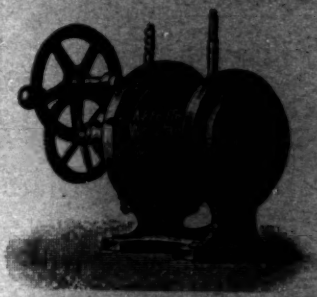
Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

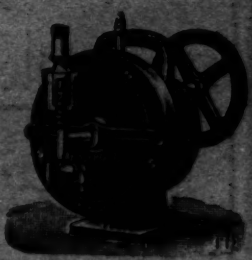
System Pfeiffer, D.R.P.



Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen.

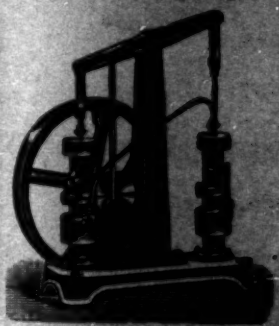
Neukonstruktionen nach Angabe.

System Gaede, D.R.P. angemeldet



Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.



Alle Arten von Luftpumpen:

Trockene rotierende Luftpumpen,

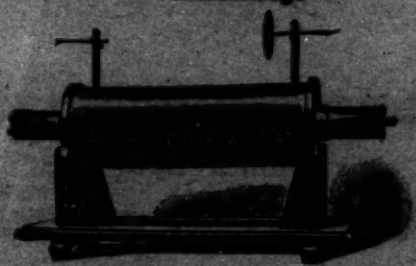
Trockene Schieber-luftpumpen,

Quecksilberluftpumpen aller Systeme,

Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 m/m Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrationsschaltung.

Alle Nebenapparate.

Listen auf Verlangen!

Inhalt.

Seite

1. F. Paschen. Das Spektrum des Neon 405
2. W. Hahnemann und H. Hecht. Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons 454
3. H. Weyl. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter 481

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Fleischerrasen 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren tunlichst möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

1919. № 21.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. *Das Spektrum des Neon;* *von F. Paschen.*

Die stärkeren Spektrallinien der Kapillaren einer mit Neon von einigen Millimetern Druck gefüllten Geißlerröhre sind durch die Arbeiten von Baly[1]) und Watson[2]) bekannt. Die Kenntnis der Gesetze dieses Spektrums wurde eingeleitet durch Watsons Entdeckung[3]) konstanter Schwingungsdifferenzen und durch Rossis Fund von 2 mal 2 Serien gleicher Grenze.[4]) Neuerdings hat K. W. Meissner genaue interferometrische Bestimmungen der stärksten roten Linien ausgeführt[5]) und gezeigt[6]), daß Watsons Schwingungsdifferenzen auch bei dieser größeren Genauigkeit konstant bleiben: Eine glänzende Bestätigung der genauen Gültigkeit des Kombinationsprinzipes von W. Ritz. Meissner hat später[7]) weitere Linien im Beginne des Ultrarot gemessen und das soweit durch seine und Watsons Messungen und Rossis Entdeckung bekannte Spektrum in eine Reihe von Neben- und einige Hauptserien aufgelöst.

In einem Briefe vom 13. Dezember 1917 hatte mir Herr Knud Aage Nißen in Kopenhagen den Aufbau der Spektralgesetze des Neonspektrums von Watson in ungefähr demselben Umfange mitgeteilt, wie er nun von Meissner veröffentlicht ist (mit Ausnahme der Hauptserien). Ich entschloß mich, dieses Spektrum näher zu untersuchen, da ich bald sah, daß einige der Gesetze neue serientheoretisch interessante Eigenschaften hatten. Ich maß das Neonspektrum gegen Eisen auf langfristigen, mit dem großen Konkavgitter gewonnenen

1) E. C. C. Baly, Phil. Trans. A. 202. S. 183. 1903.
2) H. E. Watson, Proc. Roy. Soc. A. 81. S. 181. 1908.
3) H. E. Watson, Astrophys. Journ. 33. S. 399. 1911.
4) R. Rossi, Phil. Mag. 9. Ser. 26. S. 981. 1913. Diese Serien sind: $2p_8 - md_4$, $2p_9 - md_4'$, $2p_8 - md_1''$, $2p_9 - md_1'$. Rossis Hauptserie erscheint als ein Irrtum.
5) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. 51. S. 115. 1916.
6) K. W. Meissner, Phys. Zeitschr. 17. S. 549. 1916.
7) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. 58. S. 333. 1919.

Aufnahmen, löste dabei viele von Watson einfach gemessene Linien in mehrfache auf und fand weitere Glieder der von Nissen und Meissner nur mit den Anfangsgliedern gegebenen Serien. Im Ultraviolett wurde ein größerer Quarzspektrograph herangezogen, der weitere Glieder der Hauptserien enthüllte, und der feststellen ließ, daß mit Quarzplatten verschlossene Neonröhren in diesem Gebiete nur das Auslaufen dieser Serien zeigen, daß aber weitere Linien jenseits 2550 Å.-E. nicht auftreten.

Es gelang die Einordnung aller stärkeren Linien des Spektrums. Dieses Serienspektrum ist damit in einer Vollständigkeit herausgestellt, wie es bisher nur in wenigen anderen Fällen möglich war.

Wenn schon hierdurch nach Meissners Arbeit eine weitere Veröffentlichung über denselben Gegenstand angezeigt erscheint, so kommt hinzu, daß serientheoretisch neue Dinge auftreten, die von Meissner nicht erkannt wurden. Schließlich ermöglichen die konstanten Schwingungsdifferenzen, Mittelwerte der Wellenlängen fast aller stärkeren Linien anzugeben, die genauer sind, als das Resultat von Einzelmessungen. Diese über das ganze Spektrum verteilten Linien werden dadurch auf Meissners interferometrische Messungen zurückgeführt. Die vorletzte Vertikalreihe des Wellenlängenverzeichnisses enthält unter „λ_{Luft} ber." diese Werte.

Die Wellenlängentabelle enthält die von Meissner (M.) oder mir (P.) beobachteten Wellenlängen, meine bezogen auf Fabry-Buissons Eisennormalen oder auf Meissners Normalen, ferner unter „ν" die Wellenzahlen[1]) und die Art der Serienzugehörigkeit unter „Kombination".

Dann folgen in ebenso vielen Tabellen, wie Terme in Serien auftreten, die Beweise für die Serien bzw. die Kombinationen. Gefunden wurden die meisten dieser Serien schon von Nissen und Meissner auf Grund derselben, immer wiederkehrenden Schwingungsdifferenzen.

Bei jedem Gliede m der Nebenserien $2p_i - m\,d_n$ oder $2p_i - m\,s_n$ treten die Schwingungsdifferenzen $2p_i - 2p_{i-\nu}$ ($i = 2, 3, \ldots 10$; $\nu = 1, 2, \ldots 9$) auf. Bei jedem Gliede m

1) Die Reduktion der Wellenlängen von trockener Luft von 15° C. und 760 mm aufs Vakuum geschah nach Kayser-Runges Dispersion der (feuchten) Luft und einer Korrektion wegen der Trocknung.

der Hauptserien $1{,}5\,s_n - m\,p_i$ treten die Schwingungsdifferenzen $1{,}5\,s_n - 1{,}5\,s_{n-r}$ auf. Diese Schwingungsdifferenzen sind also solche der Seriengrenzterme. Die Schwingungsdifferenzen zum Beweise der Kombinationen anzugeben, ist unnötig, wenn man die Terme selber gewonnen hat. Die Konstanz des Termwertes bei wechselndem n in den Haupt- und bei wechselndem i in den Nebenserien bedeutet auch die Konstanz der obigen Schwingungsdifferenzen.

Zur Kenntnis des Wertes der Terme ist in einem derartigen Kombinationsspektrum nur die Kenntnis der Grenze einer einzigen sicheren Serie erforderlich. Rossis Serien würden genügt haben, wenn man ihrer hätte sicher sein können. Alle Terme ergeben sich sodann nach dem Kombinationsprinzip, wie früher von mir[1]) erörtert ist. Es ist sehr wichtig, daß im Neonspektrum auch Serien auftreten, welche die bisher bekannten Serieninterpolationsformeln, wie z. B. die Formel von Ritz, mit einer Genauigkeit befolgen, welche bei Serien sonst kaum bekannt ist. Die Genauigkeit ist im Falle dieser Neonserien besonders dann eine auffallende, wenn man der Rydbergkonstanten N der Formel den Wert

$$N_{\text{Neon}} = 109694{,}8$$

gibt.

Solche Neonserien vom genauen Ritztypus bilden die Terme $(m\,d_4)$, $(m\,s_5)$, leidlich auch $(m\,s_4)$, $(m\,p_9)$, $(m\,p_8)$. Aus einigen der zugehörigen Serien wurden die Grenzen genau berechnet: z. B. aus den Serien $2\,p_9 - m\,d_4$, $2\,p_9 - m\,s_5$, $2\,p_8 - m\,s_5$ usw. So erhielt man Werte von $2\,p_8$, $2\,p_9$ usw., deren Differenzen innerhalb der Fehler der Berechnung und Beobachtung mit den Mittelwerten der betreffenden direkt an den Linien beobachteten konstanten Differenzen übereinstimmten. Man berechnete aus ihnen auf Grund der Mittelwerte der direkt gefundenen konstanten Differenzen den Mittelwert eines einzigen Terms, nämlich des Terms $1{,}5\,s_5$. Als Wert desselben ergab sich

$$1{,}5\,s_5 = 39887{,}610 \pm 0{,}05 \text{ etwa.}$$

Auf diesen Wert gründen sich die Werte aller übrigen Terme. Sein (additiver) Fehler ist also auch der (additive) aller übrigen Terme.

1) F. Paschen, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 8. S. 174. 1911.

Erkennt man nur eine der angeführten und bewiesenen Serien vom genauen Ritztypus als solche an, so kann man auf Grund des Kombinationsprinzipes andere Serien nicht ablehnen, welche neben ersteren im Neonspektrum auftreten, und welche durch keine bekannte Serienformel darzustellen sind. Die Existenz solcher Serien wäre ohne das Vorkommen der Serien vom Ritztypus und ohne die Annahme der Gültigkeit des Kombinationsprinzipes nicht nachweisbar. Denn ihr Gesetz ist ein völlig anderes.

Meissner hat auf Grund des Kombinationsprinzipes einige solcher Nebenserien gefunden. Er verletzt aber das Kombinationsprinzip wieder bei ihrem rechnerischen Nachweise. Indem er sie nämlich nach der Ritzschen Formel berechnen will[1]), findet er Grenzen dieser Serien, welche im Widerspruche zum Kombinationsprinzip stehen. Denn die Glieder der Nebenserien dieser Art haben auch genau die oben bezeichneten Schwingungsdifferenzen $2p_i - 2p_{i-r}$. Daraus folgt, daß die Terme der Grenzen dieser Serien eben diejenigen $2p_i$ sein müssen. Es wäre sehr unwahrscheinlich, daß genau dieselben Differenzen bei anderer Größe der Terme $2p_i$ auftreten, da mit der Größe der Terme auch die Größe ihrer Differenz sich ändert.[2]) Mit den richtigen Grenzen hört die Gültigkeit der Ritzschen Formel für diese Serien auf.

---

1) Die genauen Wellenlängen fügen sich Meissners Rechnung übrigens nur mangelhaft.

2) Als Grenze einiger dieser Serien, welche nach dem Kombinationsprinzip $2p_{10} = 25671{,}654 \pm 0{,}05$ ist, findet Meissner z. B. 26442,5 bis 26449,4 und es müßten alle Werte $2p_i$ um die Differenz dieser Zahlen für die abweichenden Serien größer sein, als für die Serien vom Ritztypus. Diese Verletzung des Kombinationsprinzipes anzunehmen, scheint unmöglich. Der Betrag, um den die Grenzterme entgegen dem Kombinationsprinzip zu verändern sind, um die Darstellung nach einer Formel vom Ritztypus zu erzwingen, und der nach Meissner bei einigen der betreffenden Nebenserien nahe konstant scheint (aber auch hier nur angenähert), ist bei den Hauptserien auch nicht annähernd konstant. Dies geht daraus hervor, daß in meiner Rechnung die Größe des Koeffizienten C bei verschiedenen Hauptserien verschiedene Werte hat, die zwischen 0,0001 und 0,06 liegen. Das bedeutet: Dort kommen neben dem reinen Ritztypus Formen vor, in denen der neue Typus in verschiedenem Maße ausgeprägt auftritt.

Wenn sich auch alle bisher bekannten Serien nahezu durch einen mathematischen Ausdruck vom Ritztypus interpolieren ließen, so kamen

Der Serientypus von Ritz hat die Eigenschaft, daß die Größe $f_{(m)}$ des Ausdruckes

(I) $$\text{Term} = N/(f_{(m)})^2$$

sich mit wachsendem Werte von m asymptotisch dem Werte $m + a$ nähert, wo a eine Konstante ist. Denn das von Ritz zu diesem (Rydbergschen) Ausdrucke noch hinzugefügte Glied ist eine für große Werte von m verschwindende Funktion von $1/m$.

Bei dem neuen Serientypus nähert sich $f_{(m)} - m$ nicht einem konstanten Werte a, sondern wächst mit wachsendem Werte von m in stark zunehmendem Maße und kann näherungsweise dargestellt werden durch Hinzufügung eines weiteren Gliedes von der Form $cf(e^m)$ zu der Ritzschen Form von $f_{(m)}$. Auch physikalisch unterscheiden sich die Linien des neuen Serientypus von denen des Ritztypus. Sie werden mit wachsendem Werte m nicht so diffus und bleiben stärker als diese. Dies ist auf den stark dispergierten mit dem großen Gitter gemachten Aufnahmen selbst bei den meist scharfen Neonlinien deutlich zu sehen, wo Linien von Ritzserien neben solchen selbst höherer Ordnungszahl m der neuen Serien fallen.

Es ist für jede dieser Serien die bestinterpolierende Formel gesucht. Dabei mußte man sowohl dem Ritzschen Zusatzgliede, wie dem neuen etwas verschiedene Formen geben, um bestmöglichen Anschluß zu erzielen. In dem Ausdrucke:

(II) $$f_{(m)} = m + a + \alpha f\left(\frac{1}{m}\right) + cf(e^m)$$

hat man je nach Bedarf gesetzt:

(1) für $f(1/m)$ entweder $1/m$ oder $1/m^2$ oder $e^{1/m}$ oder e^{1/m^2},

(2) für $f(e^m)$ entweder $e^{m/2}$ oder $\sqrt{m\,e^m}$.

Bei jeder Serie ist die ihr angepaßte Form von $f_{(m)}$ mit den Werten ihrer Konstanten vermerkt, ferner die Abweichungen zwischen dem beobachteten und dem berechneten Werte des

---

doch auch schon recht beträchtliche Ausnahmen vor, so daß man diese mathematische Formel nicht als eine Eigenschaft des physikalischen Seriengebildes ansehen konnte. Damit entfällt die Grundlage von Meissners Auffassung der neuen Serien.

betr. Terms unter $\Delta (m p_n)$ oder $\Delta (m d_n)$ oder $\Delta (m s_n)$. Die Konstante N der Formel (I) erhielt stets den oben (S. 407) zu 109694,8 angegebenen Wert.

Die mathematische Darstellung des neuen Serientypes gelang in keinem Falle innerhalb der Fehlergrenzen, was ja bei der empirischen Art der Bildung solcher Interpolationsformel und der Möglichkeit von Diskontinuitäten (vgl. den Schluß) nicht verwunderlich ist.

Die aus den Beobachtungen berechneten Werte

$$\sqrt{\frac{10\,9694{,}8}{\text{beob. Term}}} - m ,$$

welche es nach Obigem galt, durch $f_{(m)} = m$, also durch einen Ausdruck von der Form $a + a f_{(1/m)} + c f(e^m)$ darzustellen, sind graphisch für verschiedene Serien wiedergegeben als Funktion von m. In der Zeichnung der II. Nebenserien sieht man die Verschiedenheit beider Typen von Serien.

Aus der Zeichnung der I. Nebenserien geht die Diskontinuität hervor, welche die meisten der „$m d$"-Serien bei dem Gliede $m = 7$ zeigen. Das Glied $(6 d_n)$ fällt schon etwas, das $(7 d_n)$ bedeutend oberhalb, das $(8 d_n)$ dagegen deutlich unterhalb des mittleren Kurvenzuges, der in diesem Falle in der Zeichnung und Berechnung vom Ritztypus ist. Die Zahlen „$\Delta (m d_n)$ beob-ber" illustrieren in den Zahlentabellen dasselbe.

Diese Diskontinuität erinnert formal an die anomale Dispersion vor und hinter einer Eigenschwingungsstelle. In diesem Bilde würde der Ritzserientyp der Dispersion bei einer einzigen im weiteren Ultraviolett liegenden Eigenschwingung, der neue Typ der Dispersion zwischen zwei Eigenschwingungen, und zwar nahe der zweiten im Ultrarot entsprechen können.

Vereinzelt sind früher Diskontinuitäten bemerkt (z. B. beim Glied $m = 5{,}5$ der II. N.-S. des Thallium). Im Falle des Neon ist das Phänomen dadurch besonders sichergestellt, daß das Glied $m = 7$ der $(m d_4)$-Serie nichts von dieser Diskontinuität zeigt. Die Glieder $m = 7$ der anderen Serien sind nämlich nicht unsicherer gemessen oder nach dem Kombinationsprinzip zugeordnet, als das der $(m d_4)$-Serie.

Die beträchtlichen Schwankungen in den Serien $(m\,d_3)$, $(m\,d_5)$, $(m\,d_6)$ für $m > 7$ sind reell. Diejenigen jenseits $m = 10$ allerdings liegen nicht mehr außerhalb möglicher Fehler.

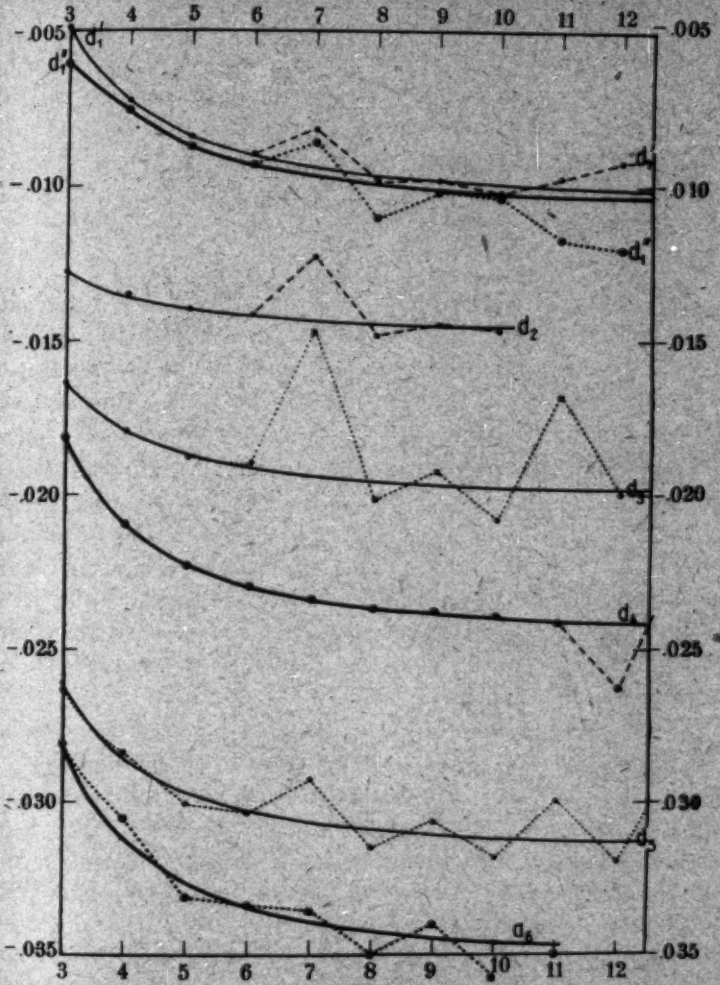
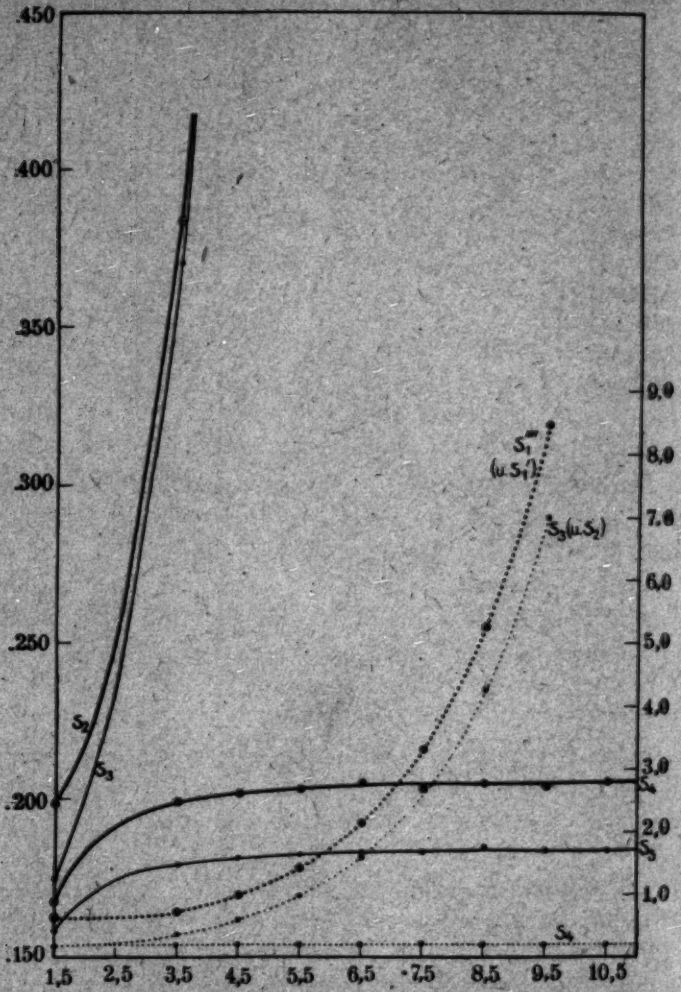


Fig. 1. I. Nebenserie.

Es sind Serien einzelner Linien herausgearbeitet. Nach Lohmanns Versuchen[1]) über die magnetische Aufspaltung

1) W. Lohmann, Beiträge zur Kenntnis des Zeemanphänomens. Diss. Halle 1907, S. 54—58.

einzelner starker sichtbarer Linien ist aber sicher, daß Linien verschiedener Serien miteinander Gebilde wie Dublets, Triplets u. dgl. bilden. Die vielen in bekannten Serienspektren



Ordinate links für ausgezogene, rechts für punktierte Kurven.

Fig. 2. II. Nebenserie.

nicht auftretenden Zeemantypen Lohmanns lassen auf neue, noch nicht studierte Gebilde von Triplets u. dgl. schließen. Nach der Eigenart der Unschärfe der Linien kann man beim

Neon solche Gruppen nicht finden, da die Linien selbst bei der hohen Dispersion des großen Gitters zu scharf sind. Aus Lohmanns Angaben kann nur Weniges abgeleitet werden. Es ist Folgendes:

λ_{Luft}	Kombination	Zeemantyp nach Lohmann's Angaben
6717,042	$1{,}5\,s_2 - 2\,p_5$	normales Triplet.
6506,527	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_3$	$p_3 - d'$ I. N.-S. Triplets v. Mg, Zn usw.
6402,246	$1{,}5\,s_3 - 2\,p_3$	$p_1 - d$ I. N.-S. Triplets v. Mg, Zn usw.
6334,428	$1{,}5\,s_3 - 2\,p_3$	$p_1 - d'$ I. N.-S. Triplets v. Mg, Zn usw.
6266,495	$1{,}5\,s_3 - 2\,p_5$	normales Triplet.
6074,337	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_2$	$^3/_2$ normales Triplet.
5975,534	$1{,}5\,s_5 - 2\,p_5$	$p_1 - s$ II. N.-S. Tripl. v. Mg, Zn usw.
5852,488	$1{,}5\,s_2 - 2\,p_1$	normales Triplet.
5400,556	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_1$	$^3/_2$ normales Triplet.

Daraus folgt: Zu einfachen Linien mit normalem Zeemantriplet gehören die Terme p_1, s_2, p_2, s_3, p_5. Aus einfachen Linien würden gebildet die Serien:

$$m\,p_1 - n\,s_2 \qquad m\,p_2 - n\,s_2 \qquad m\,p_5 - n\,s_2$$
$$m\,p_1 - n\,s_3 \qquad m\,p_3 - n\,s_3 \qquad m\,p_5 - n\,s_3$$

Dem p_3-Term der Mg, Zn, usw.-Triplets entspricht der Neon-Term s_4

" p_1 " " " " " " " " " " s_5

" d " " " " " " " " " " p_2

" d' " " " " " " " " " " p_3.

Der s-Term der II. N.-S. der Mg-, Zn- usw.-Triplets wäre also hiernach ein einfacher Term, der kombiniert mit einem anderen einfachen Term eine einfache Linie von normalem Zeemantriplet gibt, wie es zu erwarten, bisher aber nicht bewiesen war.

Die Herausstellung aller neuen Gebilde erfordert weit umfangreichere Versuche über den Zeemaneffekt, und würde gewiß wichtige neue Aufschlüsse sowohl über die Serien, wie über die komplizierten Zeemantypen bringen.

Wellenlängen des Neonspektrums.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
0	9840,42	10159,40			M.
0	9696,46	10310,21			M.
0	9399,10	10636,40			M.
1	9368,02	10671,70			M.
0	9345,06	10697,91			M.
1	9326,66	10721,30			M.
0	9314,00	10733,59	$2p_4 - 3d_4$	9314,013	M.
0	9310,65	10737,44	$2p_5 - 3d_5$	9310,675	M.
2	9300,70	10748,93	$2p_4 - 3d_3$	9300,956	M.
0	9234,08	10826,48			M.
0	9226,80	10835,02	$2p_5 - 3d_3$	9226,774	M.
0	9221,50	10841,25	$2p_4 - 3d_1''$	9221,649	M.
2	9220,28	10842,68	$2p_4 - 3d_1'$	9220,149	M.
2	9221,88	10864,36	$2p_5 - 3d_2$	9201,821	M.
2	9148,72	10927,49	$2p_5 - 3d_1''$	9148,737	M.
0	9105,18	10979,74			M.
0	8988,58	11122,18			M.
0	8958,46	11159,58			M.
0	8937,00	11186,37			M.
1	8919,43	11208,39	$2p_6 - 3d_5$	8919,463	M.
3	8865,72	11276,30	$2p_6 - 3d_4$	8865,746	M.
3	8853,97	11291,26	$2p_6 - 3d_3$	8853,918	M.
0	8830,80	11320,90	$2p_6 - 3d_2$	8830,962	M.
0	8829,25	11322,80			M.
0	8827,55	11325,07			M.
0	8822,66	11331,34			M.
4	8783,78	11381,48	$2p_3 - 2{,}5s_1''$	8783,768	M.
4	8780,63	11385,57	$2p_6 - 3d_1'$	8780,630	M.
1	8778,78	11387,98	$2p_7 - 3d_6$	8778,773	M.
2	8771,64	11397,24	$2p_3 - 2{,}5s_1'$	8771,651	M.
1	8704,15	11485,61	$2p_7 - 3d_5$	8704,166	M.
3	8681,93	11515,01	$2p_7 - 3d_3$	8681,936	M.
3	8679,50	11518,23	$2p_3 - 2{,}5s_1'''$	8679,494	M.
1	8655,52	11550,14	$2p_4 - 2{,}5s_1''''$	8655,533	M.
6	8654,380	11551,67	$2p_4 - 2{,}5s_1'''$	8654,363	M.
2	8647,04	11561,48	$2p_4 - 2{,}5s_1''$	8647,058	M.
5	8634,668	11578,04	$2p_7 - 3d_1''$	8634,665[1])	M.
6	8591,266	11636,53	$2p_5 - 2{,}5s_1''''$	8591,266	M.
1	8582,87	11647,91	$2p_5 - 2{,}5s_1''$	8582,924	M.
2	8571,27	11663,67	$2p_5 - 2{,}5s_1'$	8571,348	M.
1	8544,66	11700,00	$2p_8 - 3d_5$	8544,657	M.
7	8495,359	11767,90	$2p_8 - 3d_4$	8495,350	M.
2	8484,52	11782,94	$2p_8 - 3d_3$	8484,490	M.
3	8463,42	11812,30	$2p_8 - 3d_2$	8463,366	M.
7	8418,447	11875,41	$2p_8 - 3d_1''$	8418,442	M.
1	8417,24	11877,11	$2p_8 - 3d_1'$	8417,191	M.
7	8377,630	11933,26	$2p_9 - 3d_4'$	8377,653	M.
1	8376,45	11934,95	$2p_9 - 3d_4$	8376,349	M.
2	8365,82	11950,10	$2p_9 - 3d_3$	8365,791	M.

1) 8635,315, $2p_4 - 2{,}5s_1'$ nicht beobachtet.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
1	8301,56	12042,61	$2p_9 - 3d_1''$	8301,571	M.
7	8300,338	12044,39	$2p_9 - 3d_1'$	8300,355	M.
1	8267,14	12092,75	$2p_9 - 2,5s_1''''$	8267,129	M.
5	8266,092	12094,29	$2p_9 - 2,5s_1'''$	8266,061	M.
4	8259,392	12104,10	$2p_9 - 2,5s_1''$	8259,397	M.
0	8248,8	12119,66	$2p_9 - 2,5s_1'$	8248,683	M.
7	8136,423	12287,03	$2p_7 - 2,5s_1''''$	8136,419	M.
3	8128,95	12298,33	$2p_7 - 2,5s_1''$	8128,930	M.
5	8118,554	12314,08	$2p_7 - 2,5s_1'$	8118,553	M.
8	8082,460	12369,06	$1,5s_3 - 2p_{10}$	8082,451	M.
8	7943,193	12585,93	$2p_8 - 2,5s_1'''$	7943,165	M.
3	7937,010	12595,74	$2p_8 - 2,5s_1''$	7937,011	M.
2	7927,09	12611,49	$2p_8 - 2,5s_1'$	7927,117	M.
2	7838,98	12753,24	$2p_9 - 2,5s_1'''$	7839,037	M.
1	7833,12	12762,78	$2p_9 - 2,5s_1''$	7833,043	M.
1	7724,62	12942,05	$2p_1 - 3,5s_4$	7724,629	M.
6	7544,08[1])	13251,77	$2p_{10} - 3d_3$	7544,077	P.
8	7535,78[2])	13266,36	$2p_{10} - 3d_2$	7535,750	P.
0?	7528,56	13279,09			M.
0	7495,31	13338,01			M.
9	7488,85	13349,49	$2p_{10} - 3d_3$	7488,911	M.
4	7472,425[3])	13378,85	$2p_{10} - 3d_3$	7472,450	P.
8	7438,885	13439,163	$1,5s_2 - 2p_{10}$	7438,893	M.
3	7304,82	13685,81	$2p_1 - 3,5s_2$	7304,852	M.
10	7245,165	13798,498	$1,5s_4 - 2p_{10}$	7245,162	M.
10	7173,938	13935,496	$1,5s_2 - 2p_8$	7173,936	M.
3	7138,70	14004,29			
3	7125,37	14030,49			
1,5	7112,2[4])	14056,4	$2p_1 - 4d_2$	7112,318	P.
0,5	7064,72	14150,94	$2p_{10} - 2,5s_1''''$	7064,769	P.
7,5	7059,113[5])	14162,18	$2p_{10} - 2,5s_1''$	7059,123	P.
5	7051,288[6])	14177,89	$2p_{10} - 2,5s_1'$	7051,295	P.
10	7032,410	14215,950	$1,5s_4 - 2p_{10}$	7032,408	M.
9	7024,043	14232,884	$1,5s_3 - 2p_7$	7024,046	P.
10	6929,465	14427,146	$1,5s_2 - 2p_6$	6929,464	M.
2	6759,586	14789,72	$2p_3 - 3,5s_4$	6759,591	P.
5	6738,058	14836,98	$2p_1 - 3,5s_1'$	6738,031	P.
0,5	6721,144	14874,31			P.
2	6717,042	14883,394	$1,5s_2 - 2p_5$	6717,044	M.
9	6678,275[7])	14969,792	$1,5s_2 - 2p_4$	6678,275	M.
6	6666,893	14995,35	$2p_2 - 3,5s_4$	6666,897	P.
7	6652,093	15028,71	$1,5s_2 - 2p_3$	6652,090	P.
1,5	6640,012	15056,05	$2p_4 - 3,5s_5$	6640,012	P.

1) 7544,061 M.
2) 7535,786 M.
3) 7472,456 M.
4) Messung ungenau.
5) 7059,119 M.
6) 7051,314 M.
7) 6678,337 $2p_4 - 3,5s_5$ sollte als schwächere Komposition auftreten.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
6	6602,907	15140,65	$2\,p_3 - 3{,}5\,s_4$	6602,906	P.
15	6598,953	15149,733	$1{,}5\,s_2 - 2\,p_3$	6598,954	M.
6	6532,881	15302,951	$1{,}5\,s_3 - 2\,p_7$	6532,879	M.
15	6506,527	15364,934	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_8$	6506,528	M.
7	6444,721	15512,28	$2\,p_8 - 3{,}5\,s_5$	6444,717	P.
6	6421,708	15567,87	$2\,p_2 - 3{,}5\,s_3$	6421,711	P.
7	6409,753	15596,91	$2\,p_3 - 3{,}5\,s_4$	6409,754	P.
20	6402,246	15615,199	$1{,}5\,s_5 - 2\,p_9$	6402,246	M.
6	6401,076	15618,05	$2\,p_2 - 3{,}5\,s_3$	6401,082	P.
12	6382,991	15662,305	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_7$	6382,989	M.
6	6365,013	15706,55	$2\,p_7 - 3{,}5\,s_5$	6365,005	P.
6	6351,873	15739,03	$2\,p_3 - 3{,}5\,s_2$	6351,866	P.
10	6334,428	15782,380	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_9$	6334,427	M.
7	6330,901	15791,16	$2\,p_7 - 3{,}5\,s_4$	6330,900	P.
8	6328,173	15797,98	$2\,p_4 - 3{,}5\,s_2$	6328,173	P.
7	6313,692	15834,21	$2\,p_8 - 3{,}5\,s_3$	6313,693	P.
6	6304,789	15856,573	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_8$	6304,787	M.
6	6293,766	15884,34	$2\,p_5 - 3{,}5\,s_3$	6293,751	P.
4	6276,039	15929,21	$2\,p_2 - 4\,d_3$	6276,041	P.
5	6273,018	15936,87	$2\,p_3 - 4\,d_4$	6273,020	P.
15	6266,495	15953,469	$1{,}5\,s_3 - 2\,p_5$	6266,497	M.
6	6258,796	15973,09	$2\,p_2 - 4\,d_2$	6258,801	P.
0,5	6252,732	15988,59	$2\,p_2 - 4\,d_3$	6252,758	P.
1	6249,593	15996,62	$2\,p_1 - 4{,}5\,s_4$	6249,593	P.
6	6246,734	16003,94	$2\,p_3 - 3{,}5\,s_5$	6246,733	P.
4	6225,742	16057,90	$2\,p_2 - 4\,d_4$	6225,746	P.
15	6217,279	16079,755	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_7$	6217,278	M.
7	6213,878	16088,56	$2\,p_8 - 3{,}5\,s_4$	6213,881	P.
6	6205,787	16109,532	$2\,p_2 - 4\,d_2$	6205,788	P.
2	6202,981	16116,82	$2\,p_4 - 4\,d_5$	6202,983	P.
4	6193,078	16142,59	$2\,p_4 - 4\,d_4$	6193,084	P.
5	6189,076	16153,03	$2\,p_4 - 4\,d_3$	6189,077	P.
1	6183,169	16168,46	$2\,p_4 - 4\,d_2$	6183,170	P.
7	6182,161	16171,09	$2\,p_8 - 3{,}5\,s_5$	6182,152	P.
4	6175,291	16189,09	$2\,p_4 - 4\,d_1''$	6175,290	P.
5	6174,888	16190,15	$2\,p_4 - 4\,d_1'$	6174,884	P.
2	6172,821	16195,56	$2\,p_3 - 4\,d_6$	6172,827	P.
12	6163,594	16219,807	$1{,}5\,s_3 - 2\,p_2$	6163,594	M.
1	6161,123 ?	16226,31 ?			P.
4	6156,145	16239,44	$2\,p_3 - 4\,d_3$	6156,149	P.
6	6150,303	16254,86	$2\,p_3 - 4\,d_2$	6150,303	P.
12	6143,061	16274,022	$1{,}5\,s_5 - 2\,p_3$	6143,060	M.
6	6142,508	16275,48	$2\,p_5 - 4\,d_1''$	6142,507	P.
6	6128,457[1])	16312,800	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_5$	6128,450	P.
2	6118,027	16340,61	$2\,p_8 - 3{,}5\,s_3$	6118,023	P.
0,5	6102,568 ?	16382,00 ?			P.
8	6096,162	16399,220	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_4$	6096,163	M.
10	6074,337	16458,146	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_2$	6074,335	P.
4	6064,552	16484,69	$2\,p_7 - 3{,}5\,s_3$	6064,543	P.
4	6046,158	16534,85	$2\,p_7 - 3{,}5\,s_2$	6046,143	P.
2	6042,013[2])	16546,20	$2\,p_1 - 5\,d_3$	6041,980	P.[2])

1) 6128,450 M. 2) IV. G. 6074 gibt 6041,941 und stört Messung.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
10	6029,999	16579,155	$1{,}5\ s_4 - 2\ p_3$	6029,996	M.
6	6000,951	16659,41	$2\ p_8 - 4\ d_4$	6000,931	P.
7	5991,675	16685,21	$2\ p_8 - 4\ d_4$	5991,668	P.
8	5987,933	16695,63	$2\ p_8 - 4\ d_3$	5987,918	P.
2	5982,401	16711,06	$2\ p_9 - 4\ d_3$	5982,387	P.
12	5975,534	16730,268	$1{,}5\ s_3 - 2\ p_3$	5975,534	M.
10	5974,640	16732,77	$2\ p_8 - 4\ d_1'$	5974,631	P.
5	5966,171	16756,52	$2\ p_3 - 3{,}5\ s_1''''$	5966,169	P.
10	5965,438	16758,58	$2\ p_3 - 3{,}5\ s_1''$	5965,468	P.
7	5961,626	16769,30	$2\ p_3 - 3{,}5\ s_1'$	5961,595	P.
10	5944,834	16816,666	$1{,}5\ s_5 - 2\ p_4$	5944,833	M.
6	5939,319	16832,28	$2\ p_3 - 3{,}5\ s_3$	5939,324	P.
7	5934,458	16846,05	$2\ p_7 - 4\ d_3$	5934,462	P.
2	5933,958?	16847,49			P.
4	5922,709	16879,48	$2\ p_7 - 4\ d_4$	5922,709	P.
2	5919,037	16889,95	$2\ p_7 - 4\ d_3$	5919,045	P.
9	5918,914	16890,31	$2\ p_3 - 3{,}5\ s_1'$	5918,907	P.
9	5913,642	16905,37	$2\ p_7 - 4\ d_2$	5913,642	P.
6	5906,440	16925,99	$2\ p_7 - 4\ d_1''$	5906,432	P.
1,5	5902,792	16936,44	$2\ p_4 - 3{,}5\ s_1''''$	5902,782	P.
6	5902,475	16937,35	$2\ p_4 - 3{,}5\ s_1'''$	5902,464	P.
1	5902,097	16938,43	$2\ p_4 - 3{,}5\ s_1''$	5902,095	P.
3,5	5898,406	16949,03	$2\ p_4 - 3{,}5\ s_1'$	5898,328	P.
1	5891,521?	16968,84?			P.
20	5881,896	16996,604	$1{,}5\ s_2 - 2\ p_2$	5881,894	M.
10	5872,827	17022,88	$2\ p_3 - 3{,}5\ s_1''''$	5872,821	P.
7	5872,149	17024,83	$2\ p_3 - 3{,}5\ s_1''$	5872,142	P.
1	5870,971	17028,23	$2\ p_3 - 3{,}5\ s_1^*$	(5870,992)	(P.)
7	5868,417	17035,65	$2\ p_3 - 3{,}5\ s_1'$	5868,413	P.
50	5852,4875	17082,010	$1{,}5\ s_2 - 2\ p_1$	5852,487	M.
7	5828,910	17151,11	$2\ p_8 - 4\ d_5$	5828,911	P.
10	5820,176	17176,85	$2\ p_8 - 4\ d_4$	5820,170	P.
6	5816,645	17187,27	$2\ p_8 - 4\ d_3$	5816,631	P.
3	5812,400	17199,82			P.
8	5811,417	17202,73	$2\ p_8 - 4\ d_2$	5811,414	P.
10	5804,454	17223,38	$2\ p_8 - 4\ d_1''$	5804,450	P.
7	5804,098	17224,42	$2\ p_8 - 4\ d_1'$	5804,092	P.
6	5770,307	17325,29	$2\ p_1 - 4{,}5\ s_1'$	5770,309	P.
15	5764,432	17342,95	$2\ p_9 - 4\ d_4'$	(5764,432)	P.
1	5764,063	17344,06	$2\ p_9 - 4\ d_4$	5764,068	P.
7	5760,585	17354,53	$2\ p_9 - 4\ d_3$	5760,598	P.
7	5748,650	17390,56	$2\ p_9 - 4\ d_1''$	5748,651	P.
10	5748,286	17391,66	$2\ p_9 - 4\ d_1'$	5748,298	P.
7	5719,532	17479,10	$2\ p_8 - 3{,}5\ s_1''''$	5719,525	P.
10	5719,236	17480,00	$2\ p_8 - 3{,}5\ s_1'''$	5719,227	P.
8	5718,899	17481,03	$2\ p_8 - 3{,}5\ s_1''$	5718,882	P.
5	5715,339	17491,92	$2\ p_8 - 3{,}5\ s_1'$	5715,344	P.
8	5689,807	17570,41	$2\ p_{10} - 3{,}5\ s_3$	5689,821	P.
4	5684,647	17586,36	$2\ p_1 - 5{,}5\ s_4$	5684,650	P.
0,5	5670,159	17631,30			P.
7	5662,553	17654,98	$2\ p_{10} - 3{,}5\ s_4$	5662,553	P.
10	5656,656	17673,39	$2\ p_7 - 3{,}5\ s_1''''$	5656,656	P.
7	5656,030	17675,34	$2\ p_7 - 3{,}5\ s_1''$	5656,026	P.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
0,5	5654,977	17678,62	$2\,p_7 - 3{,}5\,s_1^*$	(5654,960)	P.
7	5652,571	17686,16	$2\,p_7 - 3{,}5\,s_1'$	5652,566	P.
6	5589,378	17886,11	$2\,p_2 - 4{,}5\,s_5$	5589,352	P.
1,5	5585,905	17897,23	$2\,p_1 - 6\,d_2$	5585,913	P.
0,5	5576,956	17925,95			P.
5	5576,049	17928,87	$2\,p_2 - 4{,}5\,s_4$	5576,038	P.
7	5563,047	17970,76	$2\,p_8 - 3{,}5\,s_1''''$	5563,049	P.
10	5562,765	17971,68	$2\,p_8 - 3{,}5\,s_1'''$	5562,768	P.
8	5562,441	17972,69	$2\,p_5 - 3{,}5\,s_1''$	5562,441	P.
5	5559,087	17983,56	$2\,p_8 - 3{,}5\,s_1'$	5559,094	P.
6	5538,641	18049,95	$2\,p_3 - 4{,}5\,s_4$	5538,653	P.
7	5533,678	18066,14	$2\,p_4 - 4{,}5\,s_5$	5533,682	P.
3	5511,485	18138,89	$2\,p_5 - 3{,}5\,s_1'''$	5511,496	P.
1	5511,176	18139,90	$2\,p_9 - 3{,}5\,s_1''$	5511,176	P.
4	5507,339	18152,55	$2\,p_5 - 4{,}5\,s_5$	5507,343	P.
6	5494,407	18195,27	$2\,p_6 - 4{,}5\,s_4$	5494,414	P.
8	5448,514	18348,52	$2\,p_{10} - 3{,}5\,s_3$	5448,514	P.
2	5447,120	18353,22	$2\,p_1 - 5{,}5\,s_2$	5447,099	P.
9	5433,652	18398,71	$2\,p_{10} - 3{,}5\,s_2$	5433,659	P.
6	5420,155	18444,53	$2\,p_2 - 5\,d_3$	5420,145	P.
8	5418,555	18449,97	$2\,p_3 - 5\,d_3$	5418,557	P.
9	5412,655	18470,08	$2\,p_2 - 5\,d_2$	5412,646	P.
1,5	5410,12	18478,75	$2\,p_2 - 5\,d_2$	5410,171	P.
50	5400,556	18511,46	$1{,}5\,s_4 - 2\,p_1$	5400,561	P.[1]
4	5383,257	18570,95	$2\,p_3 - 5\,d_3$	5383,248	P.
6	5374,976	18599,56	$2\,p_3 - 5\,d_2$	5374,970	P.
7	5372,314	18608,77	$2\,p_6 - 4{,}5\,s_5$	5372,314	P.
4	5366,222	18629,90	$2\,p_4 - 5\,d_4$	5366,221	P.
4	5362,248	18643,71	$2\,p_4 - 5\,d_4$	5362,223	P.
5	5360,442	18650,06	$2\,p_4 - 5\,d_3$	5360,422	P.
8	5360,023	18651,45	$2\,p_6 - 4{,}5\,s_4$	5360,007	P.
2,5	5358,020	18658,42	$2\,p_4 - 5\,d_2$	5357,998	P.
8	5355,403	18667,54	$2\,p_4 - 5\,d_1''$	5355,325	P.
8	5355,176	18668,33	$2\,p_4 - 5\,d_1'$	5355,161	P.
1,5	5353,513	18674,13	$2\,p_1 - 5{,}5\,s_1'$	5353,505	P.
8	5349,210	18689,15	$2\,p_2 - 4{,}5\,s_2$	5349,196	P.
12	5343,295	18709,84	$2\,p_{10} - 4\,d_3$	5343,289	P.[3]
0	5342,700	18711,92	$2\,p_1 - 7\,d_2$	5342,637	P.
20	5341,099	18717,54	$2\,p_{10} - 4\,d_2$	5341,099	P.
2,5	5335,710	18736,44	$2\,p_3 - 5\,d_3$	5335,705	P.
6	5333,323	18744,82	$2\,p_3 - 5\,d_2$	5333,299	P.
12	5330,791	18753,72	$2\,p_{10} - 4\,d_3$	5330,787	P.[3]
7	5326,407	18769,16	$2\,p_{10} - 4\,d_2$	5326,404	P.
0,5	5320,550	18789,81	$2\,p_{10} - 4\,d_1''$	5320,555	P.
4	5316,806	18803,05	$2\,p_7 - 4{,}5\,s_5$	5316,808	P.
4,5	5314,781	18810,21	$2\,p_3 - 4{,}5\,s_3$	5314,783	P.
7	5304,767	18845,73	$2\,p_7 - 4{,}5\,s_4$	5304,760	P.
8	5298,200	18869,08	$2\,p_4 - 4{,}5\,s_2$	5298,185	P.
6	5280,070	18933,87	$2\,p_4 - 4{,}5\,s_3$	5280,067	P.

1) 5400,564, 18511,44 M.
2) 5342,992, $2\,p_3 - 5\,d_3$ daneben nicht gemessen.
3) 5330,652, $2\,p_8 - 5\,d_1''$ nicht beobachtet.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
5,5	5274,043	18955,51	$2p_5 - 4{,}5\,s_2$	5274,036	P.
6	5234,022	19100,44	$2p_3 - 4{,}5\,s_2$	5234,030	P.
6	5222,349	19143,14	$2p_3 - 4{,}5\,s_4$	5222,353	P.
5	5214,337	19172,55	$2p_3 - 5\,d_3$	5214,338	P.
6	5210,567	19186,42	$2p_6 - 5\,d_4$	5210,564	P.
7	5208,865	19192,69	$2p_6 - 5\,d_3$	5208,864	P.
1	5206,565	19201,17	$2p_6 - 5\,d_2$	5206,572	P.
8	5203,897	19211,02	$2p_6 - 5\,d_1'$	5203,896	P.
8	5193,227	19250,49	$2p_2 - 4{,}5\,s_1''''$	5193,215	P.
8	5193,118	19250,89	$2p_2 - 4{,}5\,s_1''$	5193,116	P.
5	5191,327	19257,53	$2p_2 - 4{,}5\,s_1'$	5191,317	P.
8	5188,609	19267,62	$2p_9 - 4{,}5\,s_3$	5188,615	P.
0,5	5182,320	19291,01	$2p_1 - 6{,}5\,s_2$	5182,308	P.
2,5	5163,474	19361,41	$2p_7 - 5\,d_3$	5163,474	P.
6	5158,894	19378,61	$2p_2 - 4{,}5\,s_1'$	5158,899	P.
0,5	5158,322	19380,75	$2p_7 - 5\,d_4$	5158,334	P.
6	5156,662	19386,99	$2p_7 - 5\,d_2$	5156,666	P.
6	5154,423	19395,41	$2p_7 - 5\,d_3$	5154,422	P.
7	5151,958	19404,69	$2p_7 - 5\,d_1''$	5151,952	P.
5	5150,077	19411,77	$2p_8 - 4{,}5\,s_2$	5150,076	P.
5	5145,122	19430,47	$2p_4 - 4{,}5\,s_1''''$	5145,122	P.
10	5145,011	19430,89	$2p_4 - 4{,}5\,s_1''$	5145,026	P.
10	5144,933	19431,190	$2p_4 - 4{,}5\,s_1'''$	5144,933	P.
1,5	5143,265	19437,49	$2p_4 - 4{,}5\,s_1'$	5143,259	P.
0	5129,316	19490,35	$2p_1 - 6{,}5\,s_1'$	5129,323	P.
0,5	5128,280	19494,29	$2p_2 - 5{,}5\,s_5$	5128,279	P.
8	5122,337	19516,89	$2p_5 - 4{,}5\,s_1''''$	5122,344	P.
8	5122,252	19517,23	$2p_5 - 4{,}5\,s_1''$	5122,248	P.
0,5	5121,866	19518,70	$2p_2 - 5{,}5\,s_4$	5121,883	P.
4	5120,506	19523,88	$2p_5 - 4{,}5\,s_1'$	5120,498	P.
5	5117,011	19537,22	$2p_{10} - 3{,}5\,s_1''''$	5117,020	P.
8	5116,495	19539,18	$2p_{10} - 3{,}5\,s_1''$	5116,504	P.
7	5113,665	19550,00	$2p_{10} - 3{,}5\,s_1'$	5113,674	P.
5	5104,688	19584,38	$2p_7 - 4{,}5\,s_3$	5104,685	P.
4	5099,042	19606,06	$2p_7 - 4{,}5\,s_2$	5099,046	P.
2	5090,321	19639,65	$2p_3 - 5{,}5\,s_4$	5090,323	P.
4	5083,968	19664,20	$2p_8 - 5\,d_5$	5083,968	P.
3	5081,360	19674,30	$2p_4 - 5{,}5\,s_3$	5081,375	P.
8	5080,376	19678,10	$2p_8 - 5\,d_4$	5080,380	P.
3	5078,762	19684,35	$2p_8 - 5\,d_3$	5078,764	P.
5	5076,581	19692,81	$2p_8 - 5\,d_2$	5076,585	P.
5	5074,190	19702,08	$2p_8 - 5\,d_1''$	5074,188	P.
1	5074,062	19702,58	$2p_8 - 5\,d_1'$	5074,041	P.[1]
0,5	5059,150	19760,66	$2p_5 - 5{,}5\,s_5$	5059,158	P.
4	5052,930	19784,98	$2p_5 - 5{,}5\,s_4$	5052,932	P.
1	5046,608	19809,77	$2p_2 - 6\,d_4$	5046,610	P.
3	5045,816	19812,87	$2p_2 - 6\,d_3$	5045,816	P.
3	5042,853	19824,52	$2p_2 - 6\,d_2$	5042,848	P.
0	5041,598	19829,46	$2p_2 - 6\,d_2$	5041,589	P.
10	5037,737	19844,64	$2p_9 - 5\,d_4'$	5037,739	P.
1	5037,577	19845,28	$2p_9 - 5\,d_4$	5037,581	P.

1) Messung ungenau.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
5	5035,989	19851,54	$2p_9 - 5d_3$	5035,993	P.
0,5	5031,483	19869,32	$2p_9 - 5d_1''$	5031,492	P.
9	5031,339	19869,89	$2p_9 - 5d_1'$	5031,349	P.
4	5022,850	19903,47	$2p_8 - 4,5s_2$	5022,860	P.
1,5	5015,187	19933,88	$2p_3 - 6d_5$	5015,184	P.
4	5011,005	19950,51	$2p_3 - 6d_3$	5011,008	P.
6	5005,333	19973,13	$2p_8 - 4,5s_1''''$	5005,335	P.
10	5005,150	19973,85	$2p_6 - 4,5s_1'''$	5005,154	P.
0,5	5003,561	19980,20	$2p_6 - 4,5s_1'$	5003,571	P.
1	5000,395	19992,84	$2p_4 - 6d_5$	5000,403	P.
1,5	4998,502	20000,42	$2p_4 - 6d_4$	4998,507	P.
2	4997,482	20004,50	$2p_4 - 6d_3$	4997,486	P.
0,5	4996,209	20009,59	$2p_4 - 6d_2$	4996,251	P.
7 u r	4994,925	20014,74	$2p_4 - 6d_1'$	4994,925	P.[1]
1	4979,625	20076,23	$2p_5 - 6d_5$	4979,657	P.
1,5	4975,961	20091,01	$2p_5 - 6d_4$	4975,995	P.
4	4974,760	20095,87	$2p_5 - 6d_3$	4974,769	P.
6	4973,538	20100,80	$2p_5 - 6d_1''$	4973,543	P.
7	4957,125	20167,36	$2p_7 - 4,5s_1''''$	4957,120	P.
10	4957,031	20167,74	$2p_7 - 4,5s_1''$	4957,030	P.
7	4955,382	20174,45	$2p_7 - 4,5s_1'$	4955,389	P.
6	4944,981	20216,88	$2p_6 - 5,5s_5$	4944,983	P.
6	4939,034	20241,23	$2p_6 - 5,5s_4$	4939,037	P.
4	4930,944	20274,44	$2p_2 - 5,5s_3$	4930,946	P.
5	4928,228	20285,61	$2p_2 - 5,5s_2$	4928,234	P.
4	4899,013	20406,58	$2p_3 - 5,5s_2$	4899,012	P.
5	4897,924	20411,11	$2p_7 - 5,5s_5$	4897,918	P.
1,5	4892,228	20434,88	$2p_2 - 6,5s_5$	4892,228	P.
9	4892,085	20435,48	$2p_7 - 5,5s_4$	4892,084	P.
1	4888,365	20451,02	$2p_2 - 6,5s_4$	4888,363	P.
6	4885,084	20464,76	$2p_8 - 4,5s_1''''$	4885,085	P.
10	4884,915	20465,46	$2p_4 - 5,5s_2$ / $2p_6 - 4,5s_1'''$	4884,903 / 4884,866	P.
2	4883,403	20471,82	$2p_8 - 4,5s_1'$	4883,405	P.
5	4868,268	20535,46	$2p_8 - 6d_5$	4868,266	P.
5	4867,010	20540,78	$2p_5 - 5,5s_2$	4867,008	P.
5,5	4866,473	20543,02	$2p_6 - 6d_4$	4866,470	P.
6	4865,501	20547,13	$2p_6 - 6d_3$	4865,503	P.
3	4864,351	20551,99	$2p_5 - 5,5s_2$	4864,367	P.[2]
6	4863,074	20557,38	$2p_6 - 6d_1'$	4863,074	P.
2	4859,604	20572,05	$2p_3 - 6,5s_4$	4859,608	P.
6	4852,654	20601,53	$2p_2 - 5,5s_1''''$	4852,648	P.
4,5	4851,501	20606,43	$2p_2 - 5,5s_1'$	4851,497	P.
3	4849,530	20614,80	$2p_4 - 6,5s_5$	4849,524	P.
1	4845,767	20630,81	$2p_2 - 7d_6$	4845,786	P.
2	4845,145	20633,46	$2p_2 - 7d_5$	4845,140	P.
4	4842,941	20642,85	$2p_2 - 7d_3$	4842,931	P.
1,5	4842,566	20644,44	$2p_2 - 7d_2$	4842,570	P.
9	4837,314	20666,86	$2p_{10} - 4,5s_5$	4837,317	P.
1	4829,288	20701,20	$2p_8 - 6,5s_5$	4829,284	P.

1) 4995,009, $2p_4 - 6d_1''$ erzeugt die Unschärfe nach Roth.
2) $2p_8 - 6d_5$, 4864,331 schwach darüber zu erwarten.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
8	4827,591	20708,48	$2p_8 - 5{,}5s_5$	4827,581	P.
10	4827,342	20709,55	$2p_{10} - 4{,}5s_4$	4827,341	P.
4	4825,529	20717,33	$2p_5 - 6{,}5s_4$	4825,519	P.
4	4823,370	20726,61	$2p_7 - 6d_5$	4823,366	P.
6	4823,174	20727,45	$2p_3 - 5{,}5s_1'$	4823,172	P.
8	4821,926	20732,81	$2p_8 - 5{,}5s_4$	4821,915	P.
5	4819,937	20741,36	$2p_7 - 6d_3$	4819,931	P.
7	4818,789	20746,31	$2p_7 - 6d_4$	4818,781	P.
8	4817,644	20751,23	$2p_7 - 6d_1''$	4817,631	P.
0	4816,900	20754,45	$2p_3 - 7d_5$	4816,888	P.
4	4814,338	20765,48	$2p_3 - 7d_2$	4814,349	P.
6	4810,634	20781,48	$2p_4 - 5{,}5s_1''''$	4810,630	P.
7	4810,066	20783,93	$2p_4 - 5{,}5s_1'''$	4810,068	P.
1,5	4809,500	20786,37	$2p_4 - 5{,}5s_1'$	4809,499	P.
0	4803,225	20813,53	$2p_4 - 7d_5$	4803,251	P.
1,5	4802,363	20817,27	$2p_4 - 7d_4$	4802,369	P.
0,5	4801,076	20822,85	$2p_4 - 7d_3$	4801,080	P.
0	4800,748	20824,26	$2p_4 - 7d_2$	4800,725	P.
5	4800,114	20827,02	$2p_4 - d_1'$	4800,114	P.
3	4790,728	20867,83	$2p_5 - 5{,}5s_1''''$	4790,712	P.
10	4790,218	20870,05	$2p_5 - 5{,}5s_1''$	4790,226	P.
6	4789,600	20872,74	$2p_5 - 5{,}5s_1'$	4789,590	P.
12	4788,926	20875,68	$2p_5 - 5{,}5s_5$	4788,921	P.
0,5	4784,022	20897,07	$2p_5 - 7d_5$	4784,023	P.
0,5	4781,239	20909,24	$2p_5 - 7d_3$	4781,240	P.
3	4780,884	20910,79	$2p_5 - 7d_2$	4780,890	P.
8	4780,342	20913,16	$2p_5 - 7d_1''$	4780,340	P.
7	4758,723	21008,16	$2p_6 - 5{,}5s_2$	4758,723	P.
6	4754,440	21027,09	$2p_6 - 6d_5$	4754,437	P.
0	4753,123	21032,92	$2p_2 - 7{,}5s_5$	4753,120	P.
10	4752,727	21034,68	$2p_6 - 6d_4$	4752,724	P.
3	4751,802	21038,77	$2p_6 - 6d_3$	4751,801	P.
3	4750,686	21043,71	$2p_6 - 6d_2$	4750,683	P.
8	4749,565	21048,67	$2p_6 - 6d_1''$	4749,567	P.
5	4725,144	21157,46	$2p_6 - 6{,}5s_3$	4725,142	P.
1	4724,162	21161,86	$2p_2 - 8d_6$	4724,147	P.
2,5	4723,810	21163,43	$2p_3 - 7{,}5s_4$ $2p_2 - 8d_5$	4723,801 4723,810	P.
2	4722,714	21168,34	$2p_2 - 8d_3$	4722,715	P.
1	4722,150	21170,87	$2p_3 - 8d_2$	4722,198	P.
5	4721,536	21173,62	$2p_6 - 6{,}5s_4$	4721,537	P.
5	4717,608	21191,26	$2p_7 - 5{,}5s_3$	4717,603	P.
15	4715,339	21201,45	$2p_9 - 6d_4'$	4715,340	P.
3	4715,246	21201,87	$2p_9 - 6d_4$	4715,247	P.
3	4715,132	21202,37	$2p_7 - 5{,}5s_2$	4715,121	P.
5	4714,336	21205,96	$2p_9 - 6d_3$	4714,340	P.
1,5	4712,800	21212,87	$2p_4 - 7{,}5s_5$	4712,798	P.
2	4712,135	21215,87	$2p_3 - 6{,}5s_3$	4712,128	P.
10	4712,060	21216,21	$2p_9 - 6d_1'$	4712,060	P.
3	4710,478	21223,33	$2p_2 - 6{,}5s_2$	4710,478	P.
10	4710,058	21225,22	$2p_{10} - 5d_6$	4710,060	P.
12	4708,857	21230,64	$2p_{10} - 5d_5$	4708,861	P.
15	4704,394	21250,77	$2p_{10} - 5d_3$	4704,396	P.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
7	4702,526	21259,22	$2\,p_{10} - 5\,d_2$	4702,526	P.
1	4700,469	21268,53	$2\,p_{10} - 5\,d_1''$	4700,468	P.
1	4696,943	21284,48	$2\,p_2 - 8\,d_3$	4696,953	P.
2,5	4695,363	21291,65	$2\,p_3 - 8\,d_2$	4695,359	P.
(0)	4693,675	21299,30	$2\,p_5 - 7{,}5\,s_3$	4693,681	P.
2	4691,580	21308,82	$2\,p_5 - 7{,}5\,s_4''''$	4691,585	P.
0,5	4688,191	21324,22	$2\,p_8 - 5{,}5\,s_1''''$	4688,211	P.
6	4687,664	21326,62	$2\,p_8 - 5{,}5\,s_1'''$	4687,676	P.
0	4683,985	21343,37	$2\,p_4 - 8\,d_2$	4683,985	P.
3	4683,764	21344,37	$2\,p_3 - 6{,}5\,s_2$	4683,771	P.
1	4683,238	21346,78	$2\,p_4 - 8\,d_3$	4683,238	P.
1,5	4682,910	21348,26	$2\,p_4 - 8\,d_3$	4682,907	P.
2,5	4682,146	21351,75	$2\,p_7 - 6{,}5\,s_5$	4682,151	P.
2,5	4681,930	21352,74	$2\,p_4 - 8\,d_1'$	4681,934	P.
4	4681,200	21356,06	$2\,p_6 - 7\,d_5$	4681,202	P.
6	4680,363	21359,88	$2\,p_6 - 7\,d_4$	4680,364	P.
7	4679,129	21365,52	$2\,p_6 - 7\,d_3$	4679,139	P.
(0,5)	4678,800	21367,01	$2\,p_6 - 7\,d_2$	4678,802	P.
4	4678,604	21367,92	$2\,p_7 - 6{,}5\,s_4$	4678,610	P.
8	4678,211	21369,71	$2\,p_6 - 7\,d_1'$	4678,220	P.
5	4670,870	21403,29	$2\,p_4 - 6{,}5\,s_2''''$	4670,873	P.
6	4667,356	21419,42	$2\,p_2 - 6{,}5\,s_1''''$	4667,348	P.
4	4666,654	21422,63	$2\,p_3 - 6{,}5\,s_1'$	4666,661	P.
0	4665,391	21428,43	$2\,p_5 - 8\,d_5$	4665,427	P.
0,5	4664,009	21434,78			P.
2,5	4663,518	21437,05	$(2\,p_2 - 8{,}5\,s_5)$	(4663,555)	
			$2\,p_5 - 8\,d_2$	4663,527	
3,5	4663,092	21438,99	$2\,p_5 - 8\,d_1''$	4663,098	P.
7	4661,095	21448,19	$2\,p_{10} - 4{,}5\,s_3$	4661,093	P.
8	4656,383	21469,89	$2\,p_{10} - 4{,}5\,s_2$	4656,391	P.
4	4653,699	21482,27	$2\,p_8 - 6{,}5\,s_3$	4653,705	P.
3	4652,101	21489,65	$2\,p_3 - 6{,}5\,s_2$	4652,097	P.
5	4649,903	21499,81	$2\,p_8 - 5{,}5\,s_2''''$	4649,903	P.
0	4645,885	21518,40	$2\,p_7 - 5{,}5\,s_1''''$	4645,886	P.
8	4645,411	21520,59	$2\,p_7 - 5{,}5\,s_1''$	4645,417	P.
3,5	4644,833	21523,28	$2\,p_7 - 5{,}5\,s_1'$	4644,830	P.
0,5	4644,150	21526,44	$2\,p_2 - 9\,d_3$	4644,146	P.
0,5	4643,931	21527,45	$2\,p_2 - 9\,d_2$	4643,928	P.
1	4643,182	21530,93	$2\,p_2 - 9\,d_2$	4643,179	P.
5	4640,443	21543,64	$2\,p_3 - 6{,}5\,s_1'$	4640,448	P.
3	4639,591	21547,59	$2\,p_7 - 7\,d_3$	4639,593	P.
4	4636,974	21559,74	$2\,p_7 - 7\,d_3$	4636,977	P.
5	4636,630	21561,35	$2\,p_7 - 7\,d_2$	4636,647	P.
5	4636,118	21563,73	$2\,p_7 - 7\,d_1''$	4636,129	P.
3	4628,460	21599,42	$2\,p_4 - 6{,}5\,s_1''''$	4628,464	P.
7	4628,300	21600,17	$2\,p_4 - 6{,}5\,s_1'''$	4628,308	P.
0,5	4627,799	21602,50	$2\,p_4 - 6{,}5\,s_1'$	4627,789	P.
0	4624,715	21616,90	$2\,p_4 - 8{,}5\,s_5$	4624,736	P.
0	4617,982	21648,41	$2\,p_3 - 9\,d_5$	4617,968	P.
5	4617,825	21649,15	$2\,p_3 - 6{,}5\,s_5$	4617,835	P.
1	4616,911	21653,44	$2\,p_3 - 9\,d_3$	4616,915	P.
6	4614,399	21665,23	$2\,p_3 - 6{,}5\,s_4$	4614,392	P.
7	4609,912	21686,32	$2\,p_3 - 6{,}5\,s_1''$	4609,907	P.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
3	4609,365	21688,89	$2p_3 - 6{,}5s_1'$	4609,353	P.
1	4604,938	21709,75	$2p_3 - 8{,}5s_4$	4604,935	P.[1]
0	4604,680	21710,83	$2p_4 - 9d_3$	4604,695	P.
2	4604,095	21713,72	$2p_4 - 9d_1'$	4604,094	P.
4	4595,249	21755,51	$2p_6 - 7{,}5s_3$	4595,247	P.
4	4593,243	21765,02	$2p_3 - 7{,}5s_4$	4593,237	P.
0,5	4586,145	21798,71	$2p_3 - 9d_3$	4586,134	P.
0	4586,419	21797,39	$2p_3 - 9d_2$	4586,443	P.
1,5	4585,876	21799,98	$2p_3 - 9d_1''$	4585,868	P.
1	4582,980	21813,75	$2p_2 - 7{,}5s_3$	4582,997	P.
2	4582,556	21815,77	$2p_9 - 5{,}5s_1''''$	4582,555	P.
7	4582,455	21816,26	$2p_9 - 6{,}5s_3$	4582,464	P.
2	4582,105	21817,92	$2p_9 - 5{,}5s_1''$	4582,100	P.
7	4582,052	21818,18	$2p_9 - 5{,}5s_1'''$	4582,044	P.
2,5	4575,858	21847,70	$2p_3 - 7d_3$	4575,858	P.
8	4575,063	21851,50	$2p_9 - 7d_4$	4575,058	P.
3	4573,898	21857,08	$2p_8 - 7d_3$	4573,888	P.
4	4573,557	21858,70	$2p_8 - 7d_2$	4573,565	P.
1	4573,066	21861,05	$2p_8 - 7d_1''$	4573,063	P.
1,5	4567,845	21886,03	$2p_8 - 8d_3$	4567,848	P.
2	4567,139	21889,41	$2p_8 - 8d_4$	4567,138	P.
3,5	4566,830	21890,90	$2p_8 - 8d_2$	4566,822	P.
0	4566,290	21893,48	$2p_6 - 8d_2$	4566,340	P.
4,5	4565,897	21895,37	$2p_6 - 8d_1'$	4565,897	P.
0	4562,449	21911,92	$2p_3 - 10d_2'$	4562,459	P.
0,5	4556,698	21939,57	$2p_3 - 7{,}5s_2$	4556,699	P.
3	4555,392	21945,86	$2p_6 - 6{,}5s_2$	4555,380	P.
3,5	4554,824	21948,60	$2p_2 - 7{,}5s_1''''$	4554,811	P.
1	4554,561	21949,87	$2p_7 - 7{,}5s_5$	4554,576	P.
1,5	4554,415	21950,56	$2p_2 - 7{,}5s_1'$	4554,413	P.
3	4552,601	21959,31	$2p_7 - 7{,}5s_4$	4552,602	P.
0	4550,640	21968,78	$2p_4 - 10d_4$	4550,649	P.
0	4550,057	21971,59	$2p_4 - 10d_1'$	4550,028	P.
2	4547,728	21982,84	$2p_9 - 5{,}5s_1''''$	4547,703	P.
1,5	4547,218	21985,31	$2p_9 - 5{,}5s_1'''$	4547,200	P.
0	4545,729	21992,51	$2p_5 - 9{,}5s_4$	4545,745	P.
4	4544,502	21998,45	$2p_4 - 7{,}5s_2$	4544,493	P.
10	4540,383	22018,40	$2p_9 - 7d_4'$	(4540,383)	P.
4	4539,168	22024,30	$2p_9 - 7d_3'$	4539,168	P.
8	4538,309	22028,46	$2p_9 - 7d_1'$	4538,304	P.
10	4537,764	22031,11	$2p_{10} - 4{,}5s_1''''$	4537,750	P.
8	4537,683	22031,51	$2p_{10} - 4{,}5s_1''$	4537,674	P.
7	4536,312	22038,16	$2p_{10} - 4{,}5s_1'$	4536,300	P.
0	4532,395	22057,21	$2p_5 - 10d_2$	4532,398	P.
3	4529,476	22071,42	$2p_2 - 7{,}5s_1'$	4529,442	P.
0	4527,973	22078,75	$2p_7 - 8d_5$	4527,967	P.
2	4527,725	22079,96	$2p_5 - 7{,}5s_3$	4527,714	P.
2	4526,685	22085,03	$2p_5 - 7{,}5s_2$ $2p_7 - 8d_3$	4526,714 4526,652	P.
4	4526,177	22087,50	$2p_7 - 8d_2$	4526,177	P.
5	4525,776	22089,47	$2p_7 - 8d_1''$	4525,772	P.

1) Dabei 4604,988, $2p_4 - 9d_4$.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
6	4517,742	22128,75	$2\,p_4 - 7{,}5\,s_1''''$	4517,744	P.
4	4516,936	22132,70	$2\,p_7 - 6{,}5\,s_3$	4516,924	P.
3	4515,411	22140,17	$2\,p_7 - 6{,}5\,s_2$	4515,409	P.
0,5	4515,022	22142,08	$2\,p_8 - 6{,}5\,s_1''''$	4515,031	P.
5	4514,891	22142,73	$2\,p_8 - 6{,}5\,s_1'''$	4514,882	P.
2,5	4511,509	22159,32	$2\,p_8 - 8{,}5\,s_5$	4511,482	P.
0	4510,854?	22162,54?	$2\,p_4 - 11\,d_1'$	4510,806	P.[1]
2	4510,170	22165,91	$2\,p_8 - 8{,}5\,s_4$	4510,150	P.
4	4500,200	22215,01	$2\,p_5 - 7{,}5\,s_1''$	4500,192	P.
1	4499,843	22216,76	$2\,p_5 - 7{,}5\,s_1'$ $2\,p_2 - 8{,}5\,s_2$	4499,813 4499,835	P.
0,5	4499,000	22220,93	$2\,p_2 - 8{,}5\,s_2$	4498,987	P.
0,5	4495,325	22239,10			P.
0	4494,083	22245,24			P.
4	4493,699	22247,14	$2\,p_8 - 7{,}5\,s_2$	4493,694	P.
1	4493,108	22250,07	$2\,p_6 - 9\,d_3$	4493,111	P.
2	4492,689	22252,15	$2\,p_6 - 9\,d_4$	4492,687	P.
3	4492,412	22253,52	$2\,p_6 - 9\,d_3$	4492,410	P.
1	4492,132	22254,90	$2\,p_6 - 9\,d_2$	4492,114	P.
4	4491,838	22256,36	$2\,p_6 - 9\,d_1'$	4491,836	P.
5,5	4491,771	22256,69	$2\,p_8 - 7{,}5\,s_4$	4491,773	P.
8	4488,093	22274,94	$2\,p_{10} - 5{,}5\,s_5$	4488,091	P.
7	4483,189	22299,29	$2\,p_{10} - 5{,}5\,s_4$	4483,192	P.
2	4480,823	22311,07	$2\,p_2 - 8{,}5\,s_1''''$	4480,823	P.
6	4475,646	22336,87	$2\,p_7 - 6{,}5\,s_1''$	4475,651	P.
1	4475,131	22339,45	$2\,p_7 - 6{,}5\,s_1'$	4475,130	P.
0	4472,246	22353,86	$2\,p_7 - 8{,}5\,s_5$	4472,274	P.
0	4471,942	22355,38			P.
1	4470,971	22360,23	$2\,p_7 - 8{,}5\,s_4$	4470,966	P.
0	4467,491	22377,65	$2\,p_8 - 8\,d_3$	4467,490	P.
5	4466,811	22381,06	$2\,p_8 - 8\,d_4$	4466,811	P.
0,5	4466,503	22382,60	$2\,p_8 - 8\,d_2$	4466,509	P.
1	4466,045	22384,90	$2\,p_8 - 8\,d_2$	4466,047	P.
4	4465,651	22386,87	$2\,p_8 - 8\,d_1''$	4465,653	P.
0,5	4462,856	22400,89	$2\,p_4 - 8{,}5\,s_2$	4462,867	P.
6	4460,174	22414,36	$2\,p_9 - 7{,}5\,s_5$	4460,177	P.
0	4456,380	22433,45	$2\,p_2 - 8{,}5\,s_1'$	4456,394	P.
2	4455,564	22437,55	$2\,p_8 - 6{,}5\,s_2$	4455,563	P.
1	4454,285	22444,00	$2\,p_6 - 9{,}5\,s_5$	4454,290	P.
0	4453,528	22447,81	$2\,p_7 - 9\,d_3$	4453,531	P.
0,5	4453,324	22448,84	$2\,p_6 - 9{,}5\,s_4$	4453,356	P.
1	4453,253	22449,20	$2\,p_7 - 9\,d_2$	4453,241	P.
2	4452,983	22450,56	$2\,p_7 - 9\,d_1''$	4452,990	P.
0	4446,538	22483,10	$2\,p_5 - 8{,}5\,s_3$	4446,528	P.
0	4445,671	22487,49	$2\,p_5 - 8{,}5\,s_2$	4445,699	P.
3	4444,978	22490,99	$2\,p_4 - 8{,}5\,s_1''''$	4444,974	P.[2]
0	4440,890	22511,70	$2\,p_6 - 10\,d_4$	4440,953	P.
0,5	4440,812	22512,09	$2\,p_6 - 10\,d_3$	4440,821	P.
2	4440,363	22514,38	$2\,p_6 - 10\,d_1'$	4440,357	P.
1	4435,094	22541,12	$2\,p_6 - 7{,}5\,s_2$	4435,089	P.

1) Zweifelhaft.
2) Zugleich $2\,p_2 - 9{,}5\,s_2$.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
5	4433,724	22548,07	$2p_9 - 8d_4'$	4433,725	P.
1,5	4433,398	22549,74	$2p_9 - 8d_3$	4433,395	P.
2,5	4432,526	22554,17	$2p_9 - 8d_1'$	4432,522	P.
0	4429,410	22570,04	$2p_2 - 9{,}5s_1''''$	4429,403	P.
2	4427 981	22577,32	$2p_5 - 8{,}5s_1''''$	4427,962	P.
3	4427,755	22578,47	$2p_5 - 8{,}5s_1'$	4427,709	P.
7	4425,416	22590,40	$2p_{10} - 6d_3$	4425,413	P.
8	4424,809	22593,50	$2p_{10} - 6d_2$	4424,805	P.
8	4422,518	22605,20	$2p_{10} - 6d_3$	4422,521	P.
4	4421,559	22610,11	$2p_{10} - 6d_2$	4421,554	P.
0	4420,558	22615,23	$2p_{10} - 6d_1''$	4420,585	P.
4	4416,817	22634,39	$2p_8 - 6{,}5s_1'''$	4416,813	P.
1	4415,141	22642,98	$2p_7 - 9{,}5s_2$	4415,149	P.
2	4413,561	22651,08	$2p_8 - 8{,}5s_3$	4413,560	P.
(0)	4413,247	22652,69	$2p_6 - 10{,}5s_3$	4413,249	P.
2,5	4412,285	22657,63	$2p_8 - 8{,}5s_4$	4412,284	P.
2,5	4409,620	22671,33	$2p_6 - 7{,}5s_1'''$	4409,611	P.
0,5	4405,582	22692,11	$2p_3 - 9{,}5s_1'$	4405,588	P.
0	4402,985	22705,50	$2p_8 - 11d_1'$	4402,999	P.
0	4402,580	22707,58	$2p_7 - 10d_2$	4402,556	P.
0,5	4402,374	22708,64	$2p_7 - 10d_1''$	4402,381	P.
1	4398,136	22730,53	$2p_7 - 7{,}5s_3$	4398,136	P.
0	4397,175	22735,49	$2p_7 - 7{,}5s_2$	4397,192	P.
0	4395,969	22741,70	$2p_8 - 9d_5$	4395,967	P.
4	4395,569	22743,80	$2p_8 - 9d_4$	4395,569	P.
0	4395,306	22745,17	$2p_8 - 9d_3$	4395,305	P.
0	4395,008	22746,70	$2p_8 - 9d_2$	4395,021	P.
2	4394,773	22747,91	$2p_8 - 9d_1''$	4394,776	P.
2	4394,370	22750,00	$2p_4 - 9{,}5s_1''''$	4394,368	P.
3	4381,219	22818,29	$2p_5 - 8{,}5s_3$	4381,221	P.
0,5	4377,754	22836,35	$2p_5 - 9{,}5s_1''''$	4377,743	P.
0	4375,339	22849,10	$2p_6 - 12d_2$?	4375,283	P.
0,5	4374,997	22850,74	$2p_6 - 12d_1'$ $2p_7 - 10{,}5s_4$	4375,013 4374,987	P.
3	4372,157	22865,59	$2p_7 - 7{,}5s_1''$	4372,163	P.
0,5	4371,796	22867,47	$2p_7 - 7{,}5s_1'$	4371,805	P.
0	4365,705	22899,38	$2p_7 - 11d_1''$	4365,708	P.
5	4363,520	22910,84	$2p_9 - 9d_4'$	4363,520	P.
0,5	4363,228	22912,34	$2p_9 - 9d_3$	4363,233	P.
3	4362,690	22915,20	$2p_9 - 9d_1'$	4362,692	P.
0,5	4358,816	22935,57	$2p_3 - 9{,}5s_3$	4358,807	P.
1	4357,918	22940,25	$2p_3 - 9{,}5s_4$	4357,914	P.
0,5	4357,298	22943,55	$2p_6 - 8{,}5s_2$	4357,294	P.
2	4346,036	23003,00	$2p_8 - 10d_4$	4346,035	P.
0	4345,762	23004,46	$2p_7 - 11{,}5s_5$	4345,764	P.
0,5	4345,479	23005,97	$2p_8 - 10d_1''$	4345,473	P.
0,5	4340,420	23032,77	$2p_8 - 7{,}5s_2$	4340,420	P.
0,5	4340,256	23033,65	$2p_6 - 8{,}5s_1''''$	4340,254	P.
0,5	4338,200	23044,57	$2p_7 - 12d_1''$	4338,199	P.
4	4336,221	23055,07	$2p_{10} - 5{,}5s_3$	4336,221	P.
5	4334,119	23066,26	$2p_{10} - 5{,}5s_2$	4334,124	P.
1,5	4327,265	23102,79	$2p_9 - 9{,}5s_5$	4326,264	P.
0,5	4321,492	23133,66	$2p_7 - 8{,}5s_3$	4321,492	P.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
0	4319,511	23144,27	$2\,p_3 - 10{,}5\,s_3$	4319,500	P.
(1)	4318,834	23147,89	$2\,p_3 - 10{,}5\,s_4$	4318,783	P.
2	4316,008	23163,05	$2\,p_3 - 7{,}5\,s_1'''$	4316,039	P.
3	4314,695	23170,10	$2\,p_3 - 10\,d_4'$	4314,695	P.
0	4314,110	23173,24	$2\,p_3 - 10\,d_1'$	4314,114	P.
0,5	4310,130	23194,63	$2\,p_3 - 11\,d_4$	4310,125	P.
5	4306,244	23215,57	$2\,p_{10} - 6{,}5\,s_4$	4306,241	P.
1	4303,955	23227,91	$2\,p_7 - 8{,}5\,s_1''''$	4303,955	P.
0	4303,695	23229,32	$2\,p_7 - 8{,}5\,s_1'$	4303,715	P.
3	4303,248	23231,74	$2\,p_{10} - 6{,}5\,s_3$	4303,257	P.
0,5	4291,976	23292,75	$2\,p_3 - 9{,}5\,s_1''''$	4291,993	P.
0,5	4289,799	23304,57	$2\,p_3 - 11{,}5\,s_4$	(4289,799)	P.
1	4288,541	23311,40	$2\,p_3 - 10{,}5\,s_5$	4288,521	P.
1,5	4283,242	23340,24	$2\,p_3 - 12\,d_3$	4283,237	P.
2	4279,279	23361,85	$2\,p_3 - 11\,d_4'$	4279,279	P.
1	4278,850	23364,19	$2\,p_3 - 11\,d_1'$	4278,842	P.
5	4275,560	23382,18	$2\,p_{10} - 5{,}5\,s_1''''$	4275,555	P.
0	4275,167	23384,33	$2\,p_{10} - 5{,}5\,s_1''$	4275,159	P.
4	4274,656	23387,13	$2\,p_{10} - 5{,}5\,s_1'$	4274,662	P.
4	4270,227	23411,38	$2\,p_{10} - 7\,d_3$	4270,225	P.
5	4269,724	23414,14	$2\,p_{10} - 7\,d_3$	4269,726	P.
5	4268,009	23423,54	$2\,p_{10} - 7\,d_3$	4268,010	P.
1	4267,724	23425,11	$2\,p_{10} - 7\,d_2$	4267,729	P.
0	4267,286	23427,52	$2\,p_{10} - 7\,d_1''$	4267,291	P.
0,5	4262,479	23453,93	$2\,p_3 - 13\,d_4$	4262,477	P.
0	4259,739	23469,01	$2\,p_3 - 11{,}5\,s_5$	4259,740	P.
0,5	4256,498	23486,89	$2\,p_7 - 9{,}5\,s_1''''$	4256,491	P.
0,5	4252,775	23507,45	$2\,p_3 - 12\,d_4'$	4252,774	P.
0,5	4252,418	23509,42	$2\,p_3 - 12\,d_1'$	4252,406	P.
0,5	4249,538	23525,35	$2\,p_3 - 8{,}5\,s_1''''$	4249,548	P.
0	4232,323	23621,04	$2\,p_3 - 13\,d_4'$	4232,323	P.
0	4231,454	23625,90	$2\,p_3 - 13\,d_1'$	4231,446	P.
0,5	4203,270	23784,30	$2\,p_3 - 9{,}5\,s_1'''$	4203,266	P.
5	4198,099	23813,60	$2\,p_{10} - 7{,}5\,s_5$	4198,101	P.
2	4196,415	23823,16	$2\,p_{10} - 7{,}5\,s_4$	4196,424	P.
3,5	4175,488	23942,56	$2\,p_{10} - 8\,d_5$	4175,485	P.
4,5	4175,223	23944,08	$2\,p_{10} - 8\,d_5$	4175,223	P.
0	4174,653	23947,34			P.
5	4174,369	23948,98	$2\,p_{10} - 8\,d_3$	4174,366	P.
0,5	4173,966	23951,29	$2\,p_{10} - 8\,d_2$	4173,962	P.
3	4166,091	23996,56	$2\,p_{10} - 6{,}5\,s_3$	4166,0 2	P.
4	4164,802	24003,99	$2\,p_{10} - 6{,}5\,s_3$	4164,802	P.
5	4131,054	24200,08	$2\,p_{10} - 6{,}5\,s_1''''$	4131,049	P.
2,5	4130,512	24203,26	$2\,p_{10} - 6{,}5\,s_1'$	4130,512	P.
3	4128,072	24217,56	$2\,p_{10} - 8{,}5\,s_5$	4128,079	P.
0,5	4126,941	24224,20	$2\,p_{10} - 8{,}5\,s_4$	4126,964	P.
1,5	4112,865	24307,10	$2\,p_{10} - 9\,d_5$	4112,864	P.
2,5	4112,694	24308,11	$2\,p_{10} - 9\,d_5$	4112,692	P.
2	4112,100	24311,63	$2\,p_{10} - 9\,d_3$	4112,105	P.
0	4111,882	24313,13	$2\,p_{10} - 9\,d_2$	4111,857	P.
4	4080,148	24502,01	$2\,p_{10} - 9{,}5\,s_3$	4080,142	P.
0,5	4079,359	24506,75	$2\,p_{10} - 9{,}5\,s_4$	4079,360	P.
1	4069,389	24566,79	$2\,p_{10} - 10\,d_5$	4069,388	P.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
3	4069,243	24567,67	$2\,p_{10} - 10\,d_5$	4069,242	P.
0,5	4069,049	24568,84			P.
3	4068,835	24570,07	$2\,p_{10} - 10\,d_3$	4068,839	P.
2	4064,829	24594,35	$2\,p_{10} - 7{,}5\,s_2$	4064,833	P.
4	4064,036	24599,15	$2\,p_{10} - 7{,}5\,s_3$	4064,027	P.
0,5	4045,662	24710,86	$2\,p_{10} - 10{,}5\,s_5$	4045,681	P.
0	4045,009	24714,85	$2\,p_{10} - 10{,}5\,s_4$	4045,051	P.
4	4042,642	24729,33	$2\,p_{10} - 7{,}5\,s_1''''$	4042,645	P.
1,5	4042,327	24731,25	$2\,p_{10} - 7{,}5\,s_1'$	4042,331	P.
1	4037,696	24759,62	$2\,p_{10} - 11\,d_4$	4037,695	P.
2	4037,615	24760,11	$2\,p_{10} - 11\,d_3$	4037,615	P.
1	4037,262	24762,27	$2\,p_{10} - 11\,d_2$	4037,261	P.
0,5	4020,015	24868,51	$2\,p_{10} - 11{,}5\,s_5$	4020,057	P.
0,5	4013,995	24905,81	$2\,p_{10} - 12\,d_5$	4013,996	P.
0	4013,752	24907,32	$2\,p_{10} - 12\,d_3$	4013,752	P.
0	3999,263	24997,55	$2\,p_{10} - 8{,}5\,s_2$	3999,278	P.
0	3998,594	25001,73	$2\,p_{10} - 8{,}5\,s_3$	3998,609	P.
0	3995,721	25019,71	$2\,p_{10} - 13\,d_4$	3995,721	P.
0	3995,298	25022,35	$2\,p_{10} - 13\,d_3$	3995,298	P.
2	3984,253	25091,72	$2\,p_{10} - 8{,}5\,s_1''''$	3984,253	P.
0,5	3984,065	25092,90	$2\,p_{10} - 8{,}5\,s_1'$	3984,047	P.
0,5	3943,540	25350,77	$2\,p_{10} - 9{,}5\,s_1''''$	3943,546	P.
0,5	3899,723	25635,60	$1{,}5\,s_2 - 3\,d_5$	3899,739	P.
1	3889,427	25703,43	$1{,}5\,s_2 - 3\,d_4$	3889,434	P.
0	3887,134	25718,61	$1{,}5\,s_2 - 3\,d_3$	3887,156	P.
0,5	3882,698	25747,89	$1{,}5\,s_2 - 3\,d_2$	3882,716	P.
1	3769,654	26520,11	$1{,}5\,s_2 - 2{,}5\,s_1''''$	3769,682	P.
2	3769,449	26521,55	$1{,}5\,s_2 - 2{,}5\,s_1'''$	3769,461	P.
1	3768,047	26531,42	$1{,}5\,s_2 - 2{,}5\,s_1''$	3768,074	P.[1]
1	3765,819	26547,12	$1{,}5\,s_2 - 2{,}5\,s_1'$	3765,845	P.[1]
6	3754,206	26629,24	$1{,}5\,s_2 - 3\,p_{10}$	3754,205	P.
1,5	3713,084	26924,14			P.[1]
7	3701,222	27010,44	$1{,}5\,s_2 - 3\,p_9$	3701,221	P.
1,5	3694,197	27061,79			P.[1]
7	3685,728	27123,97	$1{,}5\,s_2 - 3\,p_7$	3685,731	P.
7	3682,232	27149,72	$1{,}5\,s_2 - 3\,p_6$	3682,236	P.
1	3664,112	27283,99			P.[1]
7	3633,657	27512,66	$1{,}5\,s_2 - 3\,p_5$	3633,654	P.
6	3609,170	27699,31	$1{,}5\,s_3 - 3\,p_{10}$	3609,169	P.
7	3600,161	27768,62	$1{,}5\,s_2 - 3\,p_5$	3600,164	P.
9	3593,631	27819,09	$1{,}5\,s_2 - 3\,p_2$	3593,637	P.
10	3593,519	27819,95	$1{,}5\,s_2 - 3\,p_4$	3593,523	P.
3	3562,942	28058,69	$1{,}5\,s_4 - 3\,p_{10}$	3562,945	P.
20	3520,467	28397,22	$1{,}5\,s_2 - 3\,p_1$	3520,467	P.
8	3515,186	28439,87	$1{,}5\,s_4 - 3\,p_8$	3515,187	P.
6	3510,714	28476,10	$1{,}5\,s_5 - 3\,p_{10}$	3510,711	P.
8	3501,211	28553,38	$1{,}5\,s_4 - 3\,p_7$	3501,211	P.
7	3498,059	28579,12	$1{,}5\,s_4 - 3\,p_6$	3498,058	P.
10	3472,568	28788,90	$1{,}5\,s_5 - 3\,p_9$	3472,568	P.
8	3466,575	28838,67	$1{,}5\,s_3 - 3\,p_5$	3466,573	P.
7	3464,334	28857,33	$1{,}5\,s_5 - 3\,p_8$	3464,335	P.

1) Bei niederem Drucke.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
7	3460,523	28889,10	$1,5\,s_3 - 3\,p_2$	3460,520	P.
7	3454,193	28942,04	$1,5\,s_4 - 3\,p_3$	3454,190	P.
6	3450,761	28970,83	$1,5\,s_5 - 3\,p_7$	3450,761	P.
8	3447,701	28996,54	$1,5\,s_5 - 3\,p_6$	3447,697	P.
6	3423,910	29198,02	$1,5\,s_4 - 3\,p_5$	3423,908	P.
6	3418,002	29248,48	$1,5\,s_4 - 3\,p_2$	3418,003	P.
10	3417,901	29249,34	$1,5\,s_4 - 3\,p_4$	3417,901	P.
6	3375,645	29615,48	$1,5\,s_3 - 3\,p_5$	3375,644	P.
15	3369,905	29665,92	$1,5\,s_3 - 3\,p_3$	3369,905	P.
10	3369,806	29666,79	$1,5\,s_3 - 3\,p_4$	3369,806	P.
4	3351,744	29826,65	$1,5\,s_4 - 3\,p_1$	3351,744	P.
2,5	3207,906	31164,00	vgl. S. 453		P.
0	3206,199	31180,59			P.
6	3167,568	31560,84	$1,5\,s_2 - 4\,p_{10}$	3167,572	P.
6	3153,404	31702,61	$1,5\,s_2 - 4\,p_8$	3153,405	P.
7	3148,603	31750,93	$1,5\,s_2 - 4\,p_7$	3148,604	P.
4	3147,701	31760,04	$1,5\,s_2 - 4\,p_6$	3147,703	P.
8	3126,190	31978,57	$1,5\,s_2 - 4\,p_3$	3126,188	P.
2	3101,407	32234,09	vgl. S. 453		P.
7	3079,175	32466,82	$1,5\,s_3 - 4\,p_5$	3079,173	P.
7	3078,875	32469,98	$1,5\,s_2 - 4\,p_2$	3078,875	P.
8	3076,971	32490,07	$1,5\,s_2 - 4\,p_4$	3076,970	P.
4	3067,214	32593,42	vgl. S. 453		P.
1,5	3065,668	32609,86			P.
8	3063,695	32630,89	$1,5\,s_3 - 4\,p_{10}$	3063,693	P.
9	3057,388	32698,16	$1,5\,s_2 - 4\,p_1$	3057,376	P.
2	3045,949	32820,96	$1,5\,s_3 - 4\,p_7$	3045,945	P.
6	3030,313	32990,30	$1,5\,s_4 - 4\,p_{10}$	3030,319	P.
1	3028,424	33010,88	vgl. S. 453		P.
3	3026,913	33027,37			P.
6	3017,348	33132,04	$1,5\,s_4 - 4\,p_8$	3017,350	P.
6	3012,955	33180,35	$1,5\,s_4 - 4\,p_7$	3012,955	P.
6	3012,129	33189,45	$1,5\,s_4 - 4\,p_6$	3012,129	P.
0,5	2994,410	33385,84			P.
1	2994,250	33387,63			P.
8	2992,438	33407,84	$1,5\,s_3 - 4\,p_{10}$	2992,452	P.
8	2992,420	33408,04	$1,5\,s_4 - 4\,p_3$	2992,423	P.
9	2982,663	33517,32	$1,5\,s_3 - 4\,p_9$	2982,663	P.
6	2980,922	33536,90	$1,5\,s_3 - 4\,p_5$	2980,921	P.
5,5	2980,642	33540,06	$1,5\,s_3 - 4\,p_2$	2980,642	P.
6	2979,806	33549,46	$1,5\,s_5 - 4\,p_8$	2979,805	P.
5	2975,518	33597,80	$1,5\,s_5 - 4\,p_7$	2975,519	P.
9	2974,714	33606,89	$1,5\,s_5 - 4\,p_6$	2974,713	P.
1	2974,527	33609,00			P.
2	2957,293	33804,85			P.
0,5	2957,148	33806,50			P.
1,5	2952,527	33859,42	$1,5\,s_2 - 5\,p_{10}$	2952,525	P.
3	2949,316	33896,28	$1,5\,s_4 - 4\,p_5$	2949,317	P.
2,5	2949,043	33899,41	$1,5\,s_4 - 4\,p_2$	2949,043	P.
8	2947,297	33919,50	$1,5\,s_4 - 4\,p_1$	2947,296	P.
0,5	2946,732	33926,00	$1,5\,s_2 - 5\,p_8$	2946,730	P.
0,5	2944,575	33950,85	$1,5\,s_2 - 5\,p_7$	2944,581	P.
7	2932,721	34088,07	$1,5\,s_2 - 5\,p_2$	2932,721	P.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
3	2929,312	34127,73	$1{,}5\ s_4 - 4\ p_1$	2929,314	P.
0,5	2913,417	34313,92	$1{,}5\ s_5 - 4\ p_5$	2913,434	P.
8	2913,168	34316,86	$1{,}5\ s_5 - 4\ p_2$	2913,168	P.
4	2911,461	34336,98	$1{,}5\ s_5 - 4\ p_4$	2911,462	P.
0,5	2881,852	34689,75	$1{,}5\ s_2 - 5\ p_2$	2881,852	P.
0 *uv*	2881,279	34696,64	$1{,}5\ s_3 - 5\ p_5$	2881,310	P.
1	2880,290	34708,57	$1{,}5\ s_3 - 5\ p_4$	2880,289	P.
5	2872,663	34800,71	$1{,}5\ s_3 - 5\ p_1$	2872,664	P.
2	2862,070	34929,52	$1{,}5\ s_3 - 5\ p_{10}$	2862,070	P.
0	2854,606	35020,84	$1{,}5\ s_3 - 5\ p_7$	2854,604	P.
0,5	2846,490	35120,68	$1{,}5\ s_2 - 6\ p_{10}$	2846,493	P.
0	2843,7[1])	35155,0[1])	$1{,}5\ s_2 - 6\ p_8$	2843,706	P.
3	2842,57	35169,1	$1{,}5\ s_3 - 6\ p_7$	2842,547	P.
3	2835,233	35260,12	$1{,}5\ s_2 - 6\ p_5$	2835,233	P.
2	2832,921	35288,89	$1{,}5\ s_4 - 5\ p_{10}$	2832,923	P.
1	2827,584	35355,49	$1{,}5\ s_4 - 5\ p_8$	2827,587	P.
2	2825,609	35380,21	$1{,}5\ s_4 - 5\ p_7$	2825,609	P.
2,5	2825,259	35384,59	$1{,}5\ s_4 - 5\ p_6$	2825,260	P.
3,5	2814,685	35517,51	$1{,}5\ s_4 - 5\ p_3$	2814,686	P.
0,5	2790,80	35706,3	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_{10}$	2799,801	P.
2	2795,963	35755,33	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_9$	2795,963	P.
0	2795,613	35759,81	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_2$	2795,612	P.
5	2795,101	35766,35	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_5$	2795,101	P.
1,5	2794,592	35772,86	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_8$	2794,589	P.
1	2792,660	35797,62	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_7$	2792,657	P.
3,5	2792,318	35802,00	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_6$	2792,316	P.
0,5	2782,07	35933,9	$1{,}5\ s_2 - 6\ p_5$	2782,096	P.
1	2781,68	35939,3	$1{,}5\ s_2 - 6\ p_4$	2781,647	P.
1	2781,42	35942,3			P.
1,5	2775,049	36024,78	$1{,}5\ s_2 - 6\ p_1$	2775,049	P.
0,5	2767,77	36119,5	$1{,}5\ s_4 - 5\ p_2$	2767,796	P.
1	2767,28	36125,9	$1{,}5\ s_4 - 5\ p_5$	2767,296	P.
1	2766,353	36138,01	$1{,}5\ s_4 - 5\ p_4$	2766,353	P.
1	2762,324	36190,72	$1{,}5\ s_3 - 6\ p_{10}$	2762,324	P.
0,5	2759,323	36230,09	$1{,}5\ s_4 - 5\ p_1$	2759,321	P.
1	2758,64	36239,0	$1{,}5\ s_3 - 6\ p_7$	2758,608	P.
3	2755,82	36276,2			P.
3	2743,53	36438,6	$1{,}5\ s_2 - 8\ p_3$	2743,53	P.
1,5	2736,177	36536,53	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_2$	2736,170	P.
2	2735,69	36543,0	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_5$	2735,682	P.
1	2735,168	36550,03	$1{,}5\ s_4 - 6\ p_{10}$	2735,164	P.
0,5	2734,755	36555,54	$1{,}5\ s_5 - 5\ p_4$	2734,760	P.
0	2732,61	36584,3	$1{,}5\ s_4 - 6\ p_8$	2732,597	P.
1	2731,528	36598,72	$1{,}5\ s_4 - 6\ p_7$	2731,521	P.
1	2731,358	36601,00	$1{,}5\ s_4 - 6\ p_6$	2731,357	P.
1	2724,765	36689,56	$1{,}5\ s_4 - 6\ p_3$	2724,766	P.
1	2713,76	36838,4			P.
1	2706,74	36933,9			P.

1) Mit Quarzspektrograph gemessen, λ mit 1 oder 2 Dezimalen, ν mit einer Dezimalen angegeben. Die Intensitäten angegeben, wie im Prismenspektrum gefunden.

Int.	beobachtet λ_{Luft}	beobachtet ν	Kombination	λ_{Luft} ber.	Beob.
0,5	2704,32	36967,0	$1{,}5\,s_3 - 6\,p_{10}$	2704,276	P.
1	2702,554	36991,07	$1{,}5\,s_3 - 6\,p_9$	2702,554	P.
0,5	2701,653	37003,40	$1{,}5\,s_3 - 6\,p_8$	2701,639	P.
0,5	2701,766	37001,86	$1{,}5\,s_3 - 6\,p_8$	2701,766	P.
0,5	2700,940	37014,28			P.
0,5	2700,681	37016,73	$1{,}5\,s_3 - 6\,p_7$	2700,714	P.
2	2700,555	37018,46	$1{,}5\,s_3 - 6\,p_6$	2700,555	P.
3	2686,75	37208,6			P.
1	2685,58	37224,9			P.
1	2685,33	37228,3			P.
0	2680,685	37292,83	$1{,}5\,s_2 - 8\,p_1$	2680,685	P.
0,5	2679,19	37313,7	$1{,}5\,s_4 - 7\,p_{10}$	2679,19	P.
0,5	2677,87	37332,0	$1{,}5\,s_4 - 7\,p_9$	2677,85	P.
3	2677,36	37339,1			P.
0	2677,020	37343,89	$1{,}5\,s_4 - 7\,p_7$	2677,02	P.
8	2675,64	37363,22	$1{,}5\,s_4 - 6\,p_3$	2675,65	P.
8	2675,24	37368,75	$1{,}5\,s_4 - 6\,p_4$	2675,239	P.
1,5	2669,36	37451,1			P.
1	2669,13	37454,3	$\left\{\begin{matrix}1{,}5\,s_4 - 7\,p_3\\ 1{,}5\,s_4 - 6\,p_1\end{matrix}\right.$	2669,134	P.
0,5	2667,84	37472,4			P.
2	2663,28	37536,5			P.
3	2657,52	37617,8	$1{,}5\,s_2 - 9\,p_1$	2657,52	P.
6	2651,01	37710,3			P.
4	2648,56	37745,2	$1{,}5\,s_5 - 7\,p_9$	2648,56	P.
3	2648,21	37750,18	$1{,}5\,s_5 - 7\,p_8$	2648,23	P.
2	2647,76	37756,6	$1{,}5\,s_5 - 7\,p_6$	2647,87	P.
8	2647,42	37731,39	$1{,}5\,s_5 - 7\,p_{7\,(a)}$	2647,422	P.
3	2646,19	37778,9	$1{,}5\,s_5 - 6\,p_3$	2646,08	P.
5	2645,70	37786,01	$1{,}5\,s_5 - 6\,p_4$	2645,68	P.
6	2645,51	37788,7			P.
1,5	2644,16	37807,9	$1{,}5\,s_2 - 10\,p_1$	2644,16	P.
2	2642,47	37832,18	$1{,}5\,s_4 - 8\,p_7$	2642,47	P.
3	2639,97	37868,0	$1{,}5\,s_4 - 8\,p_3$	2639,96	P.
4	2635,98	37925,3	$1{,}5\,s_2 - 11\,p_1$	2635,98	P.
3	2622,90	38114,4	$1{,}5\,s_4 - 7\,p_5$	2622,90	P.
2	2621,10	38140,5			P.
1	2619,77	38159,8			P.
1,5	2619,02	38170,8			P.
4	2616,62	38205,8	$1{,}5\,s_4 - 7\,p_1$	2616,62	P.
1,5	2614,26	38240,4	$1{,}5\,s_5 - 8\,p_9$	2614,26	P.
0,5	2613,94	38245,0	$1{,}5\,s_5 - 8\,p_8$	2613,94	P.
			$1{,}5\,s_5 - 8\,p_6$	2613,82	P.
4,5	2613,59	38250,2	$1{,}5\,s_5 - 8\,p_{7\,(a)}$	2613,63	P.
6	2595,21	38521,0			P.
0,5	2594,56	38530,7	$1{,}5\,s_5 - 7\,p_5$	2594,48	P.
1	2591,15	38581,4	$1{,}5\,s_5 - 9\,p_9$	2591,15	P.
2,5	2590,67	38588,64	$1{,}5\,s_5 - 9\,p_{7\,(a)}$	2590,68	P.
0,5	2589,48	38606,2	$1{,}5\,s_4 - 8\,p_5$	2589,48	P.
2	2574,55	38830,1	$1{,}5\,s_5 - 10\,p_{7\,(a)}$	2574,55	P.
2	2561,79	39023,6	$1{,}5\,s_5 - 8\,p_5$	2561,79	P.
0	2553,77	39146,0			P.
0	2550,55	39195,5			P.

Die Serien des Neonspektrums. I. Nebenserien: $2p_n - m\,d_n$.

$2p_n - m\,d_1'$.

	$2p_4 - m\,d_1'$	$2p_5 - m\,d_1'$	$2p_8 - m\,d_1'$	$2p_9 - m\,d_1'$	Mittel $m\,d_1'$	beob.—ber. $\Delta(m\,d_1')$
$2p_n - 3\,d_1'$	(2) 10842,68	(4) 11385,57	(1) 11877,11	(7) 12044,39	12228,051	$3\,d_1'$ +0,411
$3\,d_1'$	12228,262	12228,016	12228,119	12228,021		
$2p_n - 4\,d_1'$	(5) 16190,15	(10) 16732,77	(7) 17224,42	(10) 17391,66	6880,789	$4\,d_1'$ −0,085
$4\,d_1'$	6880,792	6880,816	6880,809	6880,751		
$2p_n - 5\,d_1'$	(8) 18668,33	(8) 19211,02	(1) 19702,58 ?	(9) 19869,89	4402,564	$5\,d_1'$ +0,015
$5\,d_1'$	4402,612	4402,566	4402,649 ?	4402,521		
$2p_n - 6\,d_1'$	(7 *ur*) 20014,74	(6) 20557,38		(10) 21216,21	3056,202	$6\,d_1'$ −0,036
$6\,d_1'$	3056,202	3056,206		3056,201		
$2p_n - 7\,d_1'$	(5) 20827,02	(8) 21369,71		(8) 22028,46	2243,920	$7\,d_1'$ −0,753
$7\,d_1'$	2243,922	2243,876		2243,951		
$2p_n - 8\,d_1'$	(2,5) 21352,74	(4,5) 21895,37	Weitere Glieder den stärkeren Linien $2p_8 - m\,d_1''$ zu nahe.	(2,5) 22554,17	1718,220	$8\,d_1'$ +0,115
$8\,d_1'$	1718,220	1718,216		1718,241		
$2p_n - 9\,d_1'$	(2) 21713,72	(4) 22256,36		(3) 22915,20	1357,220	$9\,d_1'$ +0,018
$9\,d_1'$	1357,220	1357,226		1357,211		
$2p_n - 10\,d_1'$	(0) 21971,59 ?	(2) 22514,38		(0) 23173,24	1099,190	$10\,d_1'$ +0,070
$10\,d_1'$	1099,352 ?	1099,206		1099,171		
$2p_n - 11\,d_1'$	(0) 22162,54	(0) 22705,50		(1) 23364,19	908,168	$11\,d_1'$ −0,045
$11\,d_1'$	908,402	908,086		908,221		
$2p_n - 12\,d_1'$		(0,5) 22850,74		(0,5) 23509,42	762,926	$12\,d_1'$ −0,119
$12\,d_1'$		762,846		762,991		
$2p_n - 13\,d_1'$				(0) 23625,90	646,478	$13\,d_1'$ −3,612
$13\,d_1'$				646,511		

$(m\,d_1') = N / [m + d_1' + \delta_1'(m\,d_1')]^2$. $\quad d_1' = -0{,}010387 \quad \delta_1' = 4{,}545 \times 10^{-7}$

$2\,p_n - m\,d_1''$.

	$2\,p_4 - m\,d_1''$	$2\,p_5 - m\,d_1''$	$2\,p_7 - m\,d_1''$	$2\,p_8 - m$
$2\,p_n - 3\,d_1''$	(0) 10841,25	(2) 10927,49	(5) 11578,04	(7) 11875,
$3\,d_1''$	12229,692	12229,852	12229,807	12229,
$2\,p_n - 4\,d_1''$	(4) 16189,09	(6) 16275,48	(6) 16925,99	(10) 17223,
$4\,d_1''$	6881,852	6881,862	6881,862	6881,
$2\,p_n - 5\,d_1''$	(8) 18667,54	[1]	(7) 19404,69	(5) 19701,
$5\,d_1''$	4403,402		4403,162	4403,
$2\,p_n - 6\,d_1''$		(6) 20100,80	(8) 20751,23	(8) 21048,
$6\,d_1''$		3056,542	3056,622	3056,
$2\,p_n - 7\,d_1''$		(8) 20913,16	(5) 21563,73	(6) 21861,
$7\,d_1''$		2244,182	2244,122	2244,
$2\,p_n - 8\,d_1''$	Weitere	(3,5) 21438,99	(5) 22089,47	(4) 22386,
$8\,d_1''$	Glieder den	1718,352	1718,382	1718,
$2\,p_n - 9\,d_1''$	stärkeren	(1,5) 21799,98	(2) 22450,56	(2) 22747,
$9\,d_1''$	Linien	1357,362	1357,292	1357,
$2\,p_n - 10\,d_1''$	$2\,p_4 - m\,d_1'$		(0,5) 22708,64	(0,5) 23005,
$10\,d_1''$	zu nahe.		1099,212	1099,
$2\,p_n - 11\,d_1''$			(0) 22899,38	
$11\,d_1''$			908,472	
$2\,p_n - 12\,d_1''$			(0,5) 23044,57	
$12\,d_1''$			763,282	

$$(m\,d_1'') = N/[m + d_1'' + \delta_1''\,(m\,d_1'')]^2.$$

1) 18754,210 verdeckt durch die stärkere Linie $2\,p_{10} - 4\,d_2$ 18753,72.

$2\,p_n - m\,d_2$.

	$2\,p_1 - m\,d_2$	$2\,p_2 - m\,d_2$	$2\,p_3 - m\,d_2$	$2\,p_4 - m\,d_2$	$2\,p_5 - m$
$2\,p_n - 3\,d_2$					(2) 10864,
$3\,d_2$					12292,
$2\,p_n - 4\,d_2$	(1,5) 14056,4	(0,5) 15988,59	(6) 16109,532	(1) 16168,46	(6) 16254,
$4\,d_2$	6902,3	6902,401	6902,483	6902,482	6902,
$2\,p_n - 5\,d_2$	(2) 16546,20	(1,5) 18478,75	(6) 18599,56	(2,5) 18658,42	(6) 18744,
$5\,d_2$	4412,518	4412,251	4412,455	4412,522	4412,
$2\,p_n - 6\,d_2$	(1,5) 17897,23	(0) 19829,46	(4) 19950,51	(0,5) 20009,59	(4) 20095,
$6\,d_2$	3061,488	3061,541	3061,505	3061,352	3061,
$2\,p_n - 7\,d_2$	(0) 18711,92 ?[1]	(1,5) 20644,44	(4) 20765,48	(0) 20824,26	(3) 20910,
$7\,d_2$	2246,798 ?	2246,561	2246,535	2246,682	2246,
$2\,p_n - 8\,d_2$		(1) 21170,87	(1) 21291,65		(2,5) 21437,
$8\,d_2$		1720,131	1720,365		1720,
$2\,p_n - 9\,d_2$			(1) 21653,44		(0,5) 21798,
$9\,d_2$			1358,875		1358,
$2\,p_n - 10\,d_2$			(0) 21911,92		(0) 22057,
$10\,d_2$			1100,095		1100,

$$(m\,d_2) = N/[m + d_2 + \delta_2\,(m\,d_2)]^2.$$

1) Messung gestört durch starke Linie 5343,295.
2) Zugleich die stärkere $2\,p_5 - 5{,}5\,s_2$. $\nu = 18709{,}84$.

$2\,p_n - m\,d_1''$.

$2\,p_9 - m\,d_1''$	$2\,p_{10} - m\,d_1''$	Mittel $m\,d_1''$		beob.–ber. $\Delta(m\,d_1'')$
(1) 12042,61				
12229,801		12229,816	$3\,d_1''$	−0,074
(7) 17390,56	(0,5) 18789,81			
6881,851	6881,844	6881,853	$4\,d_1''$	−0,031
(0,5) 19869,32	(1) 21268,53			
4403,091	4403,124	4403,132	$5\,d_1''$	+0,058
	(0) 22615,23			
	3056,424	3056,560	$6\,d_1''$	+0,013
	(00) 23427,52			
Weitere	2244,134	2244,170	$7\,d_1''$	−0,700
Glieder den		1718,368	$8\,d_1''$	+0,130
stärkeren		1357,326	$9\,d_1''$	+0,031
Linien		1099,246	$10\,d_1''$	+0,057
$2p_9 - m\,d_1'$		908,489	$11\,d_1''$	+0,223
zu nahe.		763,290	$12\,d_1''$	+0,205

$d_1'' = -0{,}010701$. $\delta_1'' = 4{,}577 \times 10^{-7}$.

$2\,p_n - m\,d_2$.

$2\,p_6 - m\,d_2$	$2\,p_7 - m\,d_2$	$2\,p_8 - m\,d_2$	$2\,p_{10} - m\,d_2$	Mittel $m\,d_2$	beob.–ber. $\Delta(m\,d_2)$
(0) 11320,90	(3) 11515,01	(3) 11812,30	(4) 13378,85		
12292,686	12292,842	12292,929	12292,804	12292,853	$3\,d_2$ −0,002
(2) 16711,06	(9) 16905,37	(8) 17202,73	(7) 18769,16		
6902,526	6902,482	6902,499	6902,494	6902,485	$4\,d_2$ −0,317
(1) 19201,17	(6) 19395,41	(5) 19692,81	(7) 21259,22		
4412,416	4412,442	4412,419	4412,434	4412,438	$5\,d_2$ −0,001
(3) 20551,99[1])	(7) 20746,31	(3) 21043,71	(4) 22610,11		
3061,596	3061,542	3061,519	3061,544	3061,514	$6\,d_2$ −0,028
,5) 21367,01	(5) 21561,35	(4) 21858,70	(1) 23425,11		
2246,576	2246,502	2246,529	2246,544	2246,577	$7\,d_2$ −1,277
(0) 21893,48 ?	(4) 22087,50	(1) 22384,90	(0,5) 23951,29		
1720,106	1720,352	1720,329	1720,346	1720,345	$8\,d_2$ +0,179
(1) 22254,90	(1) 22449,0	(0) 22746,70	(0) 24313,13		
1358,686	1358,652	1358,529	1358,524	1358,594	$9\,d_2$ −0,022
	(0) 22707,58				
	1100,272			1100,153	$10\,d_2$ +0,021

$d_2 = -0{,}0146575$. $\delta_2 = 1{,}5240 \times 10^{-7}$.

	$2p_2 - md_3$	$2p_4 - md_3$	$2p_5 - md_3$	$2p_6 - md_3$	$2p_7$
				$2p_n - md_3$.	
$2p_n - 3d_3$				(3) 11291,28	(1) 1
$3d_3$				12322,328	1
$2p_n - 4d_3$	(6) 15973,09	(5) 16153,03	(4) 16239,44	(8) 16695,63	(2) 1
$4d_3$	6917,911	6917,912	6917,902	6917,956	
$2p_n - 5d_3$	(9) 18470,08	(5) 18650,06	(2,5) 18736,44	(7) 19192,69	(6) 1
$5d_3$	4420,921	4420,882	4420,902	4420,896	
$2p_n - 6d_3$	(3) 19824,52	(2) 20004,50	(1,5) 20091,01	(6) 20547,13	(5) 2
$6d_3$	3066,464	3066,442	3066,332	3066,456	
$2p_n - 7d_3$	(4) 20642,85	(0,5) 20822,85	(0,5) 20909,24	(7) 21365,52	(4) 2
$7d_3$	2248,151	2248,092	2248,102	2248,066	
$2p_n - 8d_3$	(2) 21168,34	(0,5) 21348,26	(0,5) 21434,78	(3,5) 21890,90	(2) 2
$8d_3$	1722,661	1722,682	1722,562	1722,698	
$2p_n - 9d_3$	(1) 21530,93	(0) 21710,83	(0) 21797,39?	(3) 22253,52	(0) 2
$9d_3$	1360,071	1360,112	1359,852?	1360,066	
$2p_n - 10d_3$				(0,5) 22512,09	
$10d_3$				1101,498	
$2p_n - 11d_3$					
$11d_3$					
$2p_n - 12d_3$					
$12d_3$					
$2p_n - 13d_3$					
$13d_3$					

$$(m\,d_3) = N\,/\,]m + d_3 + \delta_3\,(m\,d_3)]^2.$$

1) Zugleich $2p_3 - 7{,}5\,s_2$ 22084,89.

	$2p_4 - md_4$	$2p_6 - md_4$	$2p_7 - md_4$	$2p_8 - md_4$	$2p$
				$2p_n - md_4$.	
$2p_n - 3d_4$	(0) 10733,59	(3) 11276,30	—	(7) 11767,90	(1)
$3d_4$	12337,352	12337,286		12337,32	
$2p_n - 4d_4$	(4) 16142,59	(7) 16685,21	(4) 16879,49	(10) 17176,85	(1)
$4d_4$	6928,352	6928,376	6928,362	6928,37	
$2p_n - 5d_4$	(4) 18643,71	(6) 19186,42	(0,5) 19380,75	(8) 19678,10	(1)
$5d_4$	4427,232	4427,166	4427,102	4427,12	
$2p_n - 6d_4$	(1,5) 20000,42	(5,5) 20543,02		(10) 21034,68	(3)
$6d_4$	3070,522	3070,566		3070,54	
$2p_n - 7d_4$	(1,5) 20817,27	(6) 21359,88		(8) 21851,50	
$7d_4$	2253,672	2253,706		2253,72	
$2p_n - 8d_4$	(1) 21346,78	(2) 21889,41		(5) 22381,08	
$8d_4$	1724,162	1724,176		1724,16	
$2p_n - 9d_4$	(1) 21709,75[1])	(2) 22252,15		(4) 22743,80	
$9d_4$	1361,192?	1361,436		1361,42	
$2p_n - 10d_4$	(0) 21968,78	(0) 22511,70		(2) 23003,00	
$10d_4$	1102,162	1101,886		1102,22	
$2p_n - 11d_4$				(0,5) 23194,63	
$11d_4$				910,58	
$2p_n - 12d_4$				(1,5) 23340,24	
$12d_4$				764,98	
$2p_n - 13d_4$				(0,5) 23453,93	
$13d_4$				651,29	

$$(m\,d_4) = N\,/\,[m + d_4 + \delta_4\,(m\,d_4)]^2.$$

1) Messung betrifft die stärkere koinzidierende Linie $2p_3 - 8{,}5\,s_1$.

$2\,p_8 - m\,d_2$.

$2\,p_7 - m\,d_2$	$2\,p_8 - m\,d_2$	$2\,p_9 - m\,d_2$	$2\,p_{10} - m\,d_2$	Mittel $m\,d_2$	beob.-ber. $\Delta\,(m\,d_2)$
11485,61	(2) 11782,94	(2) 11950,10	(9) 13349,49		
12322,242	12322,289	12322,311	12322,164	12322,259	$3\,d_2$ −0,020
16889,95	(6) 17187,27	(7) 17354,53	(12) 18753,72		
6917,902	6917,959	6917,881	6917,934	6917,919	$4\,d_2$ −0,023
19386,99	(3) 19684,35	(5) 19851,54	(15) 21250,77		
4420,862	4420,879	4420,871	4420,884	4420,888	$5\,d_2$ +0,042
20741,36	(3) 21038,77	(5) 21205,96	(8) 22605,20		
3066,492	3066,459	3066,451	3066,454	3066,464	$6\,d_2$ −0,142
21559,74	(3) 21857,08	(4) 22024,30	(5) 23423,54		
2248,112	2248,449	2248,111	2248,114	2248,114	$7\,d_2$ −3,003
22085,03[1])	(0,5) 22382,60	(1,5) 22549,74	(5) 23948,98		
1722,822	1722,629	1722,671	1722,674	1722,661	$8\,d_2$ +0,275
22447,81	(0) 22745,17	(0,5) 22912,34	(2) 24311,63		
1360,042	1360,059	1360,071	1360,024	1360,060	$9\,d_2$ −0,129
			(3) 24570,07		
			1101,584	1101,547	$10\,d_2$ +0,259
			(1) 24762,27		
			909,384	909,370	$11\,d_2$ −0,468
			(0) 24907,32		
			764,334	764,337	$12\,d_2$ +0,043
			(0) 25022,35		
			649,304	649,298	$13\,d_2$ −1,771

$d_2 = -0{,}020055$. $\delta_2 = 3{,}0040 \times 10^{-7}$.

$2\,p_8 - m\,d_4$.

$2\,p_9 - m\,d_4$	Mittel $m\,d_4$	beob.-ber. $\Delta\,(m\,d_4)$	$2\,p_9 - m\,d_4'$	
(1) 11934,95			(7) 11933,26	
12337,461	12337,323	$3\,d_4$ +0,003	12339,151	$3\,d_4'$
(1) 17344,06			(15) 17342,95	
6928,351	6928,369	$4\,d_4$ −0,022	6929,461	$4\,d_4'$
(1) 19845,28			(10) 19844,64	
4427,131	4427,148	$5\,d_4$ +0,008	4427,771	$5\,d_4'$
(3) 21201,87			(15) 21201,45	
3070,541	3070,547	$6\,d_4$ +0,003	3070,961	$6\,d_4'$
	2253,703	$7\,d_4$ −0,005	(10) 22018,40	
			2254,011	$7\,d_4'$
	1724,170	$8\,d_4$ +0,002	(5) 22548,07	
			1724,341	$8\,d_4'$
	1361,431	$9\,d_4$ −0,034	(5) 22910,84	
			1361,571	$9\,d_4'$
	1102,214	$10\,d_4$ −0,016	(3) 23170,10	
			1102,311	$10\,d_4'$
	910,56	$11\,d_4$ +0,007	(2) 23361,85	
			910,561	$11\,d_4'$
	764,96	$12\,d_4$ +0,113	(0,5) 23507,45	
			764,961	$12\,d_4'$
	651,29	$13\,d_4$ −0,217	(0) 23621,04	
			651,371	$13\,d_4'$

$d_4 = -0{,}02456211$. $\delta_4 = +5{,}179363 \times 10^{-7}$.

$2\,p_n - m\,d_s$

	$2\,p_2 - m\,d_s$	$2\,p_3 - m\,d_s$	$2\,p_4 - m\,d_s$	$2\,p_5 - m\,d_s$	$2\,p_6 - m\,d_s$	$2\,p_7 - m\,d_s$	$2\,p_{10} - m\,d_s$	Mittel $m\,d_s$	beob.-ber. $\Delta\,(m\,d_s)$
$2\,p_n - 3\,d_s$				(1) 11208,39	(1) 11700,00	(8) 13266,36	12405,233	$3\,d_s$	+1,207
$3\,d_s$				12405,196	12405,229	12405,294			
$2\,p_n - 4\,d_s$	(5) 15936,87	(4) 16057,90	(2) 16116,82	(6) 16659,41	(7) 17151,11	(20) 18717,54	6954,126	$4\,d_s$	−0,808
$4\,d_s$	6954,131	6954,115	6954,122	6954,176	6954,119	6954,114			
$2\,p_n - 5\,d_s$	(8) 18449,97	(4) 18570,95	(4 18629,90	(5) 19172,55	(4) 19664,20	(12) 21230,64	4441,035	$5\,d_s$	+0,707
$5\,d_s$	4441,031	4441,065	4441,042	4441,036	4441,009	4441,009			
$2\,p_n - 6\,d_s$	(3) 19812,87	(0,5) 19933,88	(5) 19992,84	(5) 20535,46	(6) 21027,09	(8) 22593,50	3078,128	$6\,d_s$	+0,082
$6\,d_s$	3078,131	3078,135	3078,102	3078,126	3078,139	3078,154			
$2\,p_n - 7\,d_s$	(2) 20633,46	(0) 20754,45	(0) 20813,53	(4) 21356,06	(2,5) 21847,70	(5) 23414,14	2257,525	$7\,d_s$	−0,857
$7\,d_s$	2257,541	2257,565	2257,412	2257,526	2257,529	2257,514			
$2\,p_n - 8\,d_s$	(2,5) 21163,43	(1) 21284,48	(0,5) 21343,37	(1,5) 21886,03	(0) 22377,65	(4,5) 23944,08	1727,573	$8\,d_s$	+0,297
$8\,d_s$	1727,571	1727,535	1727,572	1727,556	1727,579	1727,574			
$2\,p_n - 9\,d_s$	(0,5) 21527,45	(0) 21648,41 ?		(1) 22250,07	(0) 22741,70	(2) 24308,11	1363,532	$9\,d_s$	−0,105
$9\,d_s$	1363,551	1363,605		1363,516	1363,529	1363,544			
						(3) 24567,67	1103,978	$10\,d_s$	+0,171
						1103,984			
						(2) 24760,11	911,541	$11\,d_s$	−0,193
						911,544			
						(0,5) 24905,81	765,843	$12\,d_s$	+0,088
						765,844			
						(0) 25019,71	651,944	$13\,d_s$	−0,276
						651,944			

$(m\,d_s) = N / [m + d_s + \delta_s\,(m\,d_s)]^2$. $\quad d_s = -0{,}031600$. $\quad \delta_s = 4{,}352 \times 10^{-7}$.

$2\,p_n - m\,d_6$.

	$2\,p_2 - m\,d_6$	$2\,p_5 - m\,d_6$	$2\,p_7 - m\,d_6$	$2\,p_{10} - m\,d_6$	Mittel $m\,d_6$		beob.—ber. $\Delta\,(m\,d_6)$
$2\,p_n - 3\,d_6$		(0) 10737,44	(1) 11387,98	(6) 13251,77	12419,875	$3\,d_6$	+0,323
$3\,d_6$		12419,902	12419,872	12419,884			
$2\,p_n - 4\,d_6$	(4) 15929,21	(2) 16195,56	(7) 16846,05	(12) 18709,84	6961,797	$4\,d_6$	−2,338
$4\,d_6$	6961,791	6961,782	6961,802	6961,814			
$2\,p_n - 5\,d_6$	(6) 18444,53	[1]	(2,5) 19361,41	(10) 21225,22	4446,443	$5\,d_6$	+0,791
$5\,d_6$	4446,471		4446,442	4446,434			
$2\,p_n - 6\,d_6$	(1) 19809,77	(1) 20076,23	(4) 20726,61	(7) 22590,40	3081,236	$6\,d_6$	−0,081
$6\,d_6$	3081,231	3081,231	3081,242	3081,254			
$2\,p_n - 7\,d_6$	(1) 20630,81	(0,5) 20897,07	(3) 21547,59	(4) 23411,38	2260,272	$7\,d_6$	−0,240
$7\,d_6$	2260,191	2260,272	2260,262	2260,274			
$2\,p_n - 8\,d_6$	(1) 21161,86	(0) 21428,43	(0) 22078,75	(3,5) 23942,56	1729,075	$8\,d_6$	+0,342
$8\,d_6$	1729,141	1728,912	1729,102	1729,094			
$2\,p_n - 9\,d_6$	(0,5) 21526,44			(1,5) 24307,10	1364,545	$9\,d_6$	−0,128
$9\,d_6$	1364,561			1364,554			
$2\,p_n - 10\,d_6$				(1) 24566,79	1104,860	$10\,d_6$	+0,289
$10\,d_6$				1104,864			
$2\,p_n - 11\,d_6$				(1) 24759,62	912,032	$11\,d_6$	−0,279
$11\,d_6$				912,034			

$$(m\,d_6) = N / [m + d_6 + \delta_6\,(m\,d_6)]^2.$$
$$d_6 = -0{,}035200.$$
$$\delta_6 = 5{,}749 \times 10^{-7}.$$

1) 18710,90 gestört durch Koinzidenz mit (12) 18709,84.

II. Nebenserien

$2p_n - m s_1'$.

	$2p_1 - m s_1'$	$2p_2 - m s_1'$	$2p_3 - m s_1'$	$2p_4 - m s_1'$	$2p_5 - m s_1'$
$2p_n - 2{,}5\ s_1'$		(2) 11397,24	(3) 11518,23	[1]	(2) 11663,67
$2{,}5\ s_1'$		11493,761	11493,785		11493,672
$2p_n - 3{,}5\ s_1'$	(5) 14836,98	(7) 16769,30	(9) 16890,31	(3,5) 16949,03	(7) 17035,65
$3{,}5\ s_1'$	6121,738	6121,701	6121,705	6121,912	6121,692
$2p_n - 4{,}5\ s_1'$	(6) 17325,29	(5) 19257,53	(6) 19378,61	(1,5) 19437,49	(4) 19523,88
$4{,}5\ s_1'$	3633,428	3633,471	3633,405	3633,452	3633,482
$2p_n - 5{,}5\ s_1'$	(1,5) 18674,13	(4,5) 20606,43	(6) 20727,45	(1,5) 20786,37	(6) 20872,74
$5{,}5\ s_1'$	2284,588	2284,571	2284,565	2284,572	2284,602
$2p_n - 6{,}5\ s_1'$	(0) 19490,35	(4) 21422,63	(3) 21543,64	(0,5) 21602,50	(3) 21688,89
$6{,}5\ s_1'$	1468,368	1468,371	1468,375	1468,442	1468,452
$2p_n - 7{,}5\ s_1'$		(1,5) 21950,56	(3) 22071,42		(1) 22216,76
$7{,}5\ s_1'$		940,441	940,595		940,582
$2p_n - 8{,}5\ s_1'$			(0) 22433,45		(3) 22578,47 ?
$8{,}5\ s_1'$			578,565		578,872?
$2p_n - 9{,}5\ s_1'$			(0,5) 22692,11		
$9{,}5\ s_1'$			319,905		

$$(m s_1') = N/(m + s_1' + \sigma_1' e^{4/m^2} + c e^{m/2})^2 .$$

1) 11 577,165 neben der stärkeren $2p_7 - 3d_1''$ 11 578,03 nicht beob.

2) Berechnet aus Serienformel (unsicher).

$2p_n - m s_1''$.

	$2p_2 - m s_1''$	$2p_4 - m s_1''$	$2p_5 - m s_1''$	$2p_6 - m s_1''$
$2p_n - 2{,}5\ s_1''$	(4)11381,48	(2) 11561,48	(1) 11647,91	(4) 12104,10
$2{,}5\ s_1''$	11509,521	11509,462	11509,432	11509,486
$2p_n - 3{,}5\ s_1''$	(10) 16758,58	(1) 16938,43	(7) 17024,83	(8) 17481,03
$3{,}5\ s_1''$	6132,421	6132,512	6132,512	6132,556
$2p_n - 4{,}5\ s_1''$	(4) 19250,89	(10) 19430,89	(8) 19517,23	
$4{,}5\ s_1''$	3640,111	3640,052	3640,112	
$2p_n - 5{,}5\ s_1''$			(10) 20870,05	
$5{,}5\ s_1''$			2287,292	
$2p_n - 6{,}5\ s_1''$			(7) 21686,32	
$6{,}5\ s_1''$			1471,022	
$2p_n - 7{,}5\ s_1''$			(4) 22215,01	
$7{,}5\ s_1''$			942,332	
$2p_n - 8{,}5\ s_1''$			(2) 22577,32	
$8{,}5\ s_1''$			580,022	
$2p_n - 9{,}5\ s_1''$			(0,5) 22836,35	
$9{,}5\ s_1''$			320,992	

Serienformel nicht berechnet.

$2p_8 - m s_1'$.
$2p_9 - m s_1'$.

$2p_8 - m s_1'$	$2p_7 - m s_1'$	$2p_6 - m s_1'$	$2p_{10} - m s_1'$	Mittel $m s_1'$		beob.—ber. $\Delta (m s_1')$
(0) 12119,66	(5) 12314,08	(2) 12611,49	(5) 14177,89	(24413,05)[3]	$1,5\, s_1'$	
11493,926	11493,772	11493,739	11493,764	11493,777	$2,5\, s_1'$	+0,008
(5) 17491,92	(7) 17686,16	(5) 17983,56	(7) 19550,00	6121,687	$3,5\, s_1'$	+0,003
6121,666	6121,692	6121,669	6121,690			
(0,5) 19980,20	(7) 20174,45	(2) 20471,82	(7) 22038,16	3633,432	$4,5\, s_1'$	−4,088
3633,386	3633,402	3633,409	3633,494			
	(3,5) 21523,28		(4) 23387,13	2284,565	$5,5\, s_1'$	−3,615
	2284,572		2284,524			
	(1) 22339,45		(2,5) 24203,26	1468,399	$6,5\, s_1'$	−1,272
	1468,402		1468,394			
	(0,5) 22867,47		(1,5) 24731,25	940,428	$7,5\, s_1'$	+3,531
	940,382		940,404			
	(0) 23229,32		(0,5) 25092,90	578,638	$8,5\, s_1'$	+0,002
	578,532		578,754			
				319,942	$9,5\, s_1'$	−19,337

$s_1' = 0{,}2826231$. $\sigma_1' = 0{,}0317005$. $c = 0{,}07064337$.

$2p_7 - m s_1''$.

$2p_7 - m s_1''$	$2p_8 - m s_1''$	$2p_9 - m s_1''$	$2p_{10} - m s_1''$	Mittel $m s_1''$	
(3) 12298,33	(3) 12595,74	(1) 12762,78	(7,5) 14162,18	11509,498	$2,5\, s_1''$
11509,522	11509,489	11509,631	11509,474		
(7) 17675,34	(8) 17972,69	(1) 18139,90	(8) 19539,18	6132,505	$3,5\, s_1''$
6132,512	6132,539	6132,511	6132,474		
(10) 20167,74			(8) 22031,51	3640,106	$4,5\, s_1''$
3640,112			3640,144		
(8) 21520,5	(2) 21817,92		(0) 23384,33	2287,288	$5,5\, s_1''$
2287,262	2287,309		2287,324		
(6) 22336,87				1471,002	$6,5\, s_1''$
1470,982					
(3) 22865,59				942,297	$7,5\, s_1''$
942,262					
(1) 23227,91				579,982	$8,5\, s_1''$
579,942					
(0,5) 23486,89				320,977	$9,5\, s_1''$
320,962					

[3] Ähnlich der von $(m s_1'''')$.

	$2p_4 - m s_1'''$	$2p_5 - m s_1'''$
$2p_n - 2{,}5\, s_1'''$	(6) 11551,67	(3) 12094,29
$2{,}5\, s_1'''$	11519,272	11519,296
$2p_n - 3{,}5\, s_1'''$	(6) 16937,35	(10) 17480,00
$3{,}5\, s_1'''$	6133,592	6133,586
$2p_n - 4{,}5\, s_1'''$	(10) 19431,190	(10) 19973,85
$4{,}5\, s_1'''$	3639,752	3639,736
$2p_n - 5{,}5\, s_1'''$	(7) 20783,93	(6) 21326,62
$5{,}5\, s_1'''$	2287,012	2286,966
$2p_n - 6{,}5\, s_1'''$	(7) 21600,17	(5) 22142,73
$6{,}5\, s_1'''$	1470,772	1470,856
$2p_n - 7{,}5\, s_1'''$	(6) 22128,75	(2,5) 22671,33
$7{,}5\, s_1'''$	942,192	942,256
$2p_n - 8{,}5\, s_1'''$	(3) 22490,99	(0,5) 23033,65
$8{,}5\, s_1'''$	579,952	579,936
$2p_n - 9{,}5\, s_1'''$	(2) 22750,00	(0,5) 23292,75
$9{,}5\, s_1'''$	320,942	320,836

Serienformel nicht berechnet,

	$2p_3 - m s_1''''$	$2p_4 - m s_1''''$	$2p_5 - m s_1''''$	$2p_6 - m s_1''''$
$2p_n - 2{,}5\, s_1''''$		(1) 11550,14	(6) 11636,53	(1) 12092,75
$2{,}5\, s_1''''$		11520,802	11520,812	11520,836
$2p_n - 3{,}5\, s_1''''$	(5) 16756,52	(1,5) 16936,44	(10) 17022,88	(7) 17479,10
$3{,}5\, s_1''''$	6134,481	6134,502	6134,462	6134,486
$2p_n - 4{,}5\, s_1''''$	(8) 19250,49	(5) 19430,47	(5) 19516,89	(6) 19973,13
$4{,}5\, s_1''''$	3640,511	3640,472	3640,452	3640,456
$2p_n - 5{,}5\, s_1''''$	(6) 20601,53	(6) 20781,48	(3) 20867,83	(0,5) 21324,22
$5{,}5\, s_1''''$	2289,471	2289,462	2289,512	2289,366
$2p_n - 6{,}5\, s_1''''$	(6) 21419,42	(3) 21599,42		(0,5) 22142,08
$6{,}5\, s_1''''$	1471,581	1471,522		1471,506
$2p_n - 7{,}5\, s_1''''$	(3,5) 21948,60			
$7{,}5\, s_1''''$	942,401			
$2p_n - 8{,}5\, s_1''''$	(2) 22311,07	(3) 22490,99	(2) 22577,32	(0,5) 23033,65
$8{,}5\, s_1''''$	579,931	579,952	580,022	579,936
$2p_n - 9{,}5\, s_1''''$	(0) 22570,04	(2) 22750,00	(0,5) 22836,35	(0,5) 23292,75
$9{,}5\, s_1''''$	320,961	320,942	320,992	320,836

$$(m s_1'''') = N / \left(m + s_1'''' + \sigma_1'''' e^{4/m^2} + c e^{m/2}\right)^2.$$

1) Berechnet aus Serienformel (unsicher).

$2\,p_n - m\,s_1'''$.

$2\,p_8 - m\,s_1'''$	$2\,p_9 - m\,s_1'''$	Mittel $m\,s_1'''$	
(8) 12585,93	(2) 12753,24		
11519,299	11519,171	11519,257	$2{,}5\,s_1'''$
(10) 17971,68	(3) 18138,89		
6133,549	6133,521	6133,562	$3{,}5\,s_1'''$
(10) 20465,46			
3639,769		3639,752	$4{,}5\,s_1'''$
(7) 21818,18	(1) 21985,31		
2287,009	2287,101	2287,022	$5{,}5\,s_1'''$
(4) 22634,39			
1470,839		1470,822	$6{,}5\,s_1'''$
(2) 23163,05			
942,179		942,209	$7{,}5\,s_1'''$
(0,5) 23525,35			
579,879		579,922	$8{,}5\,s_1'''$
(0,5) 23784,30			
320,919		320,899	$9{,}5\,s_1'''$

stimmt mit $(m\,s_1'''')$ fast überein.

$2\,p_n - m\,s_1''''$.

$2\,p_7 - m\,s_1''''$	$2\,p_8 - m\,s_1''''$	$2\,p_{10} - m\,s_1''''$	Mittel $m\,s_1''''$		beob.—ber. $\Delta\,(m\,s_1'''')$
(7) 12287,03		(0,5) 14150,94	(24417,12)[1]	$1{,}5\,s_1''''$	
11520,822		11520,714	11520,818	$2{,}5\,s_1''''$	+0,012
(10) 17673,39	(10) 17970,76	(5) 19537,22			
6134,462	6134,469	6134,434	6134,473	$3{,}5\,s_1''''$	+0,010
(7) 20167,36	(6) 20464,76	(10) 22031,11			
3640,492	3640,469	3640,544	3640,473	$4{,}5\,s_1''''$	−3,910
(0) 21518,40	(2) 21815,77	(5) 23382,18			
2289,452	2289,459	2289,474	2289,452	$5{,}5\,s_1''''$	−2,871
		(5) 24200,08			
		1471,574	1471,550	$6{,}5\,s_1''''$	−0,834
		(4) 24729,33			
		942,324	942,349	$7{,}5\,s_1''''$	+3,569
(1) 23227,91	(0,5) 23525,35	(2) 25091,72			
579,942	579,879	579,934	579,931	$8{,}5\,s_1''''$	+0,002
(0,5) 23486,89	(0,5) 23784,30	(0,5) 25350,77			
320,962	320,919	320,884	320,931	$9{,}5\,s_1''''$	−19,214

$s_1'''' = 0{,}2780533.$ $\sigma_1'''' = 0{,}0325029.$ $c = 0{,}07047752.$

	$2p_1 - ms_2$	$2p_2 - ms_2$	$2p_3 - ms_2$	$2p_4 - ms_2$	$2p_5 - ms_2$
$1,5\,s_2 - 2p_n$	(50) 17082,015	(15) 15149,733	(9) 15028,71	(7) 14969,792	(2) 14883,394
$1,5\,s_2$	38040,733	38040,734	38040,725	38040,734	38040,736
$2p_n - 3,5\,s_2$	(3) 13685,81	(6) 15618,05	(6) 15739,03	(8) 15797,98	(6) 15884,34
$3,5\,s_2$	7272,908	7272,951	7272,985	7272,962	7273,002
$2p_n - 4,5\,s_2$	(5) 16756,52	(8) 18689,15	(4,5) 18810,21	(8) 18869,08	(5,5) 18955 51
$4,5\,s_2$	4202,198	4201,851	4201,805	4201,862	4201,832
$2p_n - 5,5\,s_2$	(2) 18353,22	(5) 20285,61	(4) 20406,58	(10) 20465,46	(3) 20551,99[3]
$5,5\,s_2$	2605,498	2605,391	2605,435	2605,482	2605,352
$2p_n - 6,5\,s_2$	(0,5) 19291,01	(3) 21223,33	(3) 21344,37	(5) 21403,29	(3) 21489,65
$6,5\,s_2$	1667,708	1667,671	1667,645	1667,652	1667,692
$2p_n - 7,5\,s_2$		[1]	[2](0,5) 21939,57	(4) 21998,45	(2) 22085,03[4]
$7,5\,s_2$			1072,445	1072,492	1072,372
$2p_n - 8,5\,s_2$		(0,5) 22220,93		(0,5) 22400,89	(0) 22487,49
$8,5\,s_2$		670,071		670,052	669,852
$2p_n - 9,5\,s_2$		(3) 22490,99[3]			
$9,5\,s_2$		400,011			

1) $2p_n - 7,5\,s_2$ 21818,55 ist neben der starken $2p_3 - 5,5\,s_1'''$ 21818,18 nicht gemessen.
2) Zugleich $2p_4 - 8,5\,s_1''''$.
3) Zugleich die schwache $2p_6 - 6\,d_2$.
4) Von $2p_7 - 8\,d_2$ 22085,191 nicht getrennt.
5) Berechnet nach der Serienformel.

	$2p_3 - ms_2$	$2p_6 - ms_2$	$2p_7 - ms_2$
$1,5\,s_2 - 2p_n$	(12) 16219,807	(15) 15953,469	(6) 15302,951
$1,5\,s_2$	39110,808	39110,811	39110,803
$2p_n - 3,5\,s_2$	(6) 15567,87	(7) 15834,21	(4) 16484,69
$3,5\,s_2$	7323,131	7323,132	7323,162
$2p_n - 4,5\,s_2$	(8) 18667,54	(6) 18933,87	(5) 19584,38
$4,5\,s_2$	4223,461	4223,472	4223,472
$2p_n - 5,5\,s_2$	(4) 20274,44	(5) 20540,78	(5) 21191,26
$5,5\,s_2$	2616,561	2616,562	2616,592
$2p_n - 6,5\,s_2$	(10) 21215,87	(4) 21482,27	(4) 22132,70
$6,5\,s_2$	1675,131	1675,072	1675,152
$2p_n - 7,5\,s_2$	(1) 21813,75	(2) 22079,96	(1) 22730,53
$7,5\,s_2$	1077,251	1077,382	1077,322
$2p_n - 8,5\,s_2$	(1) 22216,76	(0) 22483,10	(0,5) 23133,66
$8,5\,s_2$	674,241	674,242	674,192
$2p_n - 9,5\,s_2$	(0) 22487,49		
$9,5\,s_2$	403,511		

$(m\,s_2) = N/(m + s_2 + \sigma_2 e^{4/m^2} + c\,e^{(m/2)^2})^2$.

1) Berechnet nach der Serienformel.

$2\,p_6 - m\,s_2$.

$2\,p_6 - m\,s_2$	$2\,p_7 - m\,s_2$	$2\,p_8 - m\,s_2$	$2\,p_{10} - m\,s_2$	Mittel $m\,s_2$		beob.—ber. $\Delta\,(m\,s_2)$
(10) 14427,146 38040,732	(9) 14232,884 38040,736	(10) 13935,496 38040,725	(8) 12369,060 38040,754	38040,731	$1{,}5\,s_2$	+15,011
				(14506,53)[5])	$2{,}5\,s_2$	
(2) 16340,61 7272,976	(4) 16534,85 7273,002	(6) 16832,28 7272,949	(9) 18398,71 7272,944	7272,964	$3{,}5\,s_2$	−0,482
(5) 19411,77 4201,816	(4) 19606.06 4201,792	(4) 19903.47 4201,759	(8) 21489,89 4201,764	4201,806	$4{,}5\,s_2$	−0,433
(7) 21008,16 2605,426	(3) 21202,37 2605,482	(5) 21499,81 2605,419	(5) 23066,26 2605,394	2605,422	$5{,}5\,s_2$	+4.609
(3) 21945,86 1667,726	(3) 22140,17 1667,682	(2) 22437,55 1667,679	(4) 24003,99 1667,664	1667,672	$6{,}5\,s_2$	−4,355
(1) 22541,12 1072,466	(0) 22735,49 1072,362	(0,5) 23032,77 1072,459	(4) 24599,15 1072,504	1072,452	$7{,}5\,s_2$	+0,746
(0,5) 22943,55 670,036			(0) 25001,73 669,924	670,006	$8{,}5\,s_2$	−0,085
				400,011	$9{,}5\,s_2$	+0,027

$$(m\,s_2) = N/\left(m + s_2 + \sigma_2\, e^{4/m^2} + c\,\varepsilon^{m/2}\right)^2.$$

$s_2 = 0{,}022434.$
$\sigma_2 = 0{,}007989809.$
$c = 0{,}06081843.$

$2\,p_{10} - m\,s_3$.

$2\,p_{10} - m\,s_3$	Mittel $m\,s_3$		beob.—ber $\Delta\,(m\,s_3)$
(8) 13439,163 39110,817	39110,808	$1{,}5\,s_3$	+0,002
	(14651,88)[1])	$2{,}5\,s_3$	
(8) 18348,52 7323,134	7323,132	$3{,}5\,s_3$	+0,012
(7) 21448,19 4223,464	4223,467	$4{,}5\,s_3$	−2,194
(4) 23055,07 2616,584	2616,576	$5{,}5\,s_3$	−6,649
(3) 23996,56 1675,094	1675,101	$6{,}5\,s_3$	−5,251
(2) 24594,35 1077,304	1077,331	$7{,}5\,s_3$	+0,008
(0) 24997,55 674,104	674,195	$8{,}5\,s_3$	+0,222
	403,51	$9{,}5\,s_3$	+0,89

$s_3 = 0{,}0150861.$ $\sigma_3 = 0{,}00535755.$ $c = 0{,}06043645.$

$2\,p_n - m\,s_4$

	$2\,p_1 - m\,s_4$	$2\,p_2 - m\,s_4$	$2\,p_3 - m\,s_4$	$2\,p_4 - m\,s_4$	$2\,p_5 - m\,s_4$
$1{,}5\,s_4 - 2\,p_n$	(50) 18511,46	(10) 16579,155	(10) 16458,146	(8) 16399,220	(6) 16312,81
$1{,}5\,s_4$	39470,178	39470,156	39470,161	39470,162	39470,16
$2\,p_n - 3{,}5\,s_4$	(6) 12942,05	(0,5) 14874,31	(6) 14995,35		(6) 15140,65
$3{,}5\,s_4$	8016,668	8016,691	8015,665		8016,69
$2\,p_n - 4{,}5\,s_4$	(1) 15996,62	(5) 17928,87	(6) 18049,95		(6) 18195,27
$4{,}5\,s_4$	4962,098	4962,131	4962,065		4962,07
$2\,p_n - 5{,}5\,s_4$	(4) 17586,36	(0,5) 19518,70	(2) 19639,65		(4) 19784,98
$5{,}5\,s_4$	3372,358	3372,301	3372,365		3372,36
$2\,p_n - 6{,}5\,s_4$		(1) 20451,02	(2) 20572,05		(4) 20717,33
$6{,}5\,s_4$		2439,981	2439,965		2440,01
$2\,p_n - 7{,}5\,s_4$			(2,5) 21163,43		(2) 21308,82
$7{,}5\,s_4$			1848,586		1848,52
					(1) 21709,75
					1447,59
					(0) 21992,51
					1164,83

$$(m\,s_4) = N / [m + s_4 + \sigma_4\,(m\,s_4)]^2.$$

1) Aus Serienformel berechnet.

$2\,p_n - m\,s_5$

	$2\,p_3 - m\,s_5$	$2\,p_4 - m\,s_5$	$2\,p_5 - m\,s_5$	$2\,p_6 - m\,s_5$	$2\,p_7 - m\,s_5$
$1{,}5\,s_5 - 2\,p_n$	(8) 16996,604	(9) 16816,666	(12) 16730,268	(12) 16274,022	(15) 16079,75
$1{,}5\,s_5$	39887,605	39887,608	39887,610	39887,608	39887,60
$2\,p_n - 3{,}5\,s_5$	(2) 14789,72	(9) 14969,792[1])	(1,5) 15056,05	(7) 15512,28	(6) 15706,55
$3{,}5\,s_5$	8101,281	8101,150[1])	8101,292	8101,306	8101,30
$2\,p_n - 4{,}5\,s_5$	(6) 17886,11	(7) 18066,14	(4) 18152,55	(7) 18608,77	(4) 18803,05
$4{,}5\,s_5$	5004,891	5004,802	5004,792	5004,816	5004,80
$2\,p_n - 5{,}5\,s_5$	(1,5) 19494,29	(3) 19674,30	(0,5) 19760,66	(6) 20216,88	(5) 20411,11
$5{,}5\,s_5$	3396,711	3396,642	3396,682	3396,706	3396,74
$2\,p_n - 6{,}5\,s_5$	(1,5) 20434,88	(3) 20614,80	(1) 20701,20	(5) 21157,46	(2,5) 21351,75
$6{,}5\,s_5$	2456,121	2456,142	2456,412	2456,126	2456,10
$2\,p_n - 7{,}5\,s_5$	(0) 21032,92	(1,5) 21212,87	(0) 21299,30	(4) 21755,51	(1) 21949,87
$7{,}5\,s_5$	1858,081	1858,072	1858,042	1858,076	1857,98
$2\,p_n - 8{,}5\,s_5$		(0) 21616,90		(2,5) 22159,32	(0) 22353,86
$8{,}5\,s_5$		1454,042		1454,266	1453,99
$2\,p_n - 9{,}5\,s_5$				(1) 22444,00	
$9{,}5\,s_5$				1169,614	
$2\,p_n - 10{,}5\,s_5$				(0) 22652,69	
$10{,}5\,s_5$				960,896	
$2\,p_n - 11{,}5\,s_5$					
$11{,}5\,s_5$					

$$(m\,s_5) = N / [m + s_5 + \sigma_5\,(m\,s_5)]^2.$$

1) Dies ist die starke Linie $1{,}5\,s_2 - 2\,p_4$, neben der diejenige $2\,p_4 - 3{,}5\,s_5$ 14969,65

$2\,p_n - m\,s_4$

$2\,p_6 - m\,s_4$	$2\,p_7 - m\,s_4$	$2\,p_8 - m\,s_4$	$2\,p_{10} - m\,s_4$	Mittel $m\,s_4$		beob.—ber. $\Delta\,(m\,s_4)$
(6) 15856,573	(12) 15662,305	(15) 15364,934	(10) 13798,498	39470,160	$1{,}5\,s_4$	−0,29
39470,159	39470,157	39470,163	39470,152			
				(15141,50)[1])	$2{,}5\,s_4$	
(7) 15596,91	(7) 15791,16	(7) 16088,56	(7) 17654,98	8016,679	$3{,}5\,s_4$	−1,630
8016,676	8016,692	8016,669	8016,674			
(8) 18651,45	(7) 18845,73	(6) 19143,14	(10) 20709,55	4962,103	$4{,}5\,s_4$	+0,066
4962,136	4962,122	4962,089	4962,104			
(6) 20241,23	(9) 20435,48	(8) 20732,81	(7) 22299,29	3372,371	$5{,}5\,s_4$	−0,195
3372,356	3372,372	3372,419	3372,364			
(5) 21173,62	(4) 21367,92	(6) 21665,23	(3) 23231,74	2439,967	$6{,}5\,s_4$	−0,518
2439,966	2439,932	2439,999	2439,914			
(4) 21765,02	(3) 21959,31	(5,5) 22256,69	(2) 23823,16	1848,546	$7{,}5\,s_4$	+0,764
1848,566	1848,542	1848,539	1848,494			
(2) 22165,91	(1) 22360,23	(2,5) 22657,63	(0,5) 24224,20	1447,593	$8{,}5\,s_4$	+0,100
1447,676	1447,622	1447,599	1447,454			
(0,5) 22448,84	(1) 22642,98	(1) 22940,25	(0,5) 24506,75	1164,914	$9{,}5\,s_4$	+0,411
1164,746	1164,872	1164,979	1164,904			
	(0,5) 22850,74	(1) 23147,89	(0) 24714,85	957,058	$10{,}5\,s_4$	−0,018
	957,085	957,339	956,804			
		(0,5) 23304,57		800,659	$11{,}5\,s_4$	+0,141
		800,659				

$s_4 = +0{,}206777.$ $\sigma_4 = -1{,}00568 \times 10^{-6}.$

$2\,p_n - m\,s_5.$

$2\,p_8 - m\,s_5$	$2\,p_9 - m\,s_5$	$p_{10} - m\,s_5$	Mittel $m\,s_5$		beob.–ber. $(m\,s_5)$
(9) 15782,380	(20) 15615,199	(10) 14215,950	39887,610	$1{,}5\,s_5$	+0,400
39887,609	39887,610	39887,604			
			(15332,17)[2])	$2{,}5\,s_5$	
(6) 16003,94	(7) 16171,09	(8) 17570,41	8101,291	$3{,}5\,s_5$	−0,379
8101,289	8101,321	8101,244			
(6) 19100,44	(8) 19267,62	(9) 20666,86	5004,811	$4{,}5\,s_5$	+0,139
5004,789	5004,791	5004,794			
(8) 20708,48	(12) 20875,68	(8) 22274,94	3396,713	$5{,}5\,s_5$	−0,024
3396,749	3396,731	3396,714			
(5) 21649,15	(7) 21816,26	(5) 23215,57	2456,121	$6{,}5\,s_5$	+0,351
2456,079	2456,151	2456,084			
(4) 22247,14	(6) 22414,36	(5) 23813,60	1858,065	$7{,}5\,s_5$	+0,128
1858,089	1858,051	1858,054			
(2) 22651,08	(3) 22818,29	(3) 24217,56	1454,136	$8{,}5\,s_5$	−0,441
1454,149	1454,121	1454,094			
(0,5) 22935,57	(1,5) 23102,79	(4) 24502,01	1169,614	$9{,}5\,s_5$	−0,022
1169,649	1169,621	1169,644			
(0) 23144,27	(1) 23311,40	(0,5) 24710,86	960,902	$10{,}5\,s_5$	−0,010
960,902	961,011	960,794			
	(0) 23469,01		803,40	$11{,}5\,s_5$	−0,058
	803,401				

$s_5 = +0{,}1850705.$ $\sigma_5 = -6{,}69900 \times 10^{-7}.$

[1]) wartet wird. [2]) Berechnet aus Serienformel.

Hauptserien $1{,}5\,s_n - m\,p_n$.

$1{,}5\,s_n - m\,p_1$.

	$1{,}5\,s_2 - m\,p_1$	$1{,}5\,s_4 - m\,p_1$	Mittel $m\,p_1$		beob.–ber. $\Delta\,(m\,p_1)$
$1{,}5\,s_n - 2\,p_1$	(50) 17082,015	(100) 18511,44	20958,718	$2\,p_1$	0,000
$2\,p_1$	20958,716	20958,720			
$1{,}5\,s_n - 3\,p_1$	(20) 28397,22	(4) 29826,65	9643,510	$3\,p_1$	−35,835
$3\,p_1$	9643,511	9643,510			
$1{,}5\,s_n - 4\,p_1$	(9) 32698,16	(3) 34127,73	5342,445	$4\,p_1$	0,000
$4\,p_1$	5342,571	5342,430			
$1{,}5\,s_n - 5\,p_1$	(5) 34800,71	(0,5) 36230,09	3240,040	$5\,p_1$	+18,335
$5\,p_1$	3240,021	3240,070			
$1{,}5\,s_n - 6\,p_1$	(1,5) 36024,78	(1,5) 37454,3	2015,95	$6\,p_1$	0,000
$6\,p_1$	2015,951	2015,86			
$1{,}5\,s_n - 7\,p_1$	(1) 36776,48	(1) 38205,8	1264,31	$7\,p_1$	+3,51
$7\,p_1$	1264,25	1264,36			
$1{,}5\,s_n - 8\,p_1$	(4) 37292,83		747,9	$8\,p_1$	−15,9
$8\,p_1$	747,90				
$1{,}5\,s_n - 9\,p_1$	(3) 37617,8		422,9	$9\,p_1$	−13,6
$9\,p_1$	422,9				
$1{,}5\,s_n - 10\,p_1$	(2) 37807,9		232,8	$10\,p_1$	+2,0
	232,8				
$1{,}5\,s_n - 11\,p_1$	(4) 37925,3		115,4	$11\,p_1$	+3,4
	115,4				

$$(m\,p_1) = N \Big/ \left(m + p_1 + \frac{\pi_1}{m} + c\sqrt{m\,\varepsilon^m}\right)^2.$$

$p_1 = +0{,}1365124.$

$\pi_1 = +0{,}11162.$

$c = +0{,}02482618.$

$1{,}5\,s_n - m\,p_2$.

	$1{,}5\,s_2 - m\,p_2$	$1{,}5\,s_3 - m\,p_2$	$1{,}5\,s_4 - m\,p_2$	$1{,}5\,s_5 - m\,p_2$	Mittel $m\,p_2$	beob.—ber. $\Delta\,(m\,p_2)$
$1{,}5\,s_n - 2\,p_2$	(15) 15149,733	(12) 16219,807	(10) 16579,155	(8) 16996,607	22891,003	$2\,p_2$ +0,008
$2\,p_2$	22890,998	22891,001	22891,005	22891,003		
$1{,}5\,s_n - 3\,p_2$	(9) 27819,09	(7) 28889,10	(6) 29248,44	(15) 29665,92	10221,687	$3\,p_2$ 0,000
$3\,p_2$	10221,641	10221,708	10221,720	10221,690		
$1{,}5\,s_n - 4\,p_2$	(7) 32469,98	(5,5) 33540,06	(2,5) 33899,41	(8) 34316,86	5570,750	$4\,p_2$ +3,405
$4\,p_2$	5570,751	5570,748	5570,750	5570,750		
$1{,}5\,s_n - 5\,p_2$	(0,5) 34689,75	(0) 35759,81	(0) 36119,5	(1,5) 36536,53	3350,981	$5\,p_2$ 0,000
$5\,p_2$	3350,981	3350,998	3350,66	3351,080		
			(0) 37343,89[1]	(0) 37761,39[1]	2126,25[1]	$6\,p_2$ +4,45
			2126,27	2126,22		

$$(m\,p_2) = N/(m + p_2 + \pi_{2/m} + c\,e^{m/2})^2 .$$

$$p_2 = -0{,}0292169.$$
$$\pi_2 = +0{,}1115572.$$
$$c = 0{,}0597853.$$

1) Vgl. $6\,p_6$.

$1{,}5\,s_n - m\,p_3$.

	$1{,}5\,s_2 - m\,p_3$	$1{,}5\,s_4 - m\,p_3$	Mittel $(m\,p_3)$		I. beob.-ber. $\Delta\,(m\,p_3)$	II. beob.-ber. $\Delta\,(m\,p_3)$
$1{,}5\,s_n - 2\,p_3$	(7) 15028,71	(10) 16458,146	23012,015	$2\,p_3$	0,000	0,000
$2\,p_3$	23012,021	23012,014				
$1{,}5\,s_n - 3\,p_3$	(7) 27512,66	(7) 28942,04	10528,095	$3\,p_3$	+38,4	+13,31
$3\,p_3$	10528,071	10528,120				
$1{,}5\,s_n - 4\,p_3$	(8) 31978,57	(8) 33408,04	6062,146	$4\,p_3$	0,000	0,000
$4\,p_3$	6062,161	6062,120				
$1{,}5\,s_n - 5\,p_3$	(7) 34088,07	(3,5) 35517,51	3952,655	$5\,p_3$	−1,369	−1,633
$5\,p_3$	3952,661	3952,650				
$1{,}5\,s_n - 6\,p_3$	(3) 35260,12	(1) 36689,56	2780,615	$6\,p_3$	0,000	0,000
$6\,p_3$	2780,611	2780,61				
$1{,}5\,s_n - 7\,p_3$	(1,5) 36024,78 ?	(1,5) 37454,3 ?	2015,951 ?	$7\,p_3$	−42,426	−47,03
$7\,p_3$	2015,951 ?	2015,86 ?				
$1{,}5\,s_n - 8\,p_3$	(3) 36438,6	(3) 37868,0	1602,1	$8\,p_3$	+21,5	+11,6
$8\,p_3$	1602,1	1602,2				

I. $(m\,p_3) = N/(m + p_3 + \pi_3/m^2 + c\sqrt{m\,e^m})^2$. $p_3 = +\,0{,}2693526$. $\pi_3 = -\,0{,}3508203$. $c = +\,0{,}000432981$.

II. $(m\,p_3) = N/(m + p_3 + \pi_3/m + c\sqrt{m\,e^m})^2$. $p_3 = 0{,}32134655$. $\pi_3 = -\,0{,}2769636$. $c = 0{,}0001163438$.

$1{,}5\,s_n - m\,p_4$.

	$1{,}5\,s_2 - m\,p_4$	$1{,}5\,s_4 - m\,p_4$	$1{,}5\,s_5 - m\,p_4$	Mittel $(m\,p_4)$		beob.-ber. $\Delta\,(m\,p_4)$
$1{,}5\,s_n - 2\,p_4$	(9) 14969,792	(8) 16399,220	(10) 16816,666	23070,944	$2\,p_4$	+0,007
$2\,p_4$	23070,939	23070,940	23070,944			
$1{,}5\,s_n - 3\,p_4$	(10) 27819,95	(10) 29249,34	(10) 29666,79	10220,817	$3\,p_4$	0,000
$3\,p_4$	10220,781	10220,82	10220,82			
$1{,}5\,s_n - 4\,p_4$	(8) 32490,07	(8) 33919,50	(4) 34336,98	5550,650	$4\,p_4$	+5,827
$4\,p_4$	5550,661	5550,66	5550,63			
$1{,}5\,s_n - 5\,p_4$	(1) 34708,57	(1) 36138,01	(0,5) 36555,54	3332,150	$5\,p_4$	0,000
$5\,p_4$	3332,161	3332,150	3332,070			
$1{,}5\,s_n - 6\,p_4$	(1) 35939,3	(8) 37368,75	(5) 37786,2	2101,4	$6\,p_4$	−3,496
$6\,p_4$	2101,4	2101,41	2101,4			
$1{,}5\,s_n - 7\,p_4$		(3) 38114,4	(0,5) 38531,4	1356,0	$7\,p_4$	+6,3
$7\,p_4$		1355,8	1356,2			

$(m\,p_4) = N/(m + p_4 + \pi_4/m + c\,e^{m/2})^2$. $p_4 = -\,0{,}0232537$. $\pi_4 = +\,0{,}0746753$. $c = 0{,}0612291$.

	$1{,}5\,s_2 - m\,p_5$	$1{,}5\,s_3 - m\,p_5$	$1{,}5\,s_4 - m\,p_5$	$1{,}5\,s_5 - m\,p_5$	Mittel ($m\,p_5$)		beob.—ber. $\Delta\,(m\,p_5)$
$1{,}5\,s_n - 2\,p_5$	(2) 14883,394	(15) 15953,469	(6) 16312,800	(12) 16730,268			
$2\,p_5$	23157,337	23157,339	23157,360	23157,342	23157,342	$2\,p_5$	0,000
$1{,}5\,s_n - 3\,p_5$	(7) 27768,62	(8) 28838,67	(6) 29198,02	(6) 29615,48			
$3\,p_5$	10272,111	10272,138	10272,140	10272,130	10272,127	$3\,p_5$	0,000
$1{,}5\,s_n - 4\,p_5$	(7) 32466,82	(6) 33536,90	(3) 33896,28	(0,5) 34313,92			
$4\,p_5$	5573,911	5573,908	5573,880	5573,690	5573,896	$4\,p_5$	+4,168
$1{,}5\,s_n - 5\,p_5$	(1) 34696,64	(5) 35766,35	(3) 36125,9	(3) 36543,0			
$5\,p_5$	3344,091	3344,458	3344,26	3344,6	3344,458	$5\,p_5$	0,000
$1{,}5\,s_n - 6\,p_5$	(1) 35933,9	(0,5) 37003,40	(0) 37363,22	(3) 37778,9			
$6\,p_5$	2106,8	2107,41	2106,94	2108,7	2107,1	$6\,p_5$	−3,803
$1{,}5\,s_n - 7\,p_5$		(2) 37756,6	(0,5) 38114,4	(6) 38530,7			
$7\,p_5$		1354,6	1355,8	1356,9	1355,8	$7\,p_5$	−0,57
$1{,}5\,s_n - 8\,p_5$		(0,5) 38245,0[1])	(0,5) 38606,2	(2) 39023,6			
$8\,p_5$		865,8	864,0	864,0	864,0	$8\,p_5$	−6,4

$$(m\,p_5) = {}_5N/(m + p_5 + \pi_{5/m} + c\,e^{m/2})^2 .$$

$$p_5 = -0{,}0408642.$$

$$\pi_5 = +0{,}1009538.$$

$$c = 0{,}06137594.$$

1) Zugleich $1{,}5\,s_5 - 8\,p_5$.

$1{,}5\,s_m - m\,p_6$.

	$1{,}5\,s_2 - m\,p_6$	$1{,}5\,s_4 - m\,p_6$	$1{,}5\,s_5 - m\,p_6$	Mittel $m\,p_6$		beob.–ber. $\Delta\,(m\,p_6)$
$1{,}5\,s_m - 2\,p_6$	(10) 14427,146	(6) 15856,573	(12) 16274,022			
$2\,p_6$	23613,585	23613,587	23613,588	23613,586	$2\,p_6$	+60,046
$1{,}5\,s_m - 3\,p_6$	(7) 27149,72	(7) 28579,12	(8) 28996,54			
$3\,p_6$	10891,01	10891,040	10891,07	10891,040	$3\,p_6$	0,000
$1{,}5\,s_m - 4\,p_6$	(4) 31760,04	(6) 33189,45	(9) 33606,89			
$4\,p_6$	6280,691	6280,710	6280,720	6280,708	$4\,p_6$	−0,179
$1{,}5\,s_m - 5\,p_6$		(2,5) 35384,59	(3,5) 35802,00			
$5\,p_6$		4085,57	4085,610	4085,59	$5\,p_6$	0,00
$1{,}5\,s_m - 6\,p_6$		(1) 36601,00	(2) 37018,16			
$6\,p_6$		2869,16	2869,15	2869,15	$6\,p_6$	−0,30
$1{,}5\,s_m - 7\,p_6$		(4) 37343,89[1])	(8) 37761,39[1])			
$7\,p_6$		2126,27	2126,21	2126,25	$7\,p_6$	+0,68
$1{,}5\,s_m - 8\,p_6$		(2) 37832,18	(4) 38250,2			
$8\,p_6$		1638,02	1637,4	1638,0	$8\,p_6$	+0,4
$1{,}5\,s_m - 9\,p_6$		(1,5) 38170,8	(3) 38588,64			
$9\,p_6$		1299,4	1298,96	1299,2	$9\,p_6$	−1,1
$1{,}5\,s_m - 10\,p_6$			(1) 38830,1			
$10\,p_6$			1057,5	1057,5	$10\,p_6$	0,0

$$(m\,p_6) = N/(m + p_6 + \pi_6/m^2)^2.$$
$$p_6 = +0{,}1861075.$$
$$\pi_6 = -0{,}1121625.$$

1) Von hier an sind die Glieder dieser Serien nicht mehr getrennt von denen der Serien $1{,}5\,s_4 - m\,p_7$ und $1{,}5\,s_5 - m\,p_7$.

$1{,}5\,s_n - m\,p_7$.

	$1{,}5\,s_2 - m\,p_7$	$1{,}5\,s_3 - m\,p_7$	$1{,}5\,s_4 - m\,p_7$	$1{,}5\,s_5 - m\,p_7$	Mittel $m\,p_7$		beob.—ber. $\Delta\,(m\,p_7)$
$1{,}5\,s_n - 2\,p_7$	(9) 14232,884	(6) 15302,951	(12) 15662,305	(15) 16079,755	23807,852	$2\,p_7$	0,000
$2\,p_7$	23807,887	23807,857	23807,855	23807,855			
$1{,}5\,s_n - 3\,p_7$	(7) 27123,97		(8) 28553,38	(6) 28970,83	10916,780	$3\,p_7$	0,000
$3\,p_7$	10916,761		10916,780	10916,78			
$1{,}5\,s_n - 4\,p_7$	(7) 31750,93	(2) 32820,96	(6) 33180,35	(5) 33597,80	6289,812	$4\,p_7$	−0,026
$4\,p_7$	6289,801	6289,848	6289,810	6289,810			
$1{,}5\,s_n - 5\,p_7$	(0,5) 33950,85	(0) 35020,83	(2) 35380,21	(1) 35797,62	4089,950	$5\,p_7$	0,000
$5\,p_7$	4089,881	4089,978	4089,950	4089,99			
$1{,}5\,s_n - 6\,p_7$	(3) 35169,1	(1) 36239,0	(1) 36598,72	(1) 37016,73	2871,44	$6\,p_7$	+0,025
$6\,p_7$	2871,63	2871,8	2871,44	2870,88			
$1{,}5\,s_n - 7\,p_7$			(4) 37343,89[1])	(8) 37761,39[1])	2126,25	$7\,p_7$	+0,076
$7\,p_7$			2126,27	2126,21			
$1{,}5\,s_n - 8\,p_7$			(2) 37832,18	(4) 38250,2	1638,0	$8\,p_7$	+0,788
$8\,p_7$			1638,02	1637,4			
$1{,}5\,s_n - 9\,p_7$			(1,5) 38170,8	(3) 38588,64	1299,2	$9\,p_7$	+0,165
$9\,p_7$			1299,4	1298,96			
$1{,}5\,s_n - 10\,p_7$				(1) 38830,1	1057,5	$10\,p_7$	+2,21
$10\,p_7$				1057,5			

$$(m\,p_7) = N/\left(m + p_7 + \pi_7\, e^{4/m^2} + c\, e^{m/2}\right)^2 .$$

$p_7 = +0{,}2014500.$
$\pi_7 = -0{,}02031357.$
$c = \quad 0{,}0001022995.$

1) Von hier an sind die Glieder dieser Serien nicht mehr getrennt von denen der Serien $1{,}5\,s_6 - m\,p_6$ und $1{,}5\,s_8 - m\,p_6$.

$1{,}5\,s_n - m\,p_s$.

	$1{,}5\,s_2 - m\,p_s$	$1{,}5\,s_4 - m\,p_s$	$1{,}5\,s_5 - m\,p_s$	Mittel $m\,p_s$		beob.–ber. $\Delta\,(m\,p_s)$
$1{,}5\,s_n - 2\,p_s$	(10) 13935,509	(15) 15364,934	(10) 15782,380	24105,229	$2\,p_s$	+0,009
$2\,p_s$	24105,222	24105,226	24105,230			
$1{,}5\,s_n - 3\,p_s$	(7) 27010,44	(8) 28439,87	(7) 28857,33	11030,293	$3\,p_s$	−2,477
$3\,p_s$	11030,291	11030,290	11030,280			
$1{,}5\,s_n - 4\,p_s$	(6) 31702,61	(6) 33132,04	(6) 33549,46	6338,150	$4\,p_s$	+0,001
$4\,p_s$	6338,121	6338,120	6338,150			
$1{,}5\,s_n - 5\,p_s$	(0,5) 33926,00	(1) 35355,49	(1,5) 35772,86	4114,714	$5\,p_s$	+0,264
$5\,p_s$	4114,731	4114,670	4114,750			
$1{,}5\,s_n - 6\,p_s$	(0) 35155,0	(0) 36584,3	(0,5) 37001,86	2885,75	$6\,p_s$	−0,224
$6\,p_s$	2885,7	2885,86	2885,75			
$1{,}5\,s_n - 7\,p_s$		(0,5) 37332,0	(3) 37750,18	2137,8	$7\,p_s$	+1,78
$7\,p_s$		2138,2	2137,43			
$1{,}5\,s_n - 8\,p_s$			(0,5) 38245,0	1642,6	$8\,p_s$	−2,0
$8\,p_s$			1642,6			

$$(m\,p_s) = N/\left(m + p_s + \pi_s/m^2\right)^2.$$

$p_s = +0{,}1691663.$

$\pi_s = -0{,}1437493.$

$1{,}5\,s_s - m\,p_s$.

		beob.–ber. $\Delta\,(m\,p_s)$
$1{,}5\,s_s - 2\,p_s$	(20) 15615,199	+0,001
$2\,p_s$	24272,411	
$1{,}5\,s_s - 3\,p_s$	(10) 28788,90	−3,430
$3\,p_s$	11098,710	
$1{,}5\,s_s - 4\,p_s$	(9) 33517,32	−0,71
$4\,p_s$	6370,29	
$1{,}5\,s_s - 5\,p_s$	(2) 35755,33	0,00
$5\,p_s$	4132,28	
$1{,}5\,s_s - 6\,p_s$	(1) 36991,07	−0,13
$6\,p_s$	2896,54	
$1{,}5\,s_s - 7\,p_s$	(4) 37745,2	−0,5
$7\,p_s$	2142,4	
$1{,}5\,s_s - 8\,p_s$	(1,5) 38240,4	−2,1
$8\,p_s$	1647,2	
$1{,}5\,s_s - 9\,p_s$	(1) 38581,4	−2,4
	1306,2	

$$(m\,p_s) = N/\left(m + p_s + \pi_s/m^2\right)^2.$$

$p_s = +0{,}1572927.$

$\pi_s = -0{,}125693.$

$1{,}5\,s_n - m\,p_{10}$

	$1{,}5\,s_2 - m\,p_{10}$	$1{,}5\,s_3 - m\,p_{10}$	$1{,}5\,s_4 - m\,p_{10}$	$1{,}5\,s_5 - m\,p_{10}$	Mittel ($m\,p_{10}$)		I. beob.–ber. $\Delta\,(m\,p_{10})$	II. beob.–ber $\Delta\,(m\,p_{10})$
$1{,}5\,s_n - 2\,p_{10}$	(8) 12369,06	(8) 13439,163	(10) 13798,498	(10) 14215,950	25671,654	$2\,p_{10}$	+0,003	+0,003
$2\,p_{10}$	25671,671	25671,645	25671,662	25671,660				
$1{,}5\,s_n - 3\,p_{10}$	(6) 26629,24	(6) 27699,31	(3) 28058,69	(6) 28476,10	11411,490	$3\,p_{10}$	−0,003	−0,003
$3\,p_{10}$	11411,491	11411,498	11411,470	11411,510				
$1{,}5\,s_n - 4\,p_{10}$	(6) 31560,84	(8) 32630,89	(6) 32990,30	(8) 33407,84	6479,926	$4\,p_{10}$	−2,559	−1,402
$4\,p_{10}$	6479,891	6479,918	6479,86	6479,770				
$1{,}5\,s_n - 5\,p_{10}$	(1,5) 33859,42	(2) 34929,52	(2) 35288,89	(0,5) 35706,3	4181,293	$5\,p_{10}$	+0,003	+0,003
$5\,p_{10}$	4181,311	4181,288	4181,270	4181,31				
$1{,}5\,s_n - 6\,p_{10}$	(0,5) 35120,68	(1) 36190,72	(1) 36550,03	(0) 36967,0	2920,09	$6\,p_{10}$	+0,92	−0,772
$6\,p_{10}$	2920,051	2920,088	2920,13	2920,6				
$1{,}5\,s_n - 7\,p_{10}$			(0,5) 37313,7		2156,5	$7\,p_{10}$	+5,0	+1,5
$7\,p_{10}$			2156,5					

(Eingegangen 14. Juni 1919.)

I. $(m\,p_{10}) = N/(m + p_{10} + \pi_{10}/m^2 + c\,e^{m/2})^2$.

$p_{10} = +0{,}12317679.$
$\pi_{10} = -0{,}23141155.$
$c = +0{,}000661499.$

II. $(m\,p_{10}) = N/(m + p_{10} + \pi_{10}\,e^{2/m} + c\,e^{m/2})^2$.

$p_{10} = +0{,}1821450.$
$\pi_{10} = -0{,}04259146.$
$c = 0{,}0002768762.$

Die Schwingungsdifferenzen $1{,}5\,s_n - 1{,}5\,s_{n-7}$ kommen noch bei zwei nicht in Serien geordneten Gruppen vor:

$1{,}5\,s_2 - x$	$1{,}5\,s_3 - x$	$1{,}5\,s_4 - x$	$1{,}5\,s_5 - x$
(2,5) 31164,00	(2) 32234,09	(4) 32593,42	(1) 33010,88
x 6876,731	6876,718	6876,740	6876,730
$1{,}5\,s_2 - y$		$1{,}5\,s_4 - y$	$1{,}5\,s_5 - y$
(0) 31180,59		(1,5) 32609,86	(3) 33027,37
y 6860,141		6860,30	6860,24

2. *Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons;* *von W. Hahnemann und H. Hecht.*

Wir haben vor kurzem[1]) eine Theorie der Wirkungsweise eines Telephons veröffentlicht, die auf einer Methode beruht, die die mechanisch-akustischen Arbeitsvorgänge der schwingenden Telephonmembran durch äquivalente, elektrische Arbeitsgrößen ersetzt. In der hier folgenden Abhandlung soll eine sich aus dieser Theorie ergebende experimentelle Untersuchungsmethode von Telephonen entwickelt und Messungen der mechanisch-akustischen Größen, insbesondere des Wirkungsgrades eines Telephons, mitgeteilt werden.

I. Die Methode.

Denkt man sich in die Zuleitungen eines Telephons ein Wattmeter geschaltet, das selbst keinen Eigenverbrauch be-

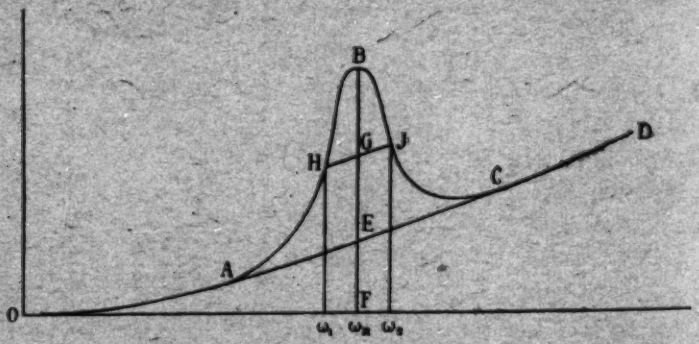


Fig. 1.

sitzen möge, und erregt man das Telephon mit Wechselstrom konstanter Erregung und veränderlicher Frequenz, so erhält man im Prinzip das Bild der Fig. 1, in der als Abszisse die Frequenz ω und als Ordinate die vom Telephon aufgenommene

1) W. Hahnemann und H. Hecht, Schallgeber und Schallempfänger I, Physikal. Zeitschr. 20. S. 104ff. 1919.

Leistung aufgetragen ist. Diese Leistung beschreibt bei einfachen Schwingungsgebilden die Resonanskurve $OABCD$ und hat für die Frequenz ω_R, die der mechanischen Eigenschwingung des Telephons entspricht, ein Maximum. Sowohl nach den niederen, wie nach den höheren Frequenzen zu verläuft die Resonanzkurve in die mehr oder weniger geradlinigen Strecken OA und CD. Denkt man sich diese Kurvenstücke innerhalb der Resonanzstelle ABC stetig ineinander überführt, so erhält man die Kurve $OAECD$. Durch diese Darstellung der Leistungsaufnahme erkennt man, daß die gesamte Leistung in zwei Teile zerfällt:

> einen von der Bewegung der Telephonmembran abhängigen Teil (Ordinate zwischen Kurve ABC und Kurve AEC) und einen von der Membranbewegung unabhängigen Teil (Ordiante zwischen Kurve $OAECD$ und Abszissenachse).

Der erste Teil stellt die mechanisch-akustische Leistung, der zweite die im Eisen des Telephons verbliebene Leistung dar, die eine Erwärmung desselben hervorruft. Die Kurve $OAECD$ kann man auch experimentell finden, indem man die Membran in ihrer Arbeitsstellung durch Festbremsen an der Bewegung hindert und bei verschiedenen Frequenzen und konstanter Erregung die Verluste direkt mißt.

Fällt man vom Resonanzpunkte B ein Lot auf die Abszissenachse, welches diese bei F trifft, während es die Verlustkurve bei E schneidet, so stellt das Verhältnis $BE:BF$ den mechanisch-akustischen Wirkungsgrad des Telephons in Resonanz dar. Die der Strecke BE entsprechende mechanisch-akustische Leistung ist nun nicht ohne weiteres die rein-akustische Leistung, sondern stellt die gesamte von der Membranbewegung abhängige Leistung dar. Diese besteht im allgemeinen aus den drei Beträgen: mechanische Leistung innerhalb des Membranmaterials und an den Befestigungsstellen der Membran, Gasreibung in dem vorderen und hinteren Luftraum und abgegebene Schalleistung. Wir wollen im Laufe dieser Untersuchung zeigen, wie man diese Einzelbeträge experimentell trennen und den akustischen Wirkungsgrad bestimmen kann, den wir als das Verhältnis der auf den Gehörgang übertragenen Leistung zu der gesamten vom Telephon aufgenommen Leistung definieren.

Außer durch die Lage der Resonanzfrequenz und den Wirkungsgrad ist die Resonanzkurve noch durch die Dämpfung charakterisiert. Denken wir uns zunächst die Resonanzkurve so schmal, daß die Strecke AEC praktisch durch eine Gerade dargestellt werden kann, so können wir durch den Halbierungspunkt G der Strecke BE eine Parallele zu AEC legen, die die Resonanzkurve in den Punkten H und J schneidet, und von diesen Punkten Lote auf die Abszissenachse fällen, die diese an den Stellen $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$ treffen; dann ist die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = \pi \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_R}.$$

Kann man die Kurve AEC nicht mehr einer Geraden gleichsetzen, so muß man aus den Ordinatenabschnitten zwischen Resonanzkurve und Verlustkurve eine neue Resonanzkurve über einer Geraden als Nullinie zeichnen und nach der eben genannten Methode die Dämpfung ermitteln.

Für die später sich als notwendig ergebende Bestimmung der mechanischen Leistung weit außerhalb der Resonanz ist das graphische Verfahren zu ungenau, und man muß aus den durch die Resonanzkurve gefundenen Werten der Dämpfung und Resonanzfrequenz die Leistung für eine gegebene Verstimmung berechnen.

Bezeichnen M bzw. M_R die mechanischen Leistungen bei einer beliebigen Frequenz ω bzw. der Resonanzfrequenz ω_R, so findet man aus der allgemeinen mechanischen Schwingungsgleichung, daß

$$\frac{M}{M_R} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_R^2 - \omega^2}{\omega_R \cdot \omega} \frac{\pi}{\mathfrak{d}}\right)^2}$$

ist. Aus dieser Gleichung folgt für

$$\frac{\omega_R}{\omega} = 1 + x$$

und Beschränkung auf die Nähe der Resonanz die bekannte Dämpfungsformel

$$\mathfrak{d} = 2\pi x \sqrt{\frac{M/M_R}{1 - M/M_R}},$$

die für $M/M = \frac{1}{2}$ in die obige einfache übergeht.

Hat man es nicht mehr mit einem einzelnen Schwingungssystem zu tun, sondern mit zwei durch Kopplung miteinander verbundenen, so erhält man statt einer Resonanzstelle im allgemeinen deren zwei. Die Lage der Resonanzstellen in der gekoppelten Kurve im Verhältnis zu den Resonanzstellen vor der Kopplung hängt im hohen Grade von der Größe der Kopplung ab. Immer aber wird das von vornherein tiefere System durch die Kopplung erniedrigt und das ungekoppelte höhere System erhöht. Besitzen die beiden ungekoppelten Systeme gleiche Resonanzfrequenz, so weist die gekoppelte Resonanzkurve auch zwei Resonanzstellen auf, die symmetrisch zu derjenigen der ungekoppelten Systeme liegen. Die Theorie der gekoppelten Schwingungen[1]) ist nicht so weit entwickelt, daß man für alle Fälle der Kopplung, Dämpfung und Resonanzfrequenzen aus der Resonanzkurve der gekoppelten Systeme diejenige der ungekoppelten und umgekehrt ableiten könnte; dies ist nur in ganz wenigen Spezialfällen möglich. Es wird sich nun aber im Laufe unserer Untersuchung zeigen, daß bei Telephonen im allgemeinen doppelwellige Resonanzkurven auftreten. Um die erhaltenen Resultate auf einfache Weise rechnerisch verwerten zu können, haben wir im Folgenden angenommen, daß man auch bei doppelwelligen Kurven die Dämpfung an den beiden Resonanzstellen wie bei einwelligen Kurven berechnen kann, solange die Kurve an den Resonanzstellen zur Ordinate im Resonanzpunkt symmetrisch ist und, was hiermit bis zu einem gewissen Grade gleichbedeutend ist, sich zwischen den beiden Resonanzstellen wieder bis auf die Nullinie senkt. Kommt das Schwingungsgebilde zwischen den beiden Resonanzstellen wieder zur Ruhe, was durch das Herabgehen auf die Nullinie angezeigt wird, so legt dies eben den Schluß nahe, daß das Schwingungsgebilde sich an jeder der beiden Resonanzstellen nahezu wie ein einwelliges Gebilde verhalten wird. Hierbei kann natürlich die Kopplung im allgemeinen schon so fest sein, daß eine starke gegenseitige Beeinflussung der Dämpfungen eingetreten ist.

Da die später mitgeteilten Resonanzkurven des Telephons, soweit sie doppelwellig sind, die Eigenschaft besitzen, zwischen den beiden Resonanzstellen auf Null oder nahezu auf Null

1) M. Wien, Ann. d. Phys. 61. S. 151. 1897.

herabzugehen, so haben wir für ihre Auswertung diese die Rechnung vereinfachende Annahme gemacht und die Dämpfung und Leistungen außerhalb der Resonanz für die von der anderen Resonanzfrequenz abgekehrte Seite wie bei einwelligen Gebilden berechnet. Welche Fehler man hierbei begeht, ist schwer zu sagen, wie ja überhaupt die Zulässigkeit der einfachen, einwelligen Berechnung nicht exakt abgeleitet, sondern nur allgemein begründet ist. Wie uns scheinen will, sind die Fehler vom Grade der Vollkommenheit abhängig, mit der die Resonanzkurve auf Null herabgeht, und würden daher in den vorliegenden Fällen die Resultate nicht wesentlich verändern können.

Die Aufnahme der Resonanzkurve eines Telephons hatten wir uns bisher in einfacher Weise durch Verwendung eines Wattmeters gedacht. Da der Eigenverbrauch solcher Instrumente aber viel zu groß ist, muß man zu einer anderen, indirekten Methode seine Zuflucht nehmen. Aus der Literatur ist bekannt[1]), daß und wie man die Watt- und wattlosen Widerstände beispielsweise eines Telephons in der Brückenanordnung für verschiedene Frequenzen bestimmen kann. Solche Kurven der Watt- bzw. wattlosen Widerstände eines Telephons in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz sind u. a. bereits von Wagner in seiner unten zitierten Arbeit veröffentlicht worden. Sie geben aber noch keinen unmittelbaren Aufschluß über das Verhalten des Telephons als Schallgeber. Das charakteristische Merkmal hierfür ist die Resonanzkurve. Wie man diese aus den Watt- und wattlosen Widerständen finden kann, soll daher zunächst im Folgenden gezeigt werden.

Wir denken uns die Messungen in der Brücke für verschiedene Frequenzen ausgeführt und nennen den wattlosen Widerstand des Telephons für die Frequenz ω in 2π Sekunden ωL. Der Wattwiderstand setzt sich aus drei Beträgen zusammen: dem Ohmschen Widerstand der Wicklung, dem Verlustwiderstand, entstanden durch Hysterese- und Wirbelstromverbrauch im Eisen und dem mechanisch-akustischen Arbeitswiderstand. Nennen wir diese drei Widerstände w_Ω, w_v und w_s, so hat das Schema des elektrischen Kreises das Aussehen der

1) K. W. Wagner, Über die Verbesserung des Telephons. Elektrotechnische Zeitschr. 1911. S. 80ff. und 110ff.

Fig. 2. Wir haben in unserer oben zitierten Arbeit gefunden, daß wir die gesuchte Resonanzkurve des elektro-mechanischen Transformators, der hier im gewöhnlichen Telephon im Prinzip vorliegt, erhalten, wenn wir bei veränderlicher Frequenz ω und konstantem Flux, d. h. konstantem e/ω die Leistungsaufnahmen in den Widerständen w_e und w_s auftragen, wobei e die Spannung an der Spule ohne Ohmschen Widerstand ist. Nennen wir den gesamten Wattwiderstand des Telephons w, so daß

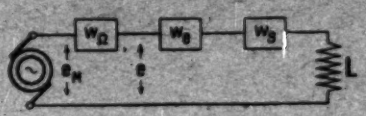


Fig. 2.

$$w_e + w_s = w - w_\Omega$$

ist, so ist die die Resonanzkurve liefernde Leistung

$$W = i^2 (w - w_\Omega),$$

wenn i die Stromstärke im Telephon ist. In der Größe W und damit in den später mitgeteilten Resonanzkurven ist also nur die im Eisen verbrauchte und die in mechanisch-akustische Form verwandelte Leistung enthalten, nicht aber die im Spulenwiderstand verzehrte. Diese Darstellung ist deshalb zweckmäßig, weil die Spulenverluste sich mit i^2 ändern, und dieses gerade im Bereiche der Resonanz variabel ist. Da man aber die Verlustlinie für die Resonanzstelle graphisch durch Interpolation ermitteln muß, wenn man nicht zu dem unsicheren Verfahren übergehen und die Membran in ihrer Arbeitsstellung festbremsen und die Verlustlinie direkt aufnehmen will, so ist für die Konstruktion der Verlustlinie nötig, daß die Verluste mit der Frequenz gleichmäßig ansteigen. Dies tun bei konstanten e/ω, für das die Resonanzkurve aufgenommen wird, wohl die Eisenverluste, nicht aber die Ohmschen Verluste, da i in der Nähe der Resonanz eine v-Kurve[1]) beschreibt.

Führt man in den Ausdruck für W statt der Stromstärke i die Spannung e ein, so wird

$$W = e^2 \frac{w - w_\Omega}{(w - w_\Omega)^2 + (\omega L)^2}.$$

Drücken wir die bei einer beliebigen Frequenz ω herrschende Leistung W durch die bei der Resonanzfrequenz ω_R auftretende

1) Vgl. Schallgeber und Schallempfänger I, Kapitel 3.

Leistung W_R aus, so ist, wenn w_R bzw. $\omega_R L_R$ die bei Resonanz gemessenen Werte des Watt- bzw. wattlosen Widerstandes sind,

$$\frac{W}{W_R} = \left(\frac{e}{e_R}\right)^2 \cdot \frac{w - w_\Omega}{w_R - w_\Omega} \cdot \frac{(w_R - w_\Omega)^2 + (\omega_R L_R)^2}{(w - w_\Omega)^2 + (\omega L)^2} .$$

Wie wir bereits oben erwähnten, erhalten wir die Resonanzkurve, wenn

$$\frac{e}{w} = \frac{e_R}{w_R}$$

ist; es wird daher

$$\frac{W}{W_R} = \left(\frac{\omega}{\omega_R}\right)^2 \frac{w - w_\Omega}{w_R - w_\Omega} \frac{(w_R - w_\Omega)^2 + (\omega_R L_R)^2}{(w - w_\Omega)^2 + (\omega L)^2} .$$

Nach dieser Formel sind die später mitgeteilten Resonanzkurven aus den in der Brücke gemessenen Werten von w, w_R, L und L_R und dem Gleichstromwiderstand der Wicklung w_Ω berechnet. Als Abszissenteilung sind Perioden pro Sekunde gewählt, während die Ordinatenteilung in gewisser Weise willkürlich ist, da die Leistungen bei den einzelnen Frequenzen durch diejenige bei einer beliebig angenommenen, die im besonderen die Resonanzfrequenz sein kann, ausgedrückt werden.

II. Die Versuchsergebnisse und ihre rechnerische Verwertung.

Zu der experimentellen Untersuchung dienten zwei gleichgebaute Telephone in der Ausführung der gewöhnlichen Posttelephone. Da die erhaltenen Resultate miteinander gut übereinstimmten, beschränken wir uns im Text und in den Figuren beispielsweise auf die Messungen an einem Exemplar und werden nur charakteristische Abweichungen der beiden besonders erwähnen. Der Durchmesser der Membran betrug 54 mm, ihre Dicke 0,15 mm, der Gleichstromwiderstand der Wicklung etwa 1000 Ohm, die Windungszahl 3400, die Selbstinduktion 0,4 bis 0,3 Henry bei den sekundlichen Periodenzahlen 400 bis 2000. Aus Gründen, die gleich erläutert werden sollen, wurde die vordere Hörmuschel abgeändert und bestand nicht aus einem Stück, sondern war, wie aus Fig. 8 ersichtlich, in den Ring R verstellbar ein-

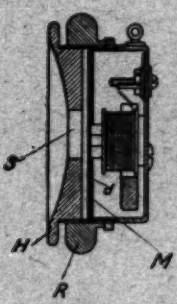
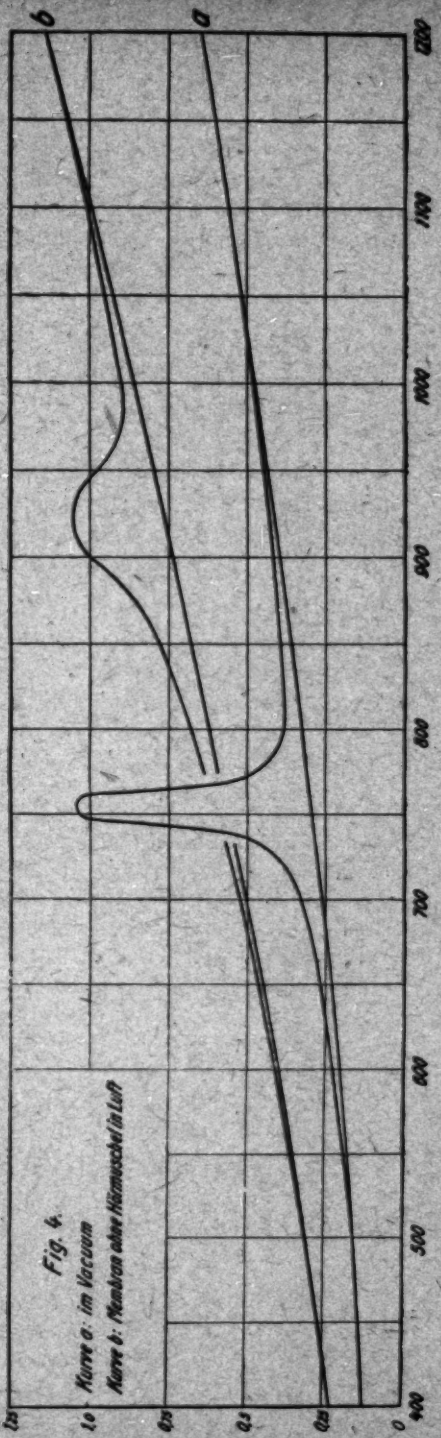


Fig. 8.

gesetzt, so daß der Abstand d zwischen der Membran M und der Hörmuschel H von etwa $^1/_2$ mm (normale Einstellung) bis 2 mm verändert werden konnte. Die Schallöffnung S hatte einen Durchmesser von 15 mm.

Bei den Versuchen zeigte es sich, daß das Telephon akustisch aus zwei miteinander gekoppelten Schwingungssystemen besteht. Das eine ist im wesentlichen gebildet durch die Membran mit ihren mechanisch-akustischen Eigenschaften, das zweite durch den zwischen Membran und Hörmuschel liegenden Luftraum. Die Untersuchung begann damit, daß zunächst die Resonanzkurven der Membran allein ohne das zweite Schwingungsgebilde des vorderen Luftraumes im Vakuum und in der Luft aufgenommen wurden. Zu diesem Zweck wurde die verstellbare Hörmuschel H ganz entfernt, so daß die Membran M nach außen zu vollkommen frei war, während die Räume vor und hinter der Membran zum Ausgleich des statischen Druckes durch kleine Öffnungen kommunizierten. Die beiden Resonanzkurven sind in Fig. 4*a* und 4*b* ge-



zeichnet. Wie man erkennt, besitzt die Vakuumkurve eine tiefere Abstimmung und geringere Dämpfung als die Luftkurve, 755 gegen 920 bzw. 0,12 gegen 0,21. Die Erklärung hierfür ist die folgende:

Die Resonanzfrequenz der Vakuumkurve ist bestimmt durch die Membranelastizität und durch die Schwingungsmasse der Membran[1]), ihre Dämpfung durch die Leistung, die in der Membran selbst und an ihren Befestigungsstellen im Ringe verbraucht wird.

Die Erhöhung der Resonanzfrequenz in Luft rührt von der Elastizität des durch die Telephonkapsel abgeschlossenen hinteren Gasraumes her, die zu der Membranelastizität hinzutritt. Die gleichzeitig beim Übergang vom Vakuum nach Luft eintretende erniedrigende Wirkung der vermehrten Schwingungsmasse infolge mitschwingender Mediummasse an der äußeren freien Membranfläche ist klein gegen die beobachtete Erhöhung, da die mitschwingende Mediummasse gegen die Membranmasse selbst zu vernachlässigen ist.[2])

Die Erhöhung der Dämpfung der Luftkurve rührt nur von der Gasreibung in dem die Elastizitätserhöhung hervorrufenden hinteren Gasraum her, da die akustische Strahlungsdämpfung der vorderen Membranfläche zu vernachlässigen ist.[3])

---

1) Vgl. W. Hahnemann u. H. Hecht, Schallfelder und Schallantennen II. Physikal. Zeitschr. 18. S. 261ff. 1917; im folgenden mit a. a. O. bezeichnet.

2) Nach a. a. O. berechnet sich die mitschwingende Luftmasse zu $0{,}4 \cdot 2{,}7^3 \cdot 0{,}0012 = 0{,}0096$ g und die Schwingungsmasse der Membran zu $(0{,}45 \cdot 2{,}7)^2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}015 \cdot 7{,}7 = 0{,}54$ g. Die später experimentell bestimmte Schwingungsmasse der Membran ist 0,66 g. Es zeigt sich hierbei, daß bei so dünnen Membranen, die unter äußeren und inneren Spannungen stehen, die Annahme einer bestimmten Deformationskurve nicht mehr zulässig ist und zu falschen Resultaten führt. Dies wurde auch noch weiterhin dadurch bestätigt, daß ein geometrisch völlig gleichgebautes Telephon im Vakuum eine Abstimmung von 525 gegen 755 des vorliegenden Telephons besaß.

3) Nach a. a. O. beträgt die Strahlungsdämpfung von Stahlmembranen in Luft

$$5 \cdot 10^{-8} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{12}}{7{,}7^2}} = 0{,}003\,,$$

während die Dämpfung der Kurve *b* in Fig. 4 den Betrag von 0,31 aufweist.

Zur eigentlichen akustischen Untersuchung des Telephons wurde die Hörmuschel wieder angebracht und drei Arten von Resonanzkurven aufgenommen: Eine bei offener, eine zweite bei geschlossener Schallöffnung und eine dritte, wenn die Schallöffnung, wie es dem gewöhnlichen Gebrauch eines Telephons entspricht, an das menschliche Ohr gelegt wurde. Aus diesen Aufnahmen erhält man, wie sich des näheren später zeigen wird, den Wirkungsgrad des Telephons bei Ohrlage folgendermaßen: Durch Interpolation aus den Messungen bei offener und geschlossener Schallöffnung findet man die schädliche oder Verlustdämpfung für die Resonanzfrequenz bei Ohrlage und zieht diesen Betrag von der bei Ohrlage gemessenen Dämpfung ab, wodurch man die Nutzdämpfung erhält. Den mechanisch-akustischen Wirkungsgrad der Resonanzkurve bei Ohrlage multipliziert man alsdann mit dem Verhältnis von Nutzdämpfung zu Gesamtdämpfung und erhält den akustischen Wirkungsgrad. Da sich die Resonanzkurve nur auf die Eisenverluste und nicht auch auf die Kupferverluste bezieht, ist dieser Wirkungsgrad noch mit dem Verhältnis Eisenwiderstand zu Eisenwiderstand + Spulenwiderstand zu multiplizieren[1]), um den totalen akustischen Wirkungsgrad bei Ohrlage für die entsprechende Resonanzfrequenz zu erhalten. Um die Bedeutung und den Einfluß der einzelnen mechanisch-akustisch wirksamen Teile des Telephons besser erkennen zu können, wurden die drei verschiedenen Resonanzkurven — Schallöffnung offen, am Ohr und geschlossen — bei verschiedenen Abständen zwischen Membran und Hörmuschel aufgenommen. In den Figg. 5—7 sind die Resonanzkurven für 2, 1 und $^1/_2$ mm Abstand mitgeteilt, und zwar die *a*-Kurven für offene, die *b*-Kurven für am Ohr befindliche und die *c*-Kurven für geschlossene Schallöffnung. Wir wollen im Folgenden zunächst die einzelnen Kurven und zwar in der Aufeinanderfolge *a*-, *c*- und *b*-Kurven besprechen, und dann nach dem eben angegebenen Schema den Wirkungsgrad berechnen.

---

1) Dies gilt nur für kleine Wirkungsgrade; andernfalls muß der Eisenwiderstand mit dem Faktor $\frac{1}{1-\eta}$ multipliziert werden, wobei η der aus der Resonanzkurve sich ergebende Wirkungsgrad ist.

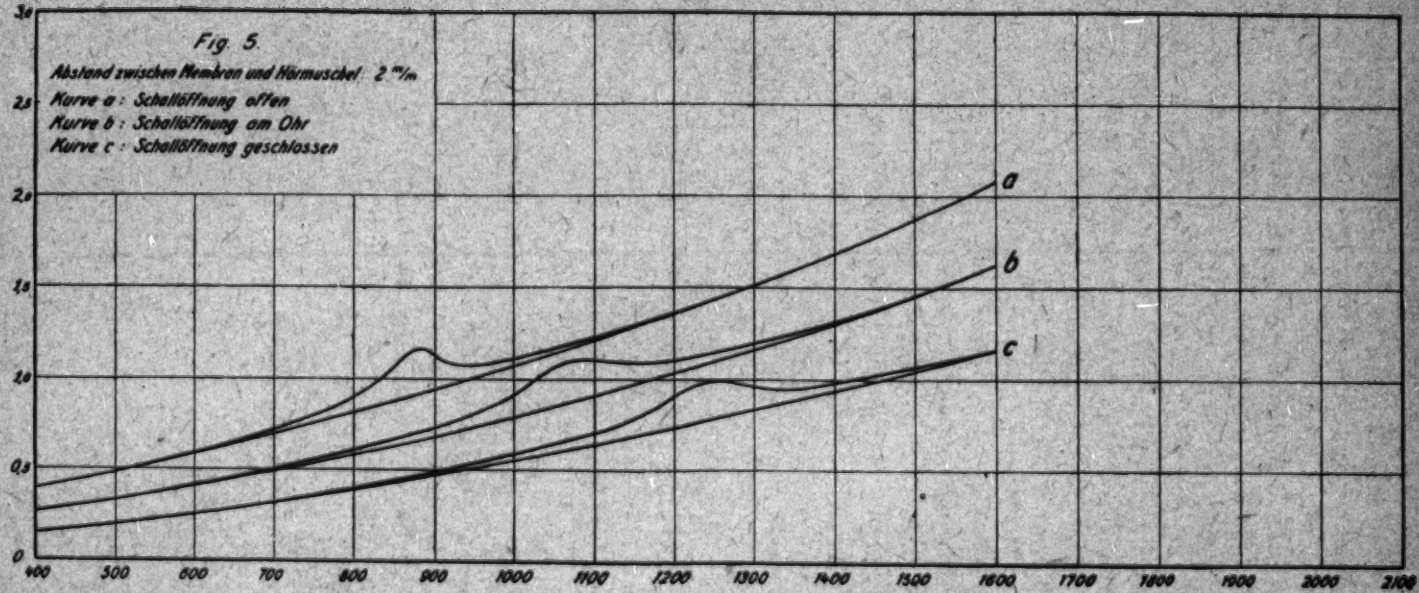


Fig. 5.
Abstand zwischen Membran und Hörmuschel 2 mm
Kurve a: Schalläffnung offen
Kurve b: Schalläffnung am Ohr
Kurve c: Schalläffnung geschlossen
a
b
c
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
1600
1700
1800
1900
2000
2100

Die *a*-Kurven der Figg. 5—7 stellen, wie gesagt, die Resonanzkurven des Telephons bei offener Schallöffnung für die Abstände 2, 1 und $^1/_2$ mm dar. Die Resonanzfrequenz der Membran, die im freien Zustande entsprechend der Kurve 4*b* 920 betrug, liegt jetzt bei 870, 865 und 855. Gleichzeitig bemerken wir eine zweite Resonanzstelle bei 1800[1]), die entsprechend dem früher Gesagten dem ein zweites Schwingungssystem bildenden vorderen Luftraum zuzuschreiben ist und die Resonanzfrequenz der tiefer abgestimmten Membran erniedrigt hat. Man kann sich diesen Einfluß des vorderen Luftraumes auch so vorstellen, daß die Luft bei der Schwingung der Membran durch enge Querschnitte gepreßt wird, hier größere Amplituden als die Membran selbst macht und so in großer Übersetzung als zusätzliche Masse, d. h. nach unten verstimmend, für die Membran einläuft. Wir kommen auf die Vorgänge in diesem Schwingungssystem des vorderen Luftraumes noch später zurück und wollen auch zeigen, wie man seinen Einfluß auf die Abstimmung des tieferen Systems angenähert berechnen kann.

Außer dieser Änderung der Resonanzfrequenz beobachten wir eine Zunahme der Dämpfung mit kleiner werdendem Abstande. Die Dämpfung beträgt für 2 mm 0,29 und ist damit wohl infolge von Ungenauigkeit der Messung und graphischen Auswertung noch etwas geringer als diejenige der freien Membran. Für 1 mm erhöht sich die Dämpfung aber bereits auf 0,38 und steigt für $^1/_2$ mm auf 0,55. Diese Zunahme ist nicht auf Rechnung gestrahlter akustischer Leistung zu setzen, da diese, wie man berechnen kann, keine Erhöhung der Dämpfung ergeben kann.[2]) Wir müssen also annehmen, daß infolge Amplitudenübersetzung der Luft, die sich ja in der vermehrten Schwingungsmasse und Abstimmungserniedrigung

1) Die *a*-Kurve der Fig. 5 war ursprünglich nicht bis zu so hohen Frequenzen aufgenommen. Nachträglich ist die Resonanzstelle bei 1800 auch für diesen Abstand beobachtet worden.

2) Bringt man Gasräume mit strahlenden Öffnungen vor schwingenden Membranen an und macht man die Öffnungen, wie es hier der Fall ist, kleiner als die Membran, so ergibt eine einfache Rechnung nach a. a. O., daß die Strahlungsdämpfung stets kleiner sein muß, als die der Membran allein, d. h. kleiner als 0,003, wie früher berechnet.

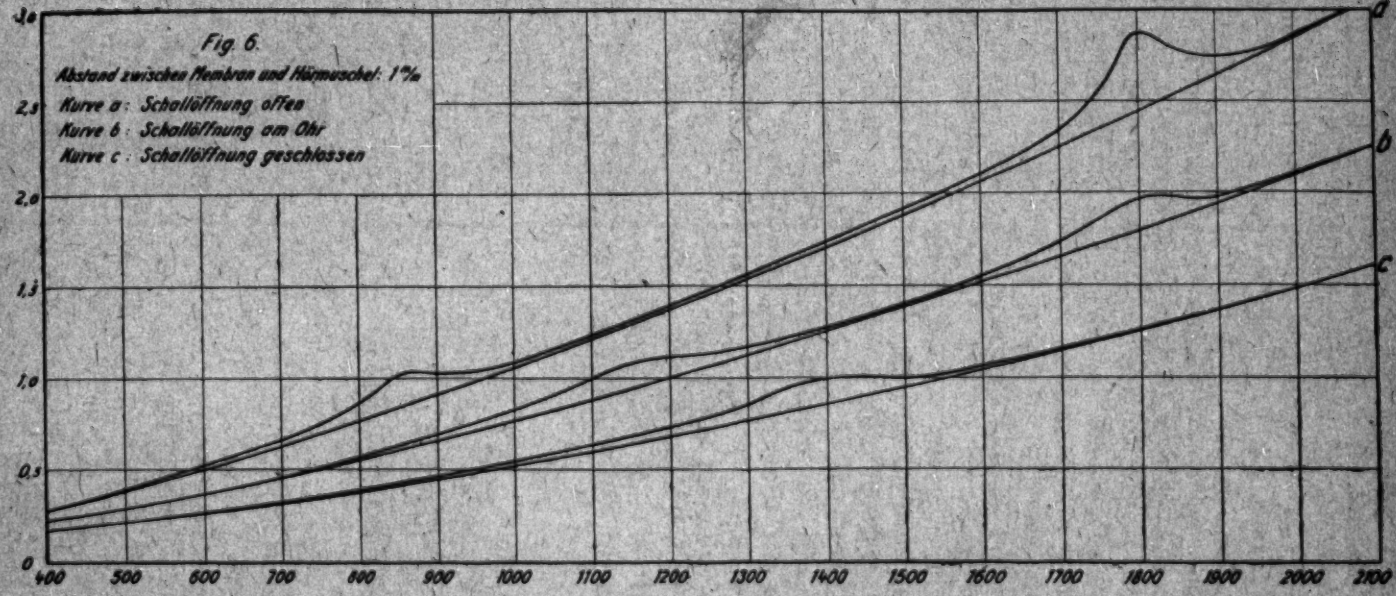


Fig. 6.
Abstand zwischen Membran und Hörmuschel: 1%
Kurve a: Schalläffnung offen
Kurve b: Schalläffnung am Ohr
Kurve c: Schalläffnung geschlossen
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
1600
1700
1800
1900
2000
2100
a
b
c

zu erkennen gab, eine Gasreibung entstanden ist, die gleichzeitig die Zunahme der Dämpfung bedingt.

Die Resonanzkurven für geschlossene Schallöffnung sind für die Abstände 2, 1 und $^1/_2$ mm in den c-Kurven der Figg. 5 bis 7 dargestellt.

Was zunächst ins Auge fällt, ist das starke Ansteigen der Resonanzfrequenz, die auf 1280, 1880 und 1500 in die Höhe gegangen ist. Gleichzeitig hat eine weitere Zunahme der Dämpfung stattgefunden, die jetzt 0,31, 0,40 und 0,76 beträgt. Diese Dämpfungserhöhung rührt von innerer Gasreibung im geschlossenen vorderen Raum her und wächst schnell mit abnehmendem Abstande zwischen den beiden Flächen. Unter Berücksichtigung der Fehler kann man bei 2 mm Abstand die Dämpfung noch zu gleich groß annehmen wie diejenige bei offenem vorderen Gasraum (0,29) und wie bei freier Membran (0,31). Bei dem Abstande von 2 mm ist der Vorgang im vorderen Raum daher noch rein elastisch, und wir können für diesen Fall die Elastizität des Raumes und damit die Erhöhung der Resonanzfrequenz berechnen.

Ist Δa die Mittelpunktsamplitude der Telephonmembran, R ihr Radius, p_0 und v_0 Normaldruck und Volumen des vorderen Gasraumes, Δp die durch das Deformationsvolumen Δv der Membran hervorgerufene Druckamplitude, so ist, da der Vorgang adiabatisch verläuft, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\frac{1}{k}\,\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta v}{v_0},$$

wenn k das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist. Nehmen wir das Deformationsvolumen zu

$$\Delta v = \tfrac{1}{3}\,\pi\,R^2\,\Delta a$$ [1])

an, so wird die reziproke Gaselastizität

$$\frac{\Delta p}{\Delta a} = \frac{k}{3\,d}\,p_0,$$

wenn d der Abstand zwischen Membran und Hörmuschel ist.

Schwingungsmasse und Elastizität sind stetig über die Membranfläche verteilt. Da wir die erstere bei den früheren Berechnungen auf die Mittelpunktsamplitude bezogen haben, werden wir dies zweckmäßig jetzt auch mit der Gaselastizität

1) a. a. O., S. 264.

Fig. 7.
Abstand zwischen Membran und Hörmuschel: 0,5 %
Kurve a: Schalllöffnung offen
Kurve b: Schalllöffnung am Ohr
Kurve c: Schalllöffnung geschlossen

tun und den gleichmäßig über die Oberfläche verteilten Druck auf eine im Mittelpunkt angreifende Kraft umrechnen, um seinen Einfluß auf die Resonanzfrequenz zu finden.

Da die Berechnung der Elastizität einer so dünnen Membran infolge ihrer inneren Spannungen usw. aus den geometrischen Dimensionen zu schlecht stimmenden Werten führte, wurde durch optische Messung der Mittelpunktsamplitude sowohl für eine im Mittelpunkt angreifende, konstante Kraft ΔP, wie auch für einen konstanten Gasdruck Δp die Elastizität der Membran experimentell ermittelt und gefunden, daß

$$\frac{\Delta P}{\Delta a} = 15 \cdot 10^6 [\mathrm{g\,sec^{-2}}]$$

$$\frac{\Delta p R^2}{\Delta a} = 14{,}5 \cdot 10^6 \text{ [1]}$$

war.

Mithin liefert die Gaselastizität eine äquivalente im Mittelpunkt angreifende Elastizität, deren reziproker Wert

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta a}\right)_{\mathrm{Gas}} = \frac{k R^2 p_0}{3 \cdot \frac{14{,}5}{15} \cdot d}$$

ist, und für den Fall $d = 2$ mm $18 \cdot 10^6$ [g sec^{-2}] beträgt. Die reine Membranelastizität vom reziproken Werte $15 \cdot 10^6$ erteilt der Membran im Vakuum eine Abstimmung von 755 Schwingungen in der Sekunde.[2]) Da die elastische Wirkung des hinteren Gasraumes die Abstimmung auf 920 erhöhte, so besitzt der hintere Raum eine Elastizität, deren reziproker Wert $7 \cdot 10^6$ ist. Durch die $18 \cdot 10^6$ Einheiten des vorderen Raumes von 2 mm Abstand, muß sich die Abstimmung also weiter auf

$$920 \sqrt{\frac{22 + 18}{22}} = 1240$$

erhöhen, was mit dem beobachteten Werte von 1230 gut übereinstimmt. Für die kleineren Abstände aber bleibt die Beobachtung immer mehr hinter der Rechnung zurück. Der Grund liegt wohl, wie wir schon aus der Zunahme der Dämpfung

1) Aus den Angaben der Hütte 1911, S. 620 würden die Werte $20 \cdot 10^6$ und $25 \cdot 10^6$ [g sec^{-2}] folgen.

2) Hieraus berechnet sich die Schwingungsmasse der Membran zu 0,66 g.

schließen konnten, darin, daß bei den kleinen Abständen starke innere Gasreibung die elastische Wirkung schwächt.

Abgesehen von diesen Verlusten tritt aber noch keine eigentliche akustische Leistung auf und, hätten wir es mit einem idealen reibungsfreien Gase zu tun, so würde bei offener wie bei geschlossener Schallöffnung für alle Abstände praktisch der gleiche Reibungs- oder Bremswiderstand herrschen wie bei der freien Membran in Luft und im Vakuum. Die einzigen mechanischen Verluste würden, da wir, wie wir bereits sahen, von Strahlung praktisch absehen können, in dem Membranmaterial und an den Befestigungsstellen auftreten. Da nun bei einem idealen Gase nur Massen- oder elastische Kräfte auftreten würden, die die leerschwingende Energie vergrößern, so müßte die Dämpfung auf alle Fälle eher abnehmen als zunehmen.

Man kann sich den Vorgang im vorderen Raum bei idealem Gase auch so vorstellen, daß es bei offener Schallöffnung nur Bewegungs- und keine Druckzustände, im Falle der geschlossenen Schallöffnung nur Druck- und keine Bewegungszustände gibt. In beiden Fällen ist daher die Leistung Null. Diese tritt erst auf, wenn wir das System Membran–vorderer Gasraum auf ein plastisches Gebilde mit nachgiebigen, arbeitverzehrenden Wänden arbeiten lassen, wie es zum Beispiel der äußere Gehörgang des menschlichen Ohres mit dem abschließenden Trommelfell ist.

Die dritte Schar von Resonanzkurven, in denen das Telephon an das Ohr einer sonst nicht an der Messung beteiligten Versuchsperson gelegt wurde, sind für die Abstände 2, 1 und $^1/_2$ mm in den *b*-Kurven der Figg. 5—7 dargestellt. Wie zu vermuten, liegen die Resonanzfrequenzen zwischen denjenigen bei offenem und geschlossenem vorderen Gasraum und zwar für die Abstände 2, 1 und $^1/_2$ mm bei 1070, 1130 und 1060. Die Resonanzfrequenzen zeigen nicht mehr die Regelmäßigkeiten der bisherigen Messungen. Wahrscheinlich sind die Abweichungen in nicht gleichmäßiger Lage und Druck des Telephons gegen das Ohr der Versuchsperson zu suchen, da hierauf leider nicht genügend geachtet war. Bei Wiederholung solcher Messungen müßte diesem Punkte jedenfalls mehr Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Außer diesem Einfluß auf die Resonanzfrequenz hat der

Gehörgang eine stark dämpfende Wirkung. Die Dämpfung für die Abstände 2, 1 und $^1/_2$ mm beträgt 0,47, 0,64 und 0,82. Bilden wir durch Interpolation der Dämpfung bei offenem und geschlossenem Raum die Verlustdämpfungen für die Resonanzfrequenz des am Ohr liegenden Telephons, so erhalten wir durch Differenzbildung die Nutzdämpfung, die ein Maß für die auf den Gehörgang übertragene Leistung ist. Diese Verlustdämpfungen haben die Werte 0,30, 0,39 und 0,65, die Nutzdämpfungen sind daher 0,17, 0,25 und 0,17. Wir haben nun mit den Verhältnissen $0{,}17 : 0{,}47 = 0{,}36$, $0{,}25 : 0{,}64 = 0{,}39$ und $0{,}17 : 0{,}82 = 0{,}21$ die aus den Resonanzkurven sich ergebenden mechanisch-akustischen Wirkungsgrade zu multiplizieren, um die rein akustischen Wirkungsgrade zu erhalten. Da die ersteren 0,20, 0,11 und 0,10 sind, so berechnen sich die letzteren zu 0,072, 0,043 und 0,021. Bei diesen Wirkungsgraden sind aber, wie schon früher erwähnt, gemäß Bildung der Resonanzkurven bisher nur die Eisenverluste und nicht auch die Kupferverluste in der Wicklung berücksichtigt. Da die den Eisenverlusten entsprechenden Wattwiderstände 880, 910 und 840 Ohm waren, während der Gleichstromwiderstand der Wicklung 960 Ohm betrug, so haben wir die obigen Zahlen mit den Verhältnissen $880 : 1840 = 0{,}48$, $910 : 1870 = 0{,}48$ und $840 : 1800 = 0{,}47$ zu multiplizieren und erhalten als totale akustische Wirkungsgrade für die auf den Gehörgang übertragene Leistung bei den entsprechenden Resonanzfrequenzen die Werte 0,034, 0,021 und 0,010.

Für die Beurteilung der Güte eines Telephons zur Übertragung der menschlichen Sprache interessiert nun aber nicht so sehr die Empfindlichkeit und der Wirkungsgrad an einer bestimmten Resonanzstelle, sondern der Wert der entsprechenden Größen im Bereich der normalen Sprechfrequenzen. Da die letzteren, wie man wohl annehmen kann[1]), zwischen 500 und 1000 Perioden, d. h. unterhalb der tieferen, bei etwa 1100 gefundenen Resonanzstelle liegen, so können wir den Wirkungsgrad bei Verstimmung wie folgt berechnen, wenn wir annehmen, daß der Anteil der akustischen Nutzdämpfung an der gesamten Dämpfung bei Resonanz und Verstimmung der gleiche ist. Das Verhältnis der mechanischen Leistungen bei Verstimmung und Resonanz $M : M_R$ haben wir

1) Vgl. K. W. Wagner in seiner bereits zitierten Arbeit.

schon früher angegeben. Wir haben daher nur noch das Verhältnis der entsprechenden Gesamtverluste $V : V_R$ zu bilden, um die Änderung des mechanisch-akustischen Wirkungsgrades mit der Verstimmung zu finden. Nach Fig. 2 und den früher gewählten Bezeichnungen ist die Summe von Verlust- und mechanischer Leistung $V + M = i^2 w$. Drücken wir i durch e aus, so wird

$$V + M = e^2 \frac{w}{(w - w_\Omega)^2 + (\omega L)^2}.$$

Da sich die Spannungen wieder wie die Frequenzen verhalten müssen, so erhalten wir, ganz ähnlich wie früher für das Verhältnis der W, jetzt

$$\frac{V + M}{V_R + M_R} = \left(\frac{\omega}{\omega_R}\right)^2 \frac{w}{w_R} \cdot \frac{(w_R - w_\Omega)^2 + (\omega_R L_R)^2}{(w - w_\Omega)^2 + (\omega L)^2}.$$

Nennen wir den mechanisch-akustischen Wirkungsgrad bei Resonanz bzw. Verstimmung η_R bzw. η, so ist

$$\eta_R = \frac{M_R}{V_R + M_R} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{M}{V + M}$$

und daher

$$\eta = \eta_R \frac{M}{M_R} \cdot \frac{V_R + M_R}{V + M}.$$

Setzt man in diese Gleichung für

$$\frac{V_R + M_R}{V + M}$$

den eben abgeleiteten Wert und für M/M_R den früher gefundenen ein, so erhält man η ausgedrückt durch η_R, durch die gemessenen Werte der Watt- und wattlosen Widerstände und durch die Dämpfung. Dieses Verhältnis von $\eta : \eta_R$ stellt nun unter der obigen Annahme auch das Verhältnis der rein akustischen Wirkungsgrade bei Verstimmung und Resonanz dar, und nach dieser Formel sind die akustischen Wirkungsgrade des Telephons für 1000, 800, 600 und 400 Perioden pro Sekunde berechnet. Es ergeben sich für die Abstände von 2, 1 und $^1/_2$ mm in Promille die Werte 20, 10 und 9 für 1000 Perioden, 2,8, 2,3 und 2,3 für 800 Perioden, 0,82, 0,80 und 0,74 für 600 Perioden und 0,30, 0,30 und 0,22 für 400 Perioden. Wie man sieht, nimmt der Wirkungsgrad des Telephons am Ohr mit zunehmender Verstimmung stark ab und ist bei

großer Verstimmung fast unabhängig von den Abständen zwischen Membran und Hörmuschel. Ein Sprechversuch bei den Abständen 2, 1 und $^1/_2$ mm zeigte keine wesentliche Änderung in Klangfarbe und Lautstärke und bestätigte hierdurch das erhaltene Resultat, da man, wie schon erwähnt, nach den Angaben in der Literatur schließen kann, daß die wichtigeren Frequenzen der menschlichen Sprache innerhalb des Tonbereiches von 500—1000 Perioden liegen.

Wir wollen noch erwähnen, daß die Messungen in der Brücke mit Strömen von etwa 10^{-4} Amp. im Telephon ausgeführt wurden, was einem ziemlich kräftigen Ton entspricht.

Bevor wir zu Vergleichen mit bisher von anderen Beobachtern direkt oder indirekt ermittelten Wirkungsgraden übergehen, wollen wir noch angeben, wie wir uns die Bewegung der Luft im vorderen Gasraum bei offener Schallöffnung vorstellen, und wie man ihren Masseneinfluß berechnen kann, nachdem wir früher gezeigt haben, wie man bei geschlossener Schallöffnung ihren elastischen Einfluß rechnerisch ermitteln kann.

Die Resonanzstelle bei 1800 rührt, wie wir schon früher sagten, vom Einfluß des vorderen Gasraumes her, der ganz oder teilweise offen als Helmholtzscher Resonator schwingen kann. Dies kann man wohl mit Sicherheit annehmen, da die Resonanzstelle nicht bei geschlossener Schallöffnung auftritt, und da es des weiteren möglich war, bei festgehaltener Membran durch Anblasen des vorderen Gasraumes und durch Erregung mit Stimmgabeln veränderlicher Frequenz einen Eigenton von etwa 2000 direkt mit dem Ohr zu bestimmen.

Um die Resonanzfrequenz des vorderen als offenen oder Helmholtzschen Resonator schwingenden Gasraumes zu berechnen, hat man sich die Schwingungsenergie einmal in rein potentiellem Zustande gleichmäßig im Gasraum und zweitens in rein kinetischem Zustande in dem engsten Querschnitt lokalisiert zu denken. Als Gasraum wollen wir den Raum zwischen Membran und Hörmuschel annehmen, abzüglich des durch die Schallöffnung gebildeten Zylinders, während der kleinste Querschnitt, in dem die größte Geschwindigkeit auftritt, die Mantelfläche dieses Zylinders ist.

Die Elastizität des eben beschriebenen Gasraumes ist bei festgehaltener Membran allein bestimmend für die Eigen-

frequenz des vorderen Luftraumes, während bei freier Membran noch die Elastizität der Membran teilweise hinzutritt und, da sie mit der Gaselastizität in Serie geschaltet ist, den Eigenton des Luftresonators gegenüber demjenigen bei festgehaltener Membran von 2000 auf etwa 1800 erniedrigt. Im Folgenden ist für die Berechnung der Schwingungsmasse die Eigenfrequenz des Resonators mit starren Wänden zugrunde gelegt, während das Amplitudenübersetzungsverhältnis von Luftmasse zu Membranmasse aus den geometrischen Dimensionen abgeleitet ist.

Nennen wir den Radius der Telephonmembran R, den der Schallöffnung r und den Abstand zwischen Membran und Hörmuschel d, so ist die Größe des Gasraumes des Resonators $\pi d (R^2 - r^2)$ und diejenige der Öffnung $2\pi r d$. Ist m die im kleinsten Querschnitt schwingende Luftmasse und Δr ihre Amplitude, so erhalten wir durch Gleichsetzen der kinetischen und potentiellen Form der Schwingungsenergie die Gleichung

$$\frac{m(\omega \Delta r)^2}{2} = \frac{\Delta v \cdot \Delta p}{2}.$$

Da nun

$$\Delta v = 2\pi r d \Delta r$$

und, wie wir früher sahen,

$$\frac{1}{k} \frac{\Delta p}{p_0} = \frac{\Delta v}{v_0}$$

ist, so wird

$$m = \frac{4\pi d k p_0}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 1}.$$

Für $d = 2$ mm und $\omega = 2\pi$ 2000 finden wir als Schwingungsmasse 0,002 g. Derjenige Teil des Deformationsvolumens, der durch den kleinsten Resonatorquerschnitt gepreßt wird, beträgt

$$\left(\frac{R^2}{3} - r^2\right) \pi \Delta a.$$

Durch Gleichsetzen dieses Ausdruckes mit dem obigen Werte für Δv finden wir die Beziehung

$$\frac{\Delta r}{\Delta a} = \frac{\frac{1}{3} R^2 - r^2}{2 r d}.$$

Für $d = 2$ mm berechnet sich dieses Übersetzungsverhältnis der Amplituden zu 6,3. Da die Massen mit dem Quadrate des Übersetzungsverhältnisses einlaufen, können wir uns

die Luftmasse von 0,002 g mit der Amplitude Δr auch als $0{,}002 \cdot 6{,}3^2 = 0{,}08$ g im Mittelpunkt der Membran schwingend denken. Die Kenntnis dieses Massenzuwachses gestattet nun die Erniedrigung der Resonanzfrequenz zu berechnen, die beim Übergang von der freien Membran zu der auf den vorderen offenen Gasraum arbeitenden eintritt und nach unserer früheren Annahme gerade auf diesem Massenzuwachs beruhte. Schwingungszahl und Schwingungsmasse der freien Membran waren 920 und 0,66 g. Es muß daher die Schwingungszahl der mit der eben berechneten zusätzlichen Luftmasse belasteten Membran sein

$$920 \sqrt{\frac{0{,}66}{0{,}66 + 0{,}08}} = 870\,,$$

was mit dem beobachteten Wert übereinstimmt.

Trotzdem die Kurven für den Abstand von 2 mm nicht bis zur Stelle der Gasraumresonanz von 1800 ursprünglich fortgesetzt waren, haben wir doch die Rechnung für diesen Fall beispielsweise durchgeführt, da der Schwingungsvorgang hierbei, wie wir früher durch die Betrachtung der Dämpfung erkannten, noch nicht durch Reibungsvorgänge gestört ist, und da nur in diesem Falle anzunehmen ist, daß tatsächlich ein Strömen des Gases in den engsten Querschnitten mit so hoher Geschwindigkeit eintritt, wie es die Rechnung verlangt. Gerade das Auftreten von Dämpfung bei kleineren Abständen beweist, daß die auf Grund der rein geometrischen Vorstellung errechnete Gasgeschwindigkeit gar nicht eintritt, sondern sich vorher in Reibung auflöst. In der Tat sind auch die experimentell gemessenen Erniedrigungen der Membranresonanz bei kleineren Abständen und größerer Dämpfung viel geringer als die auf Grund vorstehender Theorie berechneten, die die Reibungseinflüsse gar nicht berücksichtigt.

Wir wollen noch auf ein Experiment aufmerksam machen, das wohl schon von manchem Beobachter gelegentlich gemacht ist, bisher aber vielleicht noch keine genügende Erklärung gefunden hat. Da das offene und am Ohr liegende Telephon verschiedene Resonanzfrequenzen hat, wird man, wenn das Telephon zum Empfang eines Tones fester Frequenz zwischen diesen beiden Resonanzfrequenzen dient, die zunächst merkwürdig anmutende Beobachtung machen, daß bei schwachen

Abheben des Telephons vom Ohr der Ton in einer bestimmten Stellung lauter wird. Da man durch verschieden starkes Andrücken an das Ohr die Resonanzfrequenz zwischen den beiden Grenzen variieren kann, ist die Erklärung wohl ohne weiteres verständlich.

III. Vergleich mit den Ergebnissen anderer Beobachter.

Ein direkter Vergleich unserer Resultate mit denen anderer Beobachter ist kaum möglich, da, soviel uns bekannt, der Wirkungsgrad des Telephons als eines am Ohr liegenden Hörapparates bisher nicht bestimmt worden ist. In neuerer Zeit haben M. Pirani und P. Paschen[1]) Telephone untersucht und u. a. den Wirkungsgrad einer Anordnung bestimmt, in der zwei Zungentelephone geringer Dämpfung und nahezu gleicher Abstimmung in sehr fester Kopplung aufeinander geschaltet waren und so einen elektrisch-mechanischen — mechanisch-elektrischen Transformator darstellen. Ohne auf die eigentlichen Messungen und Rechnungen, die ohne Kenntnis der Resonanzkurve der gekoppelten Systeme uns nicht möglich erscheinen, eingehen zu wollen, können wir nur feststellen, daß für den Fall der normalen Benutzung des gewöhnlichen Telephons aus den Zahlen der Beobachter nichts geschlossen werden kann.

H. Abraham[2]) hat versucht, die Aufgabe, den Wirkungsgrad eines Telephons zu bestimmen, auf statische Probleme zurückzuführen und kann daher nicht zu einwandfreien und überzeugenden Resultaten gelangen. Für ihn steckt die ganze Elastizität in der Membran, während wir experimentell gefunden haben, daß diese nur etwa die Hälfte der gesamten Elastizität des Schwingungssystems beträgt. Ohne Rücksicht auf die Dämpfung setzt er als Höchstwert für die pro Periode abgegebene Energie die gesamte leerschwingende Energie des Systems und nimmt an, daß alle abgegebene Energie Nutzenergie ist. Auf diese Weise findet er für den Wirkungsgrad seines Telephons bei 200 Perioden etwa $1\,^0/_{00}$, ein Wert, der, mit unseren verglichen, viel zu groß erscheint. Alle von

1) Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft 21. S. 43. 1919.

2) Compt. rend. 144. S. 906. 1907.

Abraham gemachten Annahmen liefern zu große Werte für den Wirkungsgrad, und es lag ja auch in der Absicht des Verfassers, eine obere Grenze für den Wirkungsgrad zu finden. Nimmt man an, daß Abrahams Telephon akustisch ebenso gebaut ist wie das von uns untersuchte, und schätzt man seine Vernachlässigungen nach unseren Messungen ab, so ergibt sich, daß wir Abrahams Zahl mit etwa $^1/_{40}$[1]) multiplizieren müssen, um den akustischen Wirkungsgrad seines Telephons für 200 Perioden zu erhalten. Wir finden dann etwa 0,02 Promille, was sich an unsere Zahlen gut anschließen würde.

Ein weiterer Vergleich mit den Messungsergebnissen eines anderen Beobachters wurde durch die Arbeit M. Wiens über die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres für Töne verschiedener Höhe[2]) möglich. Aus bestimmten Gründen wählten wir als Frequenz, bei der dieser Vergleich ausgeführt wurde, 1000 Perioden pro Sekunde. Die Stromstärke, die eben noch eine Tonempfindung hervorrief, betrug bei unserem Telephon $1{,}1 \cdot 10^{-9}$ Amp., was einer aufgenommenen Leistung von $2{,}1 \cdot 10^{-15}$ Watt entspricht. Da der Wirkungsgrad für 1000 Perioden 0,009 beträgt, werden auf den Gehörgang $1{,}9 \cdot 10^{-17}$ Watt übertragen. Aus den Wienschen Zahlen folgt durch Interpolation als Reizwatt für das menschliche Ohr bei 1000 Perioden $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Watt, also etwa nur der 120. Teil unseres Wertes. Da die Wienschen Zahlen sowohl wie unsere das Mittel von mehreren Beobachtern sind, wollen wir die Reizschwelle des Ohres als konstant annehmen. Dann folgt aber, daß entweder unser Wirkungsgrad trotz seiner absoluten Kleinheit noch um das 120fache zu groß oder die berechnete Wiensche Reizleistung um das 120fache zu klein ist. Um diese Frage entscheiden zu können, müssen wir uns zunächst die Versuchsanordnung nach Wien vergegenwärtigen.

Wien befestigt in einer starren ebenen unendlichen Wand ein Telephon, mißt für eine bestimmte Stromstärke optisch die Membranamplitude und berechnet hieraus die in den

---

1) Die Vernachlässigung der Gaselastizität liefert den Faktor 2, der Ersatz der pro Periode abgegebenen Energie durch die leerschwingende Energie bei der Dämpfung 0,82 den Faktor $\pi/0{,}82 = 4$ und die Annahme, daß alles Nutzenergie sei, den Fakor $0{,}82/0{,}17 = 5$, insgesamt 40.

2) Pflügers Archiv für die ges. Physiologie 97. S. 1. 1903.

Halbraum gestrahlte Leistung. In etwa 30 cm Entfernung befindet sich der Kopf des Beobachters, und die Stromstärke des Telephons wird solange geschwächt, bis eben noch eine Tonempfindung vorhanden ist. Durch Extrapolation findet Wien für die Reizschwelle die mechanische Amplitude und hieraus die Schwellenintensität pro Flächeneinheit am Eingang des Gehörganges. Diese Zahlen multipliziert er mit $^1/_3$ cm², der Oberfläche des Trommelfelles, und findet hieraus und aus der Annahme, daß bei 1000 Perioden die Anzahl der Schwingungen, welche notwendig ist, um eine Tonempfindung zu erzeugen, 2 beträgt, die Reizenergie; hieraus haben wir rückwärts die obige Reizleistung berechnet.

Zunächst glaubten wir die Wiensche Annahme nachprüfen zu müssen, daß eine in einem Schirm, wie er durch den menschlichen Kopf dargestellt wird, befindliche Schallsenke nur die Energie aus einem Schallfelde aufnimmt, die ihrem Querschnitt entspricht. Wir wählten eine ähnliche Anordnung wie Wien, befestigten ein Telephon in einer starren ebenen unendlichen Wand und führten in etwa 30 cm Abstand die Mündung eines Rohres von $^1/_3$ cm² Öffnung, das einmal frei endete und dann von einer künstlichen Kopfhälfte mit Ohrmuschel aus Gips umgeben werden konnte, so daß in diesem Falle das Rohr gewissermaßen den Gehörgang bildete. Das Rohr führte in ein benachbartes Zimmer an das Ohr des Beobachters. Wir konnten feststellen, daß das im künstlichen Kopf und Ohr endende Rohr bei 1000 Perioden etwa 15 mal soviel Energie aus dem Schallfelde aufnahm, als das frei endende. Man kann sich diesen Vorgang so vorstellen, daß die in unmittelbarer Nachbarschaft an der freien Rohrmündung vorbeiwandernde Energie im Falle des abschirmenden Kopfes teils zu Reflexion, teils zur Abwanderung in die Senke veranlaßt wird, und daß eine in einem Schirm endende Schallsenke ähnlich wie eine Energie aufsaugende Antenne wirkt.[1])

---

1) Für einen in Resonanz erregten Empfänger würde bei Gleichheit von Nutz- und Strahlungsdämpfung und bei Abwesenheit jeder schädlichen Dämpfung nach H. Lichte, Physikal. Zeitschr. 18. S. 393. 1917 die maximale äquivalente Absorptionsfläche $(0{,}22\,\lambda)^2\,\pi = 170$ cm² sein, und daher etwa 600 mal so viel Energie aus dem Schallfelde aufgenommen werden, als einer $^1/_3$ cm² großen Fläche entspricht.

Tatsächlich ist dann also bei Wien nicht $1{,}6 \cdot 10^{-19}$, sondern $2{,}4 \cdot 10^{-18}$ Watt auf den Gehörgang übertragen, und unsere und Wiens Zahlen unterscheiden sich nur noch wie 8 : 1.

Diesen Unterschied kann man nun vielleicht noch folgendermaßen erklären: Wir haben schon erwähnt, daß Wien sehr weit extrapolieren muß von der großen Amplitude des Telephons, mit der es optisch geeicht wird, bis auf diejenige, bei der er in etwa 30 cm Entfernung eben noch eine Tonempfindung hat. Auch wir haben bei der Vergleichsrechnung angenommen, daß der bei etwa 10^{-4} Amp. gemessene Wirkungsgrad bis zur Reizstromstärke, die nur den 10^{-5}ten Teil an Stromstärke erfordert, konstant bleibt. Da Wien aus dem Gebiet sehr hoher Eisensättigung bei seiner Extrapolation zu mittleren Werten der Sättigung kommt, ist seine tatsächlich gestrahlte Leistung wohl sicher größer als die berechnete, und da wir aus mittlerer Sättigung zu dem Gebiet der Anfangspermeabilität herabsinken, so ist unser Wirkungsgrad für die Reizstromstärke wohl sicher kleiner, als derjenige für starke Sprechströme, für die er ermittelt ist. Mit Rücksicht auf den Abfall der Permeabilitätskurve von ihrem Maximum bei mittlerer Sättigung nach beiden Seiten hin, möchten wir ohne Bedenken annehmen, daß hierdurch jedesmal Änderungen von etwa 3 : 1 eintreten können, wodurch der Unterschied zwischen Wien und uns seine Erklärung finden würde.

Man müßte daher die Wienschen Schwellenwerte in der Nähe von 1000 Perioden pro Sekunde mit etwa 50 multiplizieren, um richtige Werte zu erhalten. Bei hohen Frequenzen kann diese Umrechnungszahl noch größer werden, bei tieferen vielleicht kleiner. Es ergibt sich somit, daß der von uns ermittelte Wirkungsgrad um ebenso viel unter dem von Abraham geschätzten liegt als oberhalb eines Wertes, wie er aus den Wienschen Messungen folgt.

Es wäre jedenfalls sehr wünschenswert, wenn nach der Wienschen oder nach unserer Methode oder noch besser gleichzeitig nach beiden bald einwandfreie Messungen der Reizleistung für das menschliche Ohr vorgenommen würden. Nach unserer Methode ließe sich sicherlich in unserem Beispiel noch für 10^{-5} und 10^{-6} Amp. die Resonanzkurve aufnehmen und dann wohl durch graphische Extrapolation der Wirkungsgrad für die Reizstromstärke ermitteln und damit die Empfindlich-

keit des menschlichen Ohres von neuem experimentell bestimmen. Da wir auf diese Arbeiten zunächst nicht mehr zurückzukommen gedenken, würden wir uns freuen, hierdurch Anregung für diese sehr wichtige und interessante Untersuchung gegeben zu haben.

Zusammenfassung.

Im Anschluß an eine an anderer Stelle von uns mitgeteilte Theorie des Telephons ist eine Untersuchungsmethode der akustischen Vorgänge in einem Telephon entwickelt und experimentell durchgeführt. Insbesondere ist für Sprechfrequenzen, die im Tonbereich von 500 bis 1000 Perioden angenommen sind, der Wirkungsgrad, d. h. das Verhältnis der auf den Gehörgang übertragenen Energie zu der aufgenommenen bestimmt und zu etwa 1 bis 10 Promille gefunden worden.

Kiel, im Mai 1919.

(Eingegangen Juni 1919.)

3. *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter;*
von H. Weyl.

§ 1. Das Problem.

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Raum, der zur Hälfte von einem homogenen Dielektrikum, zur andern von einer homogenen Substanz endlicher Leitfähigkeit erfüllt ist (eine Ebene soll die gemeinsame Grenze beider Teile sein), ist von Sommerfeld in einer bekannten Arbeit untersucht worden.[1]) Ich glaube aber, daß die dort zur Diskussion der Lösung eingeschlagene Methode dem Problem zu wenig angepaßt ist, und möchte daher im folgenden auf eine andere hinweisen, welche mir auf natürlicherem Wege zu durchsichtigeren und vollständigeren Resultaten zu führen scheint.

Die Grundformel. Wir benutzen rechtwinklige Koordinaten xyz. Im Nullpunkt O befinde sich der Ursprung einer Kugelwelle. Eine solche kann — in einem Halbraum wie $z \geqq 0$ — aufgefaßt werden als Superposition von lauter ebenen Wellen verschiedener Richtung, wobei Richtungskegel der gleichen Größe mit der gleichen Intensität zur Geltung kommen. Es gilt nämlich im Gebiete $z > 0$ die folgende Formel

$$(1) \qquad \Pi_0 = \frac{e^{-ikR}}{-ikR} = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, d\omega .$$

Darin ist k eine reelle positive Konstante, R ist die Entfernung des im oberen Halbraum gelegenen Punktes $P = (xyz)$ vom Ursprung. $(\alpha\beta\gamma)$ bezeichnet einen Punkt auf der Einheitskugel, nach dem integriert wird, — es ist also, wenn ϑ, φ die zur z-Achse gehörigen Polarkoordinaten sind,

$$\alpha = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \beta = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \gamma = \cos\vartheta \; —$$

---

1) Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. Ann. d. Phys. 28. S. 665—736. 1909.

und

$$d\omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

das Oberflächenelement der Einheitskugel. Es ist zu integrieren nach φ von 0 bis 2π, nach ϑ über den in der Fig. 1 breit ausgezogenen Weg in der komplexen ϑ-Ebene; auf ihm durchläuft $\sin\vartheta$ die positiven Werte von 0 bis ∞, bleibt der schließlich ins Positiv-Unendliche wachsende Realteil von $ik\cos\vartheta$ durchweg $\geqq 0$. Diese Umstände verbürgen die Konvergenz des Integrals im oberen Halbraum. Man muß also nicht nur alle ebenen Wellen zusammenfassen, deren Fortpflanzungsrichtung $(\alpha\beta\gamma)$ mit der z-Achse einen Winkel ϑ zwischen 0 und $\pi/2$ bildet, sondern noch eine kontinuierliche Serie komplexer Neigungswinkel ϑ hinzunehmen.

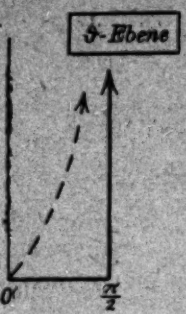


Fig. 1.

Der Beweis für (1) ist leicht erbracht. Wir führen Polarkoordinaten η, ψ zur Achse OP ein; dann wird das Integral auf der rechten Seite

$$= \frac{1}{2\pi}\int e^{-ikR\cos\eta}\sin\eta\, d\eta\, d\psi .$$

Der Integrationsbereich ist in den Variablen η, ψ zunächst ein anderer (durch andere Ungleichungen zu beschreibender) als in den Variablen ϑ, φ; nach dem Cauchyschen Integralsatz können wir ihn aber durch den gleichen ersetzen: so daß jetzt wieder ψ von 0 bis 2π, η längs des oben gezeichneten Weges läuft. Die Integration nach ψ vollziehend und

$$ikR\cos\eta = \tau$$

als Integrationsvariable an Stelle von η einführend, erhalten wir dann

$$\frac{1}{-ikR}\int_{ikR}^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau = \frac{1}{-ikR}\left[e^{-\tau}\right]_{\infty}^{ikR} = \frac{e^{-ikR}}{-ikR} .$$

Sommerfeld benutzt zur Darstellung von Π_0 diejenige Formel, welche aus der unsrigen (1) hervorgeht, wenn die Integration nach φ ausgeführt wird.[1]) Aber gerade dadurch

1) Vgl. indes seine Bemerkungen auf S. 733, insbesondere Gl. (64).

wird die auf dem Cauchyschen Integralsatz beruhende Freiheit der Verlagerung des Integrationsbereichs von vornherein so eingeschränkt, daß eine natürliche Diskussion unmöglich wird. Man muß nämlich, um die Verhältnisse in einem Punkte P bequem zu überblicken, Polarkoordinaten zur Achse OP einführen, also auf der Einheitskugel um diese Achse und nicht um die z-Achse herum integrieren.

Die Lösung. Ein im Punkte O in der Richtung der z-Achse schwingender Dipol sende ungedämpfte Schwingungen aus. Das homogene Medium habe die Dielektrizitätskonstante ε, die Permeabilität 1, die Leitfähigkeit σ. c sei die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, ν die Frequenz; t bedeutet die Zeit. Das Feld leitet sich aus einer Hertzschen Funktion $e^{i\nu t} \cdot \Pi_0$ her; dabei ist

$$k^2 = \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \left\{\varepsilon - \frac{i\sigma c}{\nu}\right\}.$$

Wir nehmen jetzt an, der obere Halbraum $z > 0$ sei von einem Dielektrikum erfüllt ($\sigma = 0$, k reell und > 0); im unteren Halbraum $z < 0$ aber befinde sich eine Substanz endlicher Leitfähigkeit. Die auf sie bezüglichen Größen (z. B. k') sollen durch einen Akzent charakterisiert werden. Der Dipol befinde sich zunächst nicht im Nullpunkt, sondern auf der z-Achse im Abstand d oberhalb des Nullpunktes. Die einfallende Welle leitet sich dann aus der soeben angegebenen Hertzschen Funktion her. Im oberen Halbraum bildet sich außerdem eine reflektierte Welle, im unteren eine gebrochene aus von der gleichen Frequenz ν; auch sie entspringen aus je einer Hertzschen Funktion

$$e^{i\nu t} \cdot \Pi_r, \quad e^{i\nu t} \cdot \Pi'.$$

Für das gesamte Feld im oberen Halbraum ist die Funktion $\Pi = \Pi_0 + \Pi_r$ maßgebend. Die Grenzbedingungen an der Trennungsebene $z = 0$ verlangen, daß Π und $\frac{1}{k^2}\frac{\partial \Pi}{\partial z}$ stetig hindurchgehen:

$$\Pi = \Pi', \quad \frac{1}{k^2}\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{1}{k'^2}\frac{\partial \Pi'}{\partial z} \quad \text{für } z = 0.$$

Wir zerlegen die Kugelwelle Π_0 in ebene: im Gebiete $z < d$, also insbesondere auf der Trennungsebene, gilt

$$\Pi_0 = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ik\{\alpha x + \beta y + \gamma(z-z)\}}\, d\omega .$$

Zu jeder der ebenen Partialwellen bestimmen wir die reflektierte und gebrochene; durch ihre Summation erhalten wir dann Π_r und Π'. Aus der einfallenden Welle

$$e^{-ik\{\alpha x + \beta y + \gamma(d-z)\}} \qquad (0 \leqq z < d)$$

entsteht die reflektierte

$$e^{-ik\{\alpha x + \beta y + \gamma(d+z)\}} \cdot f_r \qquad (z \geqq 0)$$

und die gebrochene

$$e^{-ik'\{\alpha' x + \beta' y - \gamma' z\}} e^{-ik\gamma d} f' \qquad (z \leqq 0)$$

[f_r und f' sind unabhängig von $x\,y\,z$]. Die Grenzbedingungen liefern zunächst das geometrische Brechungsgesetz

$$k \sin\vartheta = k' \sin\vartheta' \qquad (\varphi = \varphi') \tag{2}$$

und außerdem die Gleichungen

$$1 + f_r = f', \quad \frac{\gamma}{k}(1 - f_r) = \frac{\gamma'}{k'} f';$$

daraus

$$f' = \frac{2k'\gamma}{k\gamma' + k'\gamma}.$$

Ist $\frac{k'}{k} = n$ der komplexe Brechungsindex, so gilt also wegen (2)

$$f' = \frac{2n^2\gamma}{n^2\gamma + \sqrt{\gamma^2 + (n^2 - 1)}}.$$

Die Wurzel ist als eine stetige Funktion auf unserm Integrationswege so zu nehmen, daß sie für unendlich großes γ gleich γ wird. Im Gebiete $z > d$ ist

$$\Pi = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\{e^{ik\gamma d} + e^{-ik\gamma d} f_r\}\, d\omega .$$

Lassen wir jetzt die Quelle auf die Trennungsebene, in den Nullpunkt hineinrücken, also d gegen 0 konvergieren, so ergibt sich im Limes

$$\left\{\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2\pi}\int e^{-ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \cdot f'\, d\omega , \\ \Pi' &= \frac{1}{2\pi}\int e^{-ik'(\alpha' x + \beta' y - \gamma' z)} \cdot f'\, d\omega . \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Π wird aber jetzt im Nullpunkt nicht mehr so unendlich wie Π_0, sondern wie

$$\frac{2n^2}{n^2 + 1} \cdot \Pi_0 . \tag{4}$$

Denn es ist

$$f' = \frac{2n^3}{n^3+1} + \text{einer Funktion } f_*,$$

die für $\gamma = \infty$ in zweiter Ordnung verschwindet. Spaltet man entsprechend den Ausdruck (3) von Π in zwei Summanden, so ist der erste = (4), der zweite aber bleibt im Nullpunkt endlich, da das Integral

$$\int | f_* \, d\omega |$$

einen endlichen Wert besitzt. Wir wollen zu Π einen derartigen konstanten Faktor hinzufügen, daß es im Nullpunkt wieder so unendlich wird wie Π_0. Dann haben wir schließlich

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ik(\alpha x + \beta y + \gamma z)} f \, d\omega, \tag{5}$$

$$f = \frac{(n^2+1)\gamma}{n^2\gamma + \sqrt{\gamma^2 + (n^2-1)}} = f(\gamma). \tag{6}$$

Wir schreiben noch $\Pi = \Pi_0 \cdot F$. Die Untersuchung dieses Faktors F, dessen absoluter Betrag die durch Anwesenheit des Leiters bedingte Schwächung der Kugelwelle, dessen Azimut die Phasenverschiebung angibt, ist unsere Aufgabe; im Ursprung ist $F = 1$. Wir beschränken uns darauf, die Ausbreitung der Welle im Dielektrikum zu verfolgen.

§ 2. Diskussion für einen komplexen Brechungsindex von mäßiger Größe.

Ein beliebiger Punkt P im oberen Halbraum habe von der Trennungsebene den Abstand $z\,(>0)$, von der z-Achse den Abstand r, vom Ursprung R; OP bilde mit der z-Achse den Winkel ϑ_0:

$$\gamma_0 = \cos\vartheta_0 = \frac{z}{R}, \quad \sin\vartheta_0 = \frac{r}{R}.$$

Wir setzen jetzt zur Vereinfachung $k = 1$, d. h. wir benutzen den 2πten Teil der Wellenlänge im Dielektrikum als Maßeinheit für alle vorkommenden Entfernungen. R sei (im Vergleich zur Wellenlänge) eine große Zahl. Indem wir Polarkoordinaten η, ψ zur Achse OP einführen, wobei wir die Ebene durch z-Achse und OP als Nullmeridian benutzen, erhalten wir

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iR\cos\eta} \cdot f \sin\eta \, d\eta \, d\psi. \tag{7}$$

Dabei ist in $f = f(\gamma)$ für γ einzusetzen:

$$\gamma = \cos\vartheta = \cos\vartheta_0 \cos\eta + \sin\vartheta_0 \sin\eta \cos\psi. \tag{8}$$

Es ist nach ψ zu integrieren von 0 bis 2π, nach η am besten längs eines solchen Weges (er ist in Fig. 1 gestrichelt eingetragen), der zunächst vom Punkte $\eta = 0$ im Gebirge des Imaginärteils von $\cos\eta$ möglichst steil in die Tiefe führt ($1 - \cos\eta$ rein imaginär).[1]) Die Integration nach ψ denken wir uns ausgeführt; wir erhalten den Mittelwert

$$f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\, d\psi$$

und mit der neuen Integrationsvariablen

$$t = \frac{1 - \cos\eta}{i}$$

an Stelle von η:

$$F = R\int_0^{\infty} e^{-Rt} \cdot f\, dt. \tag{9}$$

Dieser Ausdruck läßt ohne weiteres erkennen, daß nur der erste Anfang des Integrationsweges einen wesentlichen Beitrag zum Wert des Integrals leistet; es kommt also bei der Integration auf der Einheitskugel im wesentlichen nur die unmittelbare Umgebung des in der Richtung OP gelegenen Punktes in Betracht. In erster Annäherung (wobei der begangene Fehler von der Größenordnung $1/R$), können wir f durch seinen Wert für $t = 0$, d. i. $f(\cos\vartheta_0)$ ersetzen und erhalten

$$F \sim f(\cos\vartheta_0). \tag{10}$$

In Entfernungen vom Erreger, die groß sind gegenüber der Wellenlänge, hängt also Schwächung und Phasenverschiebung der Kugelwelle nur ab von der Richtung OP, und zwar in der aus (6), (10) *ersichtlichen Weise.* Insbesondere ist zu bemerken, daß $f(\cos\vartheta_0)$ verschwindet für $\vartheta_0 = \pi/2$. In erster Annäherung wird demnach *die längs der trennenden Oberfläche selbst fortschreitende Erregung zu* 0 *abgeschwächt.* Der Grund dafür ist

1) In seinem weiteren Verlauf muß er freilich von dieser Paßstraße abführen, damit die Singularitäten von f vermieden werden. In § 3 kommen wir genauer darauf zurück.

aus unserer Herleitung klar. Diejenigen in der Kugelwelle enthaltenen ebenen Wellen, welche unter Winkeln ϑ von der Quelle ausgehen, welche nur wenig *kleiner* als $\pi/2$ sind, werden fast vollständig zerstört von solchen, die durch Reflexion aus Wellen entstanden sind, deren Winkel ϑ wenig *größer* sind als $\pi/2$.

(10) ist das erste Glied einer asymptotischen Entwicklung nach Potenzen von $1/R$. Man sieht zunächst leicht, daß f eine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von t in der Umgebung der Stelle $t=0$ zuläßt. Man bilde dazu die Taylorreihe

$$f(\gamma) = f_0 + \frac{f_0'}{1!}(\gamma-\gamma_0) + \frac{f_0''}{2!}(\gamma-\gamma_0)^2 + \dots .$$

Auf das einzelne Potenzglied

$$(\gamma-\gamma_0)^h = [\cos\vartheta_0\,(\cos\eta - 1) + \sin\vartheta_0 \sin\eta\cos\psi]^h$$

wende man den binomischen Lehrsatz an und integriere nach ψ: es bleiben nur diejenigen Glieder stehen, welche den zweiten Summanden in einer geraden Potenz enthalten, in denen also η nur als ganzzahlige Potenz von

$$\sin^2\eta = (1-\cos\eta)(1+\cos\eta) = it(2-it)$$

auftritt. Das Integral von $(\gamma-\gamma_0)^h$ nach ψ ist somit ein Polynom in t, in welchem $t^{h/2}$ oder $t^{\frac{h+1}{2}}$ die niedrigste vorkommende Potenz ist, je nachdem h gerade oder ungerade. Das erste Glied der Entwicklung

$$f = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \dots \tag{11}$$

ist natürlich $a_0 = f(\gamma_0) = f_0$, das zweite

$$a_1 = \frac{1}{i}\left\{f_0'\gamma_0 - \frac{f_0''(1-\gamma_0^2)}{2}\right\}.$$

Aus (9), (11) und

$$\int_0^\infty e^{-Rt}t^h\,dt = \frac{h!}{R^{h+1}}$$

fließt die asymptotische Entwicklung

$$F \sim \sum_{h=0}^{\infty}\frac{a_h}{R^h}.$$

Die beiden ersten Glieder ergeben

$$(12)\quad F \sim f(\cos\vartheta_0) + \frac{f'(\cos\vartheta_0)\cdot\cos\vartheta_0 - \frac{1}{2}f''(\cos\vartheta_0)\cdot\sin^2\vartheta_0}{iR}.$$

In der unmittelbaren Nachbarschaft der Trennungsebene wird neben dem ersten, das für $\vartheta_0 = \pi/2$ verschwindet, noch dies zweite zu berücksichtigen sein. Es ist dort von der gleichen Größenordnung (nämlich $1/R$) wie das erste, wo $\cos\vartheta_0 = z/R$ klein ist wie $1/R$, wo also die Erhebung z über der Grenzfläche der 1, d. i. der Wellenlänge vergleichbar ist. Setzen wir

$$f'(0) = \frac{n^2+1}{\sqrt{n^2-1}} = C_1, \quad -\tfrac{1}{2}f''(0) = \frac{n^2(n^2+1)}{n^2-1} = C_2,$$

so ist in diesem Bereich, wie (12) lehrt,

$$F \sim \frac{C_1 x - iC_2}{R}$$

(mit einem Fehler von der Größenordnung $1/R^2$). — Nirgendwo zeigt sich hier eine Andeutung dafür, daß es berechtigt wäre, den Vorgang in eine „Raum"- und eine „Oberflächen"-Welle zu trennen.

§ 3. Die Singularitäten des Integranden. Zerlegung der Störung in Haupt- und Nebenwelle.

Nun sind freilich die bisherigen Annäherungen brauchbar nur für den Fall, daß n eine mäßige Zahl ist. Wenn n groß ist, wird eine neue Untersuchung erforderlich. Mathematisch gesprochen, werden wir den Grenzübergang $\lim n = \infty$ zu vollziehen haben. Aus der Formel (5) geht hervor, daß dabei F gegen 1 konvergiert; doch ist die Konvergenz nicht gleichmäßig in dem ganzen oberen Halbraum, sondern, wenn ε irgendeine positive Zahl ist, nur für $0 \leqq \vartheta_0 \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Was hier zu tun übrig bleibt, illustriere ich durch das bekannte „Gibbssche Phänomen" in der Theorie der Fourierschen Reihen. Entwickelt man diejenige Funktion $s(x)$, welche im Intervall von $-\pi$ bis 0 gleich -1, im Intervall von 0 bis π gleich $+1$ ist, in eine Fouriersche Reihe, so konvergiert die $n$te Partialsumme $s_n(x)$ mit unbegrenzt wachsendem Index n gegen $s(x)$; jedoch nicht gleichmäßig in einem Intervall wie

$$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq +\frac{\pi}{2},$$

welches die Sprungstelle $x = 0$ einschließt. Dagegen gilt hier die folgende Ungleichung

$$|s_n(x) - \mathrm{Si}(nx)| \leqq \frac{\text{Konst.}}{n}, \tag{13}$$

in der Si den Integralsinus

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$$

bedeutet und Konst. unabhängig ist von n und x. Sie gibt genauen Aufschluß darüber, wie sich die Partialsummen $s_n(x)$ bei großem n in der Nähe der Sprungstelle verhalten; man sieht aus ihr insbesondere, daß der jähe Übergang der Funktion $s_n(x)$ vom Niveau -1 auf das Niveau $+1$ an der Stelle $x=0$ vorbereitet und gefolgt wird von heftigen, dicht gedrängten Oszillationen. Wegen der mangelnden Gleichmäßigkeit ist die Näherungsformel $s_n(x) \sim s(x)$ unzulänglich; erst die gleichmäßig gültige, im Sinne der Ungleichung (13) zu interpretierende $s_n(x) \sim \mathrm{Si}(nx)$ ist wirklich brauchbar. — Das Analoge ist hier zu leisten: wir wollen F (das dem s_n beim Gibbsschen Phänomen entspricht) durch eine in ihrem Wertverlauf leicht überblickbare Funktion F^* (analog zu $\mathrm{Si}(nx)$) approximieren, so daß im ganzen oberen Halbraum und für alle hinreichend großen Werte des komplexen Brechungsindex n die Ungleichung

$$|F - F^*| \leqq \frac{\text{Konst.}}{|n|^2}$$

besteht. Doch müssen wir zunächst noch die Grundlage unserer Untersuchung verfestigen, indem wir die Lage der Singularitäten unseres Integranden ermitteln, um die Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes zu legitimieren. Wir behalten dabei den uns vorzugsweise interessierenden Fall eines n^2 mit mäßigem Real-, aber großem Imaginärteil im Auge.

Zur Verwendung gelangt eine ϑ-Ebene, in der sowohl die Werte von ϑ wie von η zur Darstellung gebracht werden, neben einer γ-Ebene zur Veranschaulichung der Werte von $\gamma = \cos\vartheta$ und $\xi = \cos\eta$. Der in $f(\gamma)$ auftretende Radikand verschwindet für $\gamma = \pm\sqrt{1-n^2}$. Wir tragen diese beiden Punkte in der γ-Ebene ein samt der Geraden g durch den Nullpunkt, welche sie miteinander verbindet. g zerlegt die Ebene in zwei Hälften, eine rechte, welcher der Punkt $\gamma = 1$ angehört, und eine linke. In der rechten Hälfte ist f nicht

nur eine eindeutige Funktion, sondern auch überall regulär. Zwar könnte f dort unendlich werden, wo

$$\gamma^2 = \frac{1}{n^2+1}$$

ist; von diesen beiden Zahlen $\pm\sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$ werde die in der linken Hälfte gelegene mit a, die andere mit $-a$ bezeichnet.

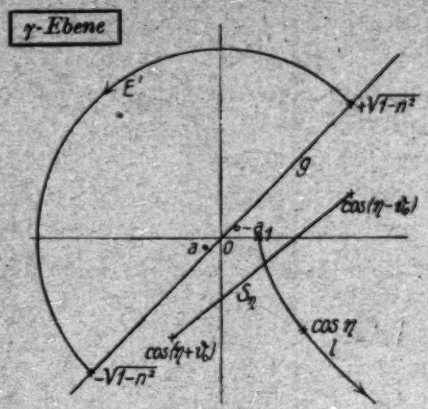


Fig. 2.

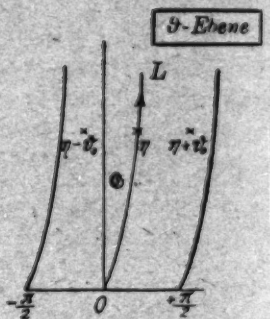


Fig. 3.

Es stellt sich nun aber ohne Mühe heraus, daß f bei der von uns zu wählenden Bestimmung des Vorzeichens der Wurzel

$$\left(\sqrt{\gamma^2+(n^2-1)} \sim \gamma \text{ im Unendlichen}\right)$$

in $-a$ keinen Pol besitzt. Auf die rechte Hälfte der γ-Ebene wird, wenn man die geradlinige Strecke von 0 bis 1 zur Begrenzung hinzufügt, der in der ϑ-Ebene gezeichnete krummlinig begrenzte Parallelstreifen $\mathfrak{G}$ umkehrbar eindeutig abgebildet. Es ist in der ϑ-Ebene außerdem diejenige Linie L gezeichnet, welche aus der linken Begrenzung des Parallelstreifens durch die Verschiebung $\pi/2$ hervorgeht (aus der rechten durch die Verschiebung $-\frac{\pi}{2}$) und ihr Bild l in der γ-Ebene. Erstreckt man die Integration nach η in Gl. (7) längs dieser Linie L, so ist dafür gesorgt, daß der aus (8) sich ergebende Wert von γ für alle η des Integrationsweges, alle ϑ_0 des Intervalls $0 \leqq \vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ und alle reellen ψ in der

rechten Hälfte der γ-Ebene liegt, woselbst die Funktion $f(\gamma)$ regulär ist. In der Tat durchläuft γ nach (8) bei gegebenem η und ϑ_0 diejenige geradlinige Strecke $\mathfrak{S}_\eta$, welche die beiden Punkte $\cos(\eta - \vartheta_0)$ und $\cos(\eta + \vartheta_0)$ miteinander verbindet. Unter den angegebenen Bedingungen liegen aber $\eta - \vartheta_0$ und $\eta + \vartheta_0$ im Parallelstreifen $\mathfrak{G}$, ihre Cosinusse daher innerhalb der rechten Hälfte der γ-Ebene, also auch ihre Verbindungsstrecke $\mathfrak{S}_\eta$.

Um jetzt die Gleichung (7) sicherzustellen, verfahren wir so. Zunächst ersetzen wir den Integrationsweg, welchen ϑ in (5) durchlaufen sollte (Fig. 1), durch L; das ist statthaft, sofern ϑ_0 kleiner ist als der Winkel, den die Gerade g in der γ-Ebene mit der positiv-imaginären Halbachse einschließt. Dies setzen wir zunächst von P voraus. Nun vollziehen wir den Übergang von der vertikalen zur Polachse OP kontinuierlich (in ihrer gemeinsamen Ebene), wobei der Neigungswinkel λ der Polachse gegen die Vertikale die Werte von 0 bis ϑ_0 durchlaufen wird. Das drückt sich durch die Formeln aus:

$$(14)\quad \begin{cases} \alpha = \cos\lambda \cdot \alpha' - \sin\lambda \cdot \gamma', \\ \gamma = \sin\lambda \cdot \alpha' + \cos\lambda \cdot \gamma', \end{cases} \quad \beta = \beta'; \quad (0 \leqq \lambda \leqq \vartheta_0),$$

$$\alpha' = \sin\eta \cdot \cos\psi, \quad \beta' = \sin\eta \cdot \sin\psi, \quad \gamma' = \cos\eta.$$

Ich setze einen Augenblick

$$\frac{1}{2\pi} e^{-i(\alpha x + \gamma z)} \cdot \frac{f(\gamma)}{\gamma} = \Phi,$$

und bilde

$$J = J(\lambda) = \int \Phi \, d\alpha \, d\beta = \int \Phi \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\eta, \psi)} d\eta \, d\psi,$$

indem bei festem λ über denjenigen Bereich integriert wird, der entsteht, wenn ψ die Werte von 0 bis 2π, η den Weg L durchläuft. Dieses Integral stimmt für $\lambda = 0$ mit (5), für $\lambda = \vartheta_0$ mit (7) überein. Wir zeigen in bekannter Weise, daß die Ableitung jenes Integrals nach λ verschwindet (Beweis des Cauchyschen Integralsatzes durch stetige Variation des Weges). Die damit erwiesene Übereinstimmung von (5) und (7) ist, da diese beiden Integrale regulär-analytische Funktionen von xyz im ganzen oberen Halbraum sind, nicht auf die Punkte P des bisher betrachteten Kegelraumes beschränkt.

Für Φ als Funktion von $\alpha\beta\gamma$ gilt, da die Argumente beständig die Relation

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

erfüllen und somit

$$\alpha\,d\alpha+\beta\,d\beta+\gamma\,d\gamma=0$$

ist:

$$d\Phi=\Phi_\alpha'\,d\alpha+\Phi_\beta'\,d\beta, \tag{15}$$

wo

$$\Phi_\alpha'=\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}-\frac{\alpha}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma},\quad \Phi_\beta'=-\frac{\beta}{\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}.$$

Man beachte, daß in dem ganzen nach (14) in Betracht kommenden Gebiet der Einheitskugel Φ regulär (insbesondere auch $\gamma\gtrless 0$) ist. Bezeichnet δ die Differentiation nach λ, so kommt wegen $\delta\beta=0$:

$$\delta J=\int\Phi_\alpha'\,\delta\alpha\cdot\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\eta,\psi)}\,d\eta\,d\psi+\int\Phi\,\frac{\partial(\delta\alpha,\beta)}{\partial(\eta,\psi)}\,d\eta\,d\psi.$$

Der zweite Teil geht durch partielle Integration über in

$$-\int_0^{2\pi}\Phi\,\frac{\partial\beta}{\partial\psi}\,\delta\alpha\Big|_{\eta=0}d\psi-\int\delta\alpha\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Phi\frac{\partial\beta}{\partial\psi}\right)-\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\Phi\frac{\partial\beta}{\partial\eta}\right)\right\}d\eta\,d\psi.$$

Hier ist der erste Summand $=0$, weil $\partial\beta/\partial\psi$ für $\eta=0$ verschwindet; im Integranden des zweiten ist der in geschweifte Klammern gesetzte Faktor

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial\beta}{\partial\psi}-\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\frac{\partial\beta}{\partial\eta},$$

und daher auf Grund von (15):

$$=\Phi_\alpha'\,\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(\eta,\psi)}.$$

Also wird, wie behauptet, $\delta J=0$.

Nachdem dies nachgeholt ist, fahren wir in unserer Untersuchung fort. Wir spalten die ungestörte Welle ab, schreiben also

$$F=1-F_1,\quad F_1=\frac{R}{i}\int_1 e^{iR(1-\xi)}f_1\,d\xi.$$

Den Mittelwert

$$\bar f_1=\frac{1}{2\pi}\int f_1\,d\psi\quad\text{von}\quad f_1=f-1$$

bestimmen wir aber jetzt in anderer Weise als vorhin. Wir

führen (bei festem η) γ an Stelle von ψ als Integrationsvariable ein; dann ist nach (8)

$$d\gamma = -\sin\vartheta_0 \sin\eta \sin\psi \, d\psi,$$

$$d\psi = \frac{d\gamma}{i\sqrt{(\gamma - \cos\vartheta_0 \cos\eta)^2 - (\sin\vartheta_0 \sin\eta)^2}}.$$

Der Radikand $W(\gamma\,\xi)$ ist eine symmetrische Funktion von γ und $\xi = \cos\eta$. Die Wurzel selber ist eindeutig in der γ-Ebene, wenn man diese in der oben eingeführten geradlinigen Strecke S_η aufschneidet; sie werde mit solchem Vorzeichen genommen, daß sie im Unendlichen $= \gamma$ ist. Dann gilt also

$$f_1 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f_1 \, d\gamma}{\sqrt{W(\gamma\,\xi)}}; \tag{16}$$

dabei muß die Integration im positiven Sinn um den Schnitt S_η herum erstreckt werden.

Wir zeichnen in der γ-Ebene ferner (Fig. 2) die Ellipse E mit den Brennpunkten ± 1, welche durch die Windungspunkte $\pm\sqrt{1-n^2}$ von f hindurchgeht. Sie wird durch die Windungspunkte in zwei Halbellipsen zerlegt, von denen wir die linke mit E' bezeichnen. In der längs E' aufgeschnittenen γ-Ebene ist f eindeutig und besitzt einen einzigen Pol 1. Ordnung bei $\gamma = a$ mit dem Residuum $n^2 a/n^2 - 1$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz kann das Integral (16) um S_η herum ersetzt werden durch die negative Summe zweier Integrale, deren eines sich um den Pol a, deren anderes sich um den Schnitt E' herum im positiven Sinne erstreckt. Dies ist zutreffend, weil das Integral längs eines unendlich großen Kreises um den Nullpunkt der γ-Ebene Null ergibt (denn der Integrand verschwindet im Unendlichen wie $1/\gamma^3$). Das erste ist gleich dem Residuum des Integranden im Pol, also

$$= \frac{n^2 a}{n^2 - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{W(\xi\,a)}};$$

das andere wird, wenn man das Integral am inneren Ufer von E' entlang mit dem Integral längs des äußeren Ufers vereinigt,

$$= f_1^* = \frac{1}{\pi i}\int_{E'} \frac{f_1 \, d\gamma}{\sqrt{W(\xi\,\gamma)}}.$$

Hier fasse man nun E' nicht mehr als Schnitt auf, sondern

die beiden vorkommenden Wurzeln

$$\sqrt{\gamma^2+(n^2-1)} \quad \text{und} \quad \sqrt{W}$$

als eindeutige Funktionen von γ in der ganzen linken Hälfte der γ-Ebene (mit solchen Vorzeichen, daß sie im Unendlichen $=\gamma$ werden). Längs E' wird in dem aus der Figur ersichtlichen Pfeilsinn integriert. Entsprechend der Zerfällung von f_1 in zwei Summanden zerlegt sich auch F_1 in zwei Teile $F^*+F_1^*$. Setzt man

$$\Omega(\gamma)=\int_l \frac{e^{iR(1-\xi)}}{\sqrt{W(\xi\gamma)}}\,d\xi, \tag{17}$$

so ist

$$F^*=\frac{iRn^2a}{n^2-1}\cdot\Omega(a), \tag{18}$$

$$F_1^*=\frac{R}{\pi}\int_{E'}\Omega(\gamma)f_1(\gamma)\,d\gamma. \tag{19}$$

Bei festem $\gamma=\cos\vartheta$ erfüllen die beiden Nullstellen des Polynoms 2. Grades $W(\xi\gamma)$ in ξ, falls ϑ_0 das Intervall von 0 bis $\pi/2$ durchläuft, eine Halbellipse E_γ mit den Brennpunkten ± 1, das durch die Funktion cos entworfene Bild der gradlinigen Verbindungsstrecke der beiden Punkte $\vartheta-\pi/2$ und $\vartheta+\pi/2$ in der ϑ-Ebene. Solange γ in der linken Hälfte der γ-Ebene liegt (links von g), trifft l den Ellipsenbogen E_γ nicht. W bleibt also, während ξ den Weg l durchläuft, von 0 verschieden, und es ist in (17) derjenige mit ξ stetig variierende Wurzelwert zu nehmen, der für unendlich großes ξ in $-\xi$ übergeht; denn wenn $\vartheta_0=0$ ist, wird $\sqrt{W}=\gamma-\xi$. — F^* nennen wir den *Hauptteil der Störung*, F_1^* die *Nebenwelle*; diese Zerlegung ist für die Diskussion des Vorgangs bei großen Werten des Brechungsindex n die natürliche.

§ 4. Diskussion im Falle eines großen Brechungsindex.

Es ergibt sich nämlich leicht, daß F_1^* einer Ungleichung

$$|F_1^*|\leqq\frac{\text{Konst.}}{|n|^2} \tag{20}$$

genügt, wo Konst. nicht nur von n, sondern auch vom Orte (P) unabhängig ist. Setzen wir in üblicher Weise

$$n=n_0(1-i\varkappa), \qquad (n_0,\ \varkappa \text{ positiv reell}),$$

so gilt dies wenigstens, solange der Absorptionskoeffizient $\varkappa$ (der stets <1 ist) oberhalb einer festen positiven Grenze liegt. Praktisch wichtig ist vor allem der Fall, wo $\varkappa$ nahezu $=1$ ist.

Zunächst ist $\Omega(\gamma)$ abzuschätzen. Mit γ liegen auch alle Punkte von E_γ auf E, und zwar erfüllen die zu den verschiedenen γ auf E' gehörigen E_γ die ganze Ellipse E mit Ausnahme des einen Punktes n; dies ist das Tor, durch welches der Weg l hindurchführt. Da n auf E liegt, ist der kürzeste Abstand des Brennpunktes 1 von E

$$p = \frac{|1+n|+|1-n|}{2} - 1.$$

In (17) kann l durch einen (von γ abhängigen) Weg l' ersetzt werden, der den Punkt 1 der ξ-Ebene ohne Überschreitung von E_γ mit dem Unendlichen der unteren Halbebene

$$[\Re(i\xi) > 0]$$

verbindet. Wir suchen ihn so einzurichten, daß sich aus dem Prinzip „absoluter Betrag des Integrals $\leqq$ Integral des absoluten Betrages" eine möglichst gute Abschätzung von Ω ergibt. Wir müssen also dafür sorgen, daß l' dem Bogen E_γ möglichst fern bleibt, andererseits aber der negative Imaginärteil der Richtungszahl $\frac{d\xi}{|d\xi|}$ längs l' möglichst groß. Beiden sich widereinander richtenden Forderungen genügen wir durch die folgende einfache Wahl in einer Weise, die dem Optimum leidlich nahe kommt: Die geradlinigen Strahlen, welche 1 mit Punkten von E_γ verbinden, lassen in der unteren Halbebene einen Winkelraum frei, dessen einer Schenkel die positive oder negative reelle Halbachse ist; wir wählen für l' den mittleren Strahl dieses Winkelraums. Ist μ sein Öffnungswinkel und bezeichnet x einen Augenblick den Imaginärteil von $1-\xi$, so gilt

$$\int_{l'} |e^{iR(1-\xi)}\, d\xi| = \frac{1}{\sin\frac{\mu}{2}} \int_0^\infty e^{-Rx}\, dx = \frac{1}{R\sin\frac{\mu}{2}}.$$

Der absolute Betrag von W ist das Produkt der Abstände des Punktes ξ von zwei Punkten auf E_γ. Da der kürzeste Abstand zwischen E_γ und l' aber offenbar $\geqq p\sin\frac{\mu}{2}$ ist, bekommen wir

$$|\Omega(\gamma)| \leqq \frac{1}{R p \sin^2 \frac{\mu}{2}}.$$

Variiert γ auf E', so nimmt μ seinen kleinsten Wert an, wenn γ mit dem in Fig. 3 als $-\sqrt{1-n^2}$ bezeichneten Endpunkt von E' zusammenfällt; $-\mu$ ist dann gleich dem zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und 0 gelegenen Azimut von $n-1$, $\operatorname{tg}\mu > \varkappa$. Unter der Voraussetzung, daß $\varkappa$ oberhalb einer festen positiven Grenze liegt, bleibt also auch $\sin^2\frac{\mu}{2}$ auf ganz E' oberhalb einer solchen Grenze, und aus (19), dem Umstande, daß auf E'

$$|f_1| \leqq \frac{\text{Konst.}}{|n|^2}$$

ist und E' eine Länge von der Größenordnung p oder $|n|$ besitzt, erhält man jetzt die gewünschte Abschätzung (20). Eine einigermaßen sorgfältige Durchführung derselben läßt erkennen, daß in ihr als Konst. die Zahl $4/\pi\varkappa$ zur Verwendung kommen darf. So zeigt sich, daß *für große n die Nebenwelle vollständig zu vernachlässigen und der Hauptteil der Störung, F^*, allein zu berücksichtigen ist.*

Da die Halbellipse E_a ganz dem Gebiet $\Re\xi < 1$ der ξ-Ebene angehört, kann in $\Omega(a)$ an Stelle des Integrationsweges l die von 1 ausgehende Parallele zur negativ-imaginären Achse treten. a ist eine kleine Zahl; unter α verstehe ich denjenigen in der Nähe von $\alpha = 0$ gelegenen Winkel, für welchen $a = \sin\alpha$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} W(\xi a) &= (\xi - \sin\alpha\cos\vartheta_0)^2 - (\cos\alpha\sin\vartheta_0)^2 \\ &= \frac{(R\xi - z\sin\alpha - r\cos\alpha)(R\xi - z\sin\alpha + r\cos\alpha)}{R^2} \\ &= -\frac{\tau(\tau + 2ir\cos\alpha)}{R^2}, \end{aligned}$$

wenn

$$\tau = i(R\xi - z\sin\alpha - r\cos\alpha)$$

gesetzt ist. Der Wert dieses Ausdrucks für $\xi = 1$ werde mit w bezeichnet:

$$w = i(R - r\cos\alpha - z\sin\alpha).$$

In

$$\sqrt{W} = \frac{i}{R}\sqrt{\tau(\tau + 2ir\cos\alpha)}$$

ist die Wurzel so zu nehmen, daß sie im Unendlichen $= \tau$ wird. Wir bekommen also

$$F^* = \frac{R n^2 a}{i(n^2-1)} \cdot \int_w^{w+\infty} \frac{e^{w-\tau}\, d\tau}{\sqrt{\tau(\tau + 2ir\cos\alpha)}}; \tag{21}$$

der Integrationsweg verläuft parallel der positiven reellen Achse. Die zu Beginn des § 3 gestellte Aufgabe ist damit gelöst.

Die zum Gibbsschen Phänomen analoge Erscheinung tritt dort auf, wo r groß ist von der gleichen Ordnung wie n^2, z aber von der gleichen oder kleinerer Größenordnung wie n. Wir lassen also den Brechungsindex n so über alle Grenzen wachsen, daß dabei seine Richtungszahl $n/|n|$ gegen einen bestimmten Wert $1/\iota$ strebt; $\iota = e^{i\delta}$, $0 < \delta \leqq \frac{\pi}{4}$. Gleichzeitig sollen r und z so variieren, daß $r/|n|^2$ und $z/|n|$ gegen endliche Grenzwerte $r_1 > 0$ und z_1 gehen. Dann ist

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \sim r + \frac{1}{2}\frac{z^2}{r},$$

$$w \sim i\left[r(1-\cos\alpha) - z\sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{z^2}{r}\right] \sim \frac{i}{2}\left[\frac{r}{n^2} + \frac{2z}{n} + \frac{z^2}{r}\right]$$

$$= \frac{i}{2r}\left(\frac{r}{n} + z\right)^2.$$

w konvergiert also gegen

$$w = \frac{i}{2r_1}(r_1\iota + z_1)^2. \tag{22}$$

Im Nenner des Integrals (21) ist τ neben $2ir\cos\alpha$ zu vernachlässigen; und es ergibt sich im Limes

$$\boxed{F_1 = \frac{r_1\iota}{r_1\iota + z_1} \cdot \mathrm{Er}(w)}, \tag{23}$$

wo

$$\mathrm{Er}(w) = \sqrt{w} \cdot e^w \int_w^{w+\infty} \frac{e^{-\tau}\, d\tau}{\sqrt{\tau}} \tag{24}$$

gesetzt und w aus (22) zu entnehmen ist. w liegt im zweiten Quadranten der komplexen Ebene, sein Azimut ω liegt zwischen

$$\frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{\pi}{2} + 2\delta,$$

das Azimut $\omega/2$ von $\sqrt{w}$ zwischen

$$\frac{\pi}{4} \text{ und } \frac{\pi}{4} + \delta.$$

Die Funktion Er hängt für reelle positive Argumentwerte eng mit dem Fehlerintegral, für rein imaginäre mit den Fresnelschen Integralen zusammen. Es gilt die Potenzentwicklung

$$\mathrm{Er}(w) = \sqrt{\pi w} \cdot e^w - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2w)^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)};$$

denn in

$$\mathrm{Er}(w) = \sqrt{\pi w} \cdot e^w - \sqrt{w} \int_0^w \frac{e^{w-\tau}\, d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

ist der Subtrahend, wenn $\sqrt{\tau/w} = x$ als Integrationsvariable eingeführt wird,

$$= 2w \int_0^1 e^{w(1-x^2)}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{n+1}}{n!} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n\, dx.$$

Nimmt man jedoch in (24) $\tau - w$ als Integrationsvariable x, so ergibt sich

$$\mathrm{Er}(w) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{1 + \frac{x}{w}}},$$

und daraus gewinnt man durch Entwicklung von

$$\left(1 + \frac{x}{w}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

nach Potenzen von x die asymptotische Darstellung

$$\mathrm{Er}(w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(-2w)^n},$$

insbesondere als erste Annäherung $\mathrm{Er}(w) \sim 1$. Sie ist gültig, solange das Azimut $\omega/2$ von $\sqrt{w}$ zwischen Grenzen liegt, die sich innerhalb des durch $-\frac{3\pi}{2} < \omega < \frac{3\pi}{2}$ beschriebenen Bereichs befinden. Um zu beurteilen, in welchem Gebiet der $r_1 z_1$-Ebene w groß ist, zeichnen wir die Kurven $|w| = \text{const.}$ Benutzen wir ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit dem Öffnungswinkel δ und gleichen Maßeinheiten auf den Achsen

(Fig. 4), so erscheinen diese Kurven als Kreise, welche die z_1-Achse im Nullpunkt berühren.

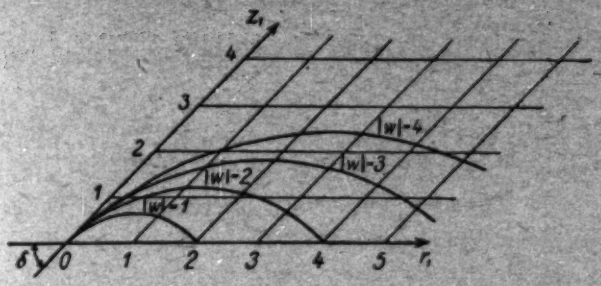


Fig. 4.

Die anschauliche Diskussion des durch die Formeln (22), (23), (24) in einfacher und vollständiger Weise beschriebenen Phänomens bereitet jetzt keine Schwierigkeiten mehr. F_1 bewirkt eine Abbildung des positiven Quadranten der $r_1 z_1$-Ebene auf eine komplexe F_1-Ebene. Beschreibt man in jener die Berandung des positiven Quadranten, nämlich 1. die r_1-Achse

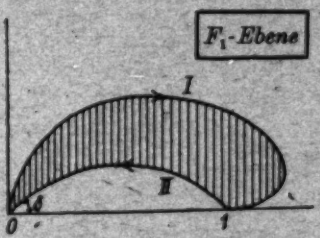


Fig. 5.

von 0 bis $+\infty$, 2. einen Viertelkreis um den Nullpunkt von unendlich großem Radius im positiven Sinne, und 3. die z_1-Achse vom Unendlichen zurück zum Nullpunkt, so durchläuft F_1 in der F_1-Ebene 1. den oberen, in Fig. 5 mit I bezeichneten Bogen, 2. den Kreisbogen II:

$$F_1 = \frac{1}{1 + \frac{z_1}{r_1 e^{\delta}}},$$

und 3. ist längs der ganzen z_1-Achse $F_1 = 0$. Alle Werte von F_1 liegen in dem von I und II begrenzten schraffierten Bereich. Die Figur entspricht dem Falle $\delta = \frac{\pi}{4}$.

In der Gleichung $F = 1 - F_1$ wird man den ersten Summanden 1 als Raumwelle, den zweiten $-F_1$ aber als Oberflächenwelle bezeichnen dürfen; denn F_1 konvergiert ja mit wachsendem n gleichmäßig gegen 0 in jedem Kreiskegel um die positive z-Achse, dessen Öffnungswinkel $< \pi$ ist. Diese Zerlegung ist mit der Sommerfeldschen, deren sachliche Berechtigung ich bezweifle, nicht identisch. Im übrigen vergleiche man unsere Formel (23) für F_1 mit Gl. (47), (55) a. a. O.

In einer Züricher Dissertation wird die im vorstehenden geschilderte Methode auch auf das *optische* Problem der Reflexion und Brechung einer Kugelwelle angewendet werden; die dabei gewonnenen Resultate sind von einer gewissen Bedeutung für das Verständnis der viel diskutierten totalen Reflexion.

(Eingegangen 8. August 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Deutsche Spar-Prämienstücke

1919

Steuerbegünstigungen:

Befreiung eines Besitzes bis zu 25 Stück von der Nachlaßsteuer und bezüglich derselben Stücke von der Erbanfallsteuer. Keine Nachlaß- oder Erbanfallsteuer für die auf den Namen Dritter bei der Reichsbank oder anderen vom Reichsminister der Finanzen noch zu benennenden Stellen auf fünf Jahre und mehr oder auf Todesfall hinterlegten Stücke (bis 10 Stücke für jede einzelne dritte Person).

Der Vermögenszuwachs, der sich aus dem Besitze der Anleihestücke gegenüber dem bei der Erwerbung der Stücke anzunehmenden Vermögenswert ergibt, unterliegt nicht der Besitzsteuer (Vermögenszuwachssteuer).

Die dem Besitzer der Stücke auf Grund der vorstehenden Bestimmungen zustehenden Leistungen sowie der aus dem Verkauf der Stücke erzielte Gewinn unterliegen im Gewinnjahre weder der Einkommensteuer noch der Kapitalertragssteuer.

Bei jeder Art der Besteuerung werden die Anleihescheine bei einer Stückzahl bis zu 50 Stück höchstens zum Nennwert, vom 20. Jahre ab zum Kündigungswert bewertet.

Zeichnungsbedingungen:

Annahmestellen. Zeichnungsstellen sind die Reichsbank und die im offiziellen Zeichnungsprospekt aufgeführten Geldinstitute. Die Zeichnungen können aber auch durch Vermittlung jeder Bank, jedes Bankiers, jeder Sparkasse und Kreditgenossenschaft erfolgen. — Zeichnungen werden

von Montag, den 10., bis Mittwoch, den 26. November 1919 mittags 1 Uhr

entgegengenommen. Früherer Zeichnungsschluß bleibt vorbehalten.

Zeichnungspreis. Der Preis für jedes Spar-Prämienstück beträgt 1000 Mark. Hiervon sind 500 Mark in 5% Deutscher Reichsanleihe zum Nennwert berechnet und 500 Mark in bar zu begleichen.

Die mit Januar-Juli-Zinsen ausgestatteten Reichsanleihestücke sind mit Zinsscheinen, fällig am 1. Juli 1920, die mit April-Oktober-Zinsen ausgestatteten Stücke mit Zinsscheinen, fällig am 1. April 1920, einzureichen. Den Einlieferern von 5% Reichsanleihe mit April-Oktober-Zinsscheinen werden auf ihre alten Anleihen Stückzinsen für 90 Tage = 1,25% vergütet.

Sicherheitsbestellung. Bei der Zeichnung hat jeder Zeichner eine Sicherheit von 10% des gezeichneten Betrages mit 100 Mark für jedes Prämienstück in bar zu hinterlegen.

Zuteilung. Die Zuteilung findet tunlichst bald nach dem Zeichnungsschluß statt. Die Art der Verteilung bestimmt das Reichsfinanzministerium.

Bezahlung. Die Zeichner sind verpflichtet, die zugeteilten Beträge bis zum 20. Dezember d. J. zu begleichen. Die Begleichung hat bei derjenigen Stelle zu erfolgen, bei der die Zeichnung angemeldet worden ist.

Sollen 5% Schuldbuchforderungen zur Begleichung verwendet werden, so ist sogleich nach Erhalt der Zuteilung ein Antrag auf Ausreichung von Schuldverschreibungen an die Reichsschuldenverwaltung, Berlin SW 68, Oranienstraße 92—94, zu richten. Der Antrag muß einen auf die Begleichung der Spar-Prämienstücke hinweisenden Vermerk enthalten und spätestens am 20. Dezember d. J. bei der Reichsschuldenverwaltung eingehen. Vordrucke zu solchen Anträgen mit Formvorschriften sind bei allen Zeichnungs- und Vermittlungsstellen zu haben. Daraufhin werden Schuldverschreibungen, die nur zur Begleichung von Spar-Prämienstücken geeignet sind, ohne Zinsbogen ausgereicht. Die Ausreichung erfolgt gebührenfrei und portofrei als Reichsdienstsache. Diese Schuldverschreibungen sind spätestens bis zum 20. März 1920 den in Absatz 1 genannten Zeichnungs- oder Vermittlungsstellen einzureichen.

Ausgabe der Stücke. Die Ausgabe der Prämienstücke erfolgt im Februar 1920; Schuldbuchgläubiger erhalten erforderlichenfalls bis zur ersten Gewinnverlosung im März n. J. durch ihre Vermittlungsstellen Nummernaufgabe. Zwischenscheine sind nicht vorgesehen.

Umtausch der Kriegsanleihen. Die Reichsbank wird, soweit möglich, unentgeltlich Stücke von höherem Nennwert als 500 Mark in kleine Stücke tauschen.

Berlin, im November 1919.

Reichsfinanzministerium

Inhalt.

Seite

1. Arthur Szarvassi. Über einen für die Quantentheorie wichtigen Satz der analytischen Mechanik 501
2. Alfred Hösel. Luftelektrisches Potentialgefälle und Gewitterwahrzeige 521
3. R. Schachenmeier. Kristallgitter, deren Atome durch Gravitationsfelder in stabilen Gleichgewichtslagen gehalten werden 548
4. Hans Joachim. Über die Messung der Dielektrizitätskonstante in der Wheatstoneschen Brücke bei Anwendung hoher Frequenzen 570

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren sodann möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahrzahl anzuführen.

1919. № 22.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. *Über einen für die Quantentheorie wichtigen Satz der analytischen Mechanik;*

von Arthur Szarvassi.

Bei statistischen oder quantentheoretischen Untersuchungen ist die Wahl der zur Konstruktion des Phasenraumes dienenden unabhängigen Veränderlichen von vornherein nur durch die Bedingung eingeschränkt, daß diese ein kanonisches System bilden müssen. Es ist aber häufig nötig, von einem System kanonischer Veränderlicher zu einem anderen solchen überzugehen. So hat Schwarzschild[1]) darauf aufmerksam gemacht, welche große Vereinfachung dadurch erzielt wird, daß man von den ursprünglichen Koordinaten und Impulsen zu „Winkel- und Wirkungsvariabeln“ übergeht. In diesem Zusammenhange liegt die Frage nach den Eigenschaften der Transformation nahe, welche ein kanonisches Variabelensystem wieder in ein solches überführt. Die Antwort auf diese Frage ist in einer besonders den Bedürfnissen der Astronomie angepaßten Form längst bekannt. Sie lautet: Sind x_λ, y_λ die ursprünglichen, u_λ, v_λ die neuen kanonischen Veränderlichen, und sind die Transformationsgleichungen in der Form angesetzt

$$\left.\begin{aligned} x_\lambda &= f_\lambda(u_1, u_2 \dots u_n;\ v_1, v_2 \dots v_n) \\ y_\lambda &= g_\lambda(u_1, u_2 \dots u_n;\ v_1, v_2 \dots v_n) \end{aligned}\right\} \quad \lambda = 1, 2 \dots n,$$

so sind die Bedingungsgleichungen zu erfüllen:

$$(u_\lambda, u_\mu) = 0,\ (v_\lambda, v_\mu) = 0,\ (u_\lambda, v_\mu) = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \neq \mu \\ 1 \text{ für } \lambda = \mu \end{cases} \quad \begin{aligned} &\lambda = 1, 2 \dots n, \\ &\mu = 1, 2 \dots n, \end{aligned}$$

indem man das Poissonsche Klammersymbol

$$(\varphi, \psi) = \sum_{\lambda=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial y_\lambda} - \frac{\partial \varphi}{\partial y_\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial x_\lambda} \right)$$

einführt.

1) Zur Quantenhypothese, Berl. Akad. d. Wiss. 1916. S. 548.

Ich möchte aber zeigen, daß sich die Bedingung auch in ganz anderer Form geben läßt, und daß gerade diese für die Quantentheorie ein besonderes Interesse hat, besonders deshalb, weil sie eine Fundamentaleigenschaft des Phasenraumes aufdeckt. Es seien nämlich x_1, $x_2, \ldots x_n$; $y_2 \ldots y_n$ kanonische Veränderliche, d. h. es mögen die Gleichungen bestehen

$$\dot{x}_\lambda = \frac{\partial H}{\partial y_\lambda}, \quad \dot{y}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial x_\lambda} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n, \tag{1}$$

indem die Hamiltonsche charakteristische Funktion mit $H(x_1, x_2 \ldots x_n; y_1 y_2 \ldots y_n)$ bezeichnet wird. Will man von den x_λ, y_λ zu neuen kanonischen Veränderlichen u_1, $u_2 \ldots u_n$; v_1, $v_2, \ldots v_n$ übergehen, so geschieht dies durch Vermittlung einer Funktion $S(x_1, x_2 \ldots x_n; v_1, v_2 \ldots v_n)$. *Die notwendige und hinreichende Bedingung, nämlich daß die neuen Variabeln wieder ein kanonisches System bilden, ist die, daß die Transformationsgleichungen die Form haben*

$$y_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x_\lambda}, \quad u_\lambda = \frac{\partial S}{\partial v_\lambda} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n. \tag{2}$$

Die Funktion S unterliegt dabei noch der Bedingung, daß die Hessesche Determinante

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial x_\lambda \partial v_\mu} \right|$$

von Null verschieden sein muß, da die x_λ, y_λ voneinander und ebenso die u_λ, v_λ voneinander unabhängig sein sollen. *Gegenüber der Transformation (2) sind also die kanonischen Gleichungen invariant.*

Wir zeigen zunächst, daß die Bedingung (2) hinreicht; d. h. wir setzen voraus, es würden die x_λ, y_λ auf die neuen Veränderlichen u_λ, v_λ transformiert vermittelst der Gleichungen (2), und wir haben zu beweisen, daß dann auch die Gleichungen bestehen:

$$\dot{u}_\lambda = \left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda}\right)_u, \quad \dot{v}_\lambda = -\left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda}\right)_v \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n. \tag{3}$$

Dabei soll mit dem Symbol

$$\left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda}\right)_u \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda}\right)_v$$

bezeichnet werden, daß man mittels der Substitution (2) die Funktion H zunächst durch die u_λ, v_λ ausgedrückt hat, und

dann in gewöhnlicher Weise die partiellen Ableitungen nach den v_λ bzw. u_λ bildet.

Es ist nun

$$\left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda}\right)_u = \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u + \frac{\partial H}{\partial y_\lambda}\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right]$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n}\left[-\dot{y}_\mu\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u + \dot{x}_\mu\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right]. \qquad \text{[nach (1)]}$$

Ferner haben wir nach (2)

$$\dot{y}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}\dot{x}_\nu + \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu}\dot{v}_\nu\right)$$

und

$$\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u = \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u.$$

Daher wird

$$\left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda}\right)_u = -\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\dot{x}_\nu + \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu}\dot{v}_\nu\right)\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\nu}\right)_u$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right]\dot{x}_\mu$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\lambda}\dot{x}_\mu - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\lambda}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\nu}\right)_u\dot{v}_\nu.$$

Andererseits ist nach (2)

$$\dot{u}_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_\lambda \partial x_\mu}\dot{x}_\mu + \frac{\partial^2 S}{\partial v_\lambda \partial v_\mu}\dot{v}_\mu\right).$$

Folglich erhalten wir

$$\dot{u}_\lambda - \left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda}\right)_u = \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial v_\lambda \partial v_\mu}\dot{v}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u\dot{v}_\nu\right]$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_\mu \partial v_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial v_\mu \partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right]\dot{v}_\mu$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial v_\lambda}\left(\frac{\partial S}{\partial v_\mu}\right)\right]_u\dot{v}_\mu = \sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u\dot{v}_\mu = 0.$$

Analog erhalten wir

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda}\right)_v = \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v + \frac{\partial H}{\partial y_\mu}\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v\right]$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n}\left[-\dot{y}_\mu\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v + \dot{x}_\mu\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v\right]$$

$$= -\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\dot{x}_\nu + \frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu}\dot{v}_\nu\right)\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v \dot{x}_\mu$$

$$= -\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_\mu \partial v_\nu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v \dot{v}_\nu;$$

und da

$$\sum_{\mu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial v_\nu}\right)\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v = \left[\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left(\frac{\partial S}{\partial v_\lambda}\right)\right]_v,$$

so ist

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda}\right)_v = -\sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial u_\lambda}\left(\frac{\partial S}{\partial v_\nu}\right)\right]_v \dot{v}_\nu = -\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial u_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v \dot{v}_\nu = -\dot{v}_\lambda.$$

Also erfüllen wirklich die u_λ, v_λ die kanonischen Gleichungen (3).

Nunmehr soll gezeigt werden, daß die Form (2) der Substitutionsgleichungen auch notwendig ist für das Bestehen der Gleichungen (3). Wir nehmen also an, wir hätten zwei Gruppen von Veränderlichen, nämlich die x_λ, y_λ einerseits, die u_λ, v_λ andererseits; die erste Gruppe erfülle die Gleichungen (1), die zweite das Gleichungssystem (3). Die beiden Gruppen werden durch Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x_\lambda &= x_\lambda(u_1, u_2 \ldots u_n;\ v_1, v_2 \ldots v_n) \\ y_\lambda &= y_\lambda(u_1, u_2 \ldots u_n;\ v_1, v_2 \ldots v_n) \end{aligned} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n$$

miteinander verknüpft sein. Wir können aber, indem wir die erste Reihe dieser Gleichungen nach den u_λ aufgelöst und diese Werte in die zweite Reihe eingesetzt denken, die Transformationsgleichungen in den Form annehmen:

$$(4) \qquad \begin{cases} y_\lambda = f_\lambda(x_1, x_2 \ldots x_n;\ v_1, v_2 \ldots v_n) \\ u_\lambda = g_\lambda(x_1, x_2 \ldots x_n;\ v_1, v_2 \ldots v_n). \end{cases} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n.$$

(Es ist also vorausgesetzt, daß die Auflösung der Transformationsgleichungen für x_λ nach den u_λ möglich ist.) Nun handelt es sich um die Natur der Funktionen f_λ, g_λ.

Wir bilden zunächst

$$\left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda}\right)_u = \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u + \frac{\partial H}{\partial y_\mu}\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right] \qquad \text{[nach (1)]}$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n}\left[-\dot{y}_\mu\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u + \dot{x}_\mu\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right] \qquad \text{[nach (4)]}$$

$$= -\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu + \frac{\partial f_\mu}{\partial v_\nu}\dot{v}_\nu\right)\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial v_\lambda}\right)_u + \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial f_\mu}{\partial v_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right]\dot{x}_\mu$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial f_\mu}{\partial v_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right]\dot{x}_\mu - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u\dot{v}_\mu,$$

wobei davon Gebrauch gemacht ist, daß man die Reihenfolge der Summationen nach μ und ν vertauschen kann. Da ferner nach (4)

$$\dot{u}_\lambda = \sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\mu}\dot{x}_\mu + \frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu}\dot{v}_\mu\right),$$

so ist nach (3)

$$\dot{u}_\lambda - \left(\frac{\partial H}{\partial v_\lambda}\right)_u = \sum_{\mu=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial f_\mu}{\partial v_\lambda}\right) + \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)\right]\dot{x}_\mu + \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right]\dot{v}_\mu = 0.$$

Da aber

$$\frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\mu}\right)_u = \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu}\right)_u = \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial v_\mu}\right)_u = 0,$$

so läßt sich der letzten Gleichung die Form geben

$$(5)\quad \begin{cases} \sum_{\mu=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\mu}-\frac{\partial f_\mu}{\partial v_\lambda}\right)+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u\right]\dot{x}_\mu \\ \quad +\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u-\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\mu}\right)_u\right]\dot{v}_\mu=0 \end{cases} \qquad \lambda=1,2\ldots n.$$

Zu einem analogen Gleichungssystem gelangen wir, indem wir bilden

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda}\right)_u &= \sum_{\mu=1}^{n}\left[\frac{\partial H}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v+\frac{\partial H}{\partial y_\mu}\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v\right]\\ &= \sum_{\mu=1}^{n}\left[-\dot{y}_\mu\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_u+\dot{x}_\mu\left(\frac{\partial y_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v\right]\\ &= -\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\dot{x}_\nu+\frac{\partial f_\mu}{\partial v_\nu}\dot{v}_\nu\right)\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v\\ &\quad +\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v\dot{x}_\mu\\ &= \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v\dot{x}_u\\ &\quad -\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v\dot{v}_\mu.\end{aligned}$$

Nach (3) ist also

$$\begin{aligned}\dot{v}_\lambda+\left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda}\right)_v &= \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v\dot{x}_\mu+\dot{v}_\lambda\\ &\quad -\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v\dot{v}_\mu=0.\end{aligned}$$

Da aber

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v=\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v=\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v=\begin{cases}0 & \text{für } \mu\neq\lambda,\\ 1 & \text{für } \mu=\lambda,\end{cases}$$

so kann man die letzte Beziehung in der Form schreiben

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v \dot{x}_\mu \\ \quad +\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v \dot{v}_\mu = 0 \end{cases} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n.$$

Das Gleichungssystem (5), (6) besteht aus $2n$ Gleichungen, welche in bezug auf die $2n$ Größen $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots \dot{x}_n; \dot{v}_1, \dot{v}_2, \ldots \dot{v}_n$ linear und homogen sind. Aus den Gleichungen dürfen sich diese Veränderliche natürlich nicht als Funktionen der Koeffizienten bestimmen, sondern jene müssen identisch erfüllt sein. Dies aber ist nur möglich, wenn die Koeffizienten der $\dot{x}_\mu$, $\dot{v}_\mu$ in jeder der Gleichungen (5), (6) einzeln verschwinden. Somit erhalten wir die Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\mu}-\frac{\partial f_\mu}{\partial v_\lambda}+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u = 0 \\ \sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda}\right)_u-\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\mu}\right)_u\right] = 0 \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n. \\ \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial f_\nu}{\partial x_{\mu_0}}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v = 0 \qquad \mu = 1, 2 \ldots n. \\ \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}-\frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu}\right)\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v = 0 \end{cases}$$

Nun ist, wie wir eben vorhin festgestellt haben,

$$\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial u_\lambda}\right)_v = \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu \neq \lambda, \\ 1 & \text{für } \mu = \lambda, \end{cases}$$

d. h. es bestehen für jedes λ die n Gleichungen

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_\lambda}\right)_v+\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_\lambda}\right)_v+\ldots+\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_\lambda}\right)_v = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial g_{\lambda-1}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_\lambda}\right)_v+\frac{\partial g_{\lambda-1}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_\lambda}\right)_v+\ldots+\frac{\partial g_{\lambda-1}}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_\lambda}\right)_v = 0$$

$$\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_\lambda}\right)_v+\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_\lambda}\right)_v+\ldots+\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_\lambda}\right)_v = 1$$

$$\frac{\partial g_{\lambda+1}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_\lambda}\right)_v+\frac{\partial g_{\lambda+1}}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_\lambda}\right)_v+\ldots+\frac{\partial g_{\lambda+1}}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_\lambda}\right)_v = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial g_n}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_\lambda}\right)_v+\frac{\partial g_n}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial u_\lambda}\right)_v+\ldots+\frac{\partial g_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial x_n}{\partial u_\lambda}\right) = 0.$$

Aus diesen n Gleichungen lassen sich die n Ableitungen

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_\lambda}\right)_v, \quad \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_\lambda}\right)_v, \quad \ldots \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_\lambda}\right)_v$$

berechnen. Nennen wir nämlich die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial (g_1, g_2 \ldots g_n)}{\partial (x_1, x_2 \ldots x_n)} = D,$$

so ist irgendein

$$\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda}\right)_v = \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu}\right)}.$$

Dabei ist die Determinante D wesentlich von Null verschieden; denn sonst bestünde zwischen den $g_1, g_2, \ldots g_n$ eine Beziehung, welche die $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht enthält, was unmöglich ist, weil die $u_1, u_2, \ldots v_1, v_2, \ldots$ ein System voneinander unabhängiger Veränderlicher sind.

Daher gibt die dritte der Gleichungen (7)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}\right) \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu}\right)} = 0 \qquad \begin{matrix} \lambda = 1, 2 \ldots n; \\ \mu = 1, 2 \ldots n; \end{matrix}$$

d. h. man hat für irgendein μ die n Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\right) D_{11} + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\right) D_{12} + \ldots + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_n} - \frac{\partial f_n}{\partial x_\mu}\right) D_{1n} = 0$$

$$\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\right) D_{21} + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\right) D_{22} + \ldots + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_n} - \frac{\partial f_n}{\partial x_\mu}\right) D_{2n} = 0$$

. . . . . .

$$\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\right) D_{n1} + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu}\right) D_{n2} + \ldots + \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial x_n} - \frac{\partial f_n}{\partial x_\mu}\right) D_{nn} = 0.$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$\frac{\partial D}{\partial \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu}\right)} = D_{\lambda\nu}$$

gesetzt worden. Diese Gleichungen können aber nur zusammen bestehen, wenn entweder die Determinante

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \ldots D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \ldots D_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{n1} & D_{n2} & \ldots D_{nn} \end{vmatrix}$$

verschwindet, oder wenn

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2 \ldots n.$$

Nun ist aber die Determinante nichts anderes als die reziproke der Determinante D und daher nach dem Cauchyschen Determinantensatz gleich D^{n-1}; sie kann folglich nicht verschwinden, weil D von Null verschieden ist. Also ist nur die zweite Eventualität möglich, und wir erhalten

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu} = 0 \qquad \begin{matrix} \mu = 1, 2 \ldots n. \\ \nu = 1, 2 \ldots n. \end{matrix} \tag{8a}$$

Genau ebenso folgt aus der vierten der Gleichungen (7)

$$\frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial f_\nu}{\partial v_\mu} = 0 \qquad \begin{matrix} \mu = 1, 2 \ldots n. \\ \nu = 1, 2 \ldots n. \end{matrix} \tag{8b}$$

Damit ist auch die erste der Gleichungen (7) erfüllt.

Die zweite der Gleichungen (7) aber läßt sich vermöge (8b) schreiben

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u - \frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\mu} \right)_u \right| = 0.$$

Nun ist

$$0 = \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u = \left(\frac{\partial g_\mu}{\partial v_\lambda} \right)_u = \frac{\partial g_\mu}{\partial v_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\lambda} \right)_u$$

und

$$0 = \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial v_\mu} \right)_u = \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu} \right)_u = \frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial g_\lambda}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\mu} \right)_u;$$

daher nimmt die Gleichung die Form an:

$$\frac{\partial g_\lambda}{\partial v_\mu} - \frac{\partial g_\mu}{\partial v_\lambda} = 0,$$

oder wenn man der Konformität mit (8a) und (8b) wegen die Indexbuchstaben μ, ν benützt:

$$\frac{\partial g_\mu}{\partial v_\nu} - \frac{\partial g_\nu}{\partial v_\mu} = 0 \qquad \begin{matrix} \mu = 1, 2 \ldots n. \\ \nu = 1, 2 \ldots n. \end{matrix} \tag{8c}$$

Die Bedeutung der drei Bedingungsgleichungen (8a), (8b), (8c) ist klar. Die erste besagt: Die n-dimensionale Vektorverteilung mit den Komponenten $f_1, f_2, \ldots f_n$ im Raume der $x_1, x_2, \ldots x_n$ besitzt ein Potential S; d. h. es gilt

$$f_\mu = \frac{\partial S}{\partial x_\mu} \qquad \mu = 1, 2 \ldots n.$$

Da die f_μ außer von den $x_1, x_2 \ldots x_n$ noch von den $v_1, v_2 \ldots v_n$ abhängen, so enthält natürlich auch die Funktion S die letzteren Variabeln als Parameter. Analog besagt die Bedingung (8c), daß die Vektorverteilung $g_1, g_2, \ldots g_n$ im Raume der v_1, $v_2, \ldots v_n$ ein Potential S' besitzt,

$$g_\mu = \frac{\partial S'}{\partial v_\mu} \qquad \mu = 1, 2 \ldots n,$$

wobei S' auch noch die $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Parameter enthält. Durch Einsetzen in (8b) aber findet man, daß die beiden Potentiale identisch sind:

$$S = S'.$$

Damit aber ist bewiesen, daß die Transformationsgleichungen (4) notwendig die Form haben

$$(2) \qquad y_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x_\lambda}, \quad u_\lambda = \frac{\partial S}{\partial v_\lambda} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n.$$

Sämtliche Transformationen dieser Art *bilden eine Gruppe.* In der Tat, nehmen wir zunächst ein System von Veränderlichen x_λ, y_λ, und transformieren wir dasselbe auf ein anderes u_λ, v_λ vermittelst einer Funktion $S(x_1, x_2, \ldots x_n; v_1, v_2, \ldots v_n)$:

$$(a) \qquad y_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x_\lambda}, \quad u_\lambda = \frac{\partial S}{\partial v_\lambda} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n.$$

Transformieren wir dann mit Hilfe einer Funktion $S'(u_1, u_2, \ldots u; s_1, s_2, \ldots s_n)$ die Variabelen u_λ, v_λ weiter auf neue Veränderliche r_λ, s_λ:

$$(b) \qquad v_\lambda = \frac{\partial S'}{\partial u_\lambda}, \quad r_\lambda = \frac{\partial S'}{\partial s_\lambda} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n.$$

Durch diese zwei Schritte (a) und (b) ist das ursprüngliche System der x_λ, y_λ auf das System der r_λ, s_λ transformiert. Es ist jetzt zu zeigen, daß man durch eine Transformation derselben Art von den Veränderlichen x_λ, y_λ unmittelbar zu den Veränderlichen r_λ, s_λ gelangen kann.

Nun folgt aus (a), daß

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (y_\lambda \, dx_\lambda + u_\lambda \, dv_\lambda) = dS,$$

und aus (b), daß

$$\sum_{\lambda=1}^{n} (v_\lambda \, du_\lambda + r_\lambda \, ds_\lambda) = dS'.$$

Durch Addition erhält man also

$$\sum_{\lambda=1}^{n}(y_\lambda\, dx_\lambda + r_\lambda\, ds_\lambda) = d\left(S + S' - \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda v_\lambda\right).$$

Daher stellt

$$S'' = S + S' - \sum_{\lambda=1}^{n} u_\lambda v_\lambda$$

eine Funktion dar, welche bloß von den x_λ, y_λ abhängt, wovon man sich mit Zuhilfenahme der Gleichungen (a), (b) sofort direkt überzeugen kann, und es ist

$$(c) \qquad y_\lambda = \frac{\partial S''}{\partial x_\lambda}, \quad r_\lambda = \frac{\partial S''}{\partial s_\lambda}. \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n$$

Hieraus folgt: Stellt man sich mit Benützung von Hilfsveränderlichen u_λ, v_λ, welche die Gleichungen

$$u_\lambda = \frac{\partial S}{\partial v_\lambda}, \quad v_\lambda = \frac{\partial S'}{\partial u_\lambda} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n$$

erfüllen, die eben definierte Funktion $S''(x_1, x_2, \ldots x_n; s_1, s_2, \ldots s_n)$ her, so transformieren sich mit Hilfe derselben durch die Gleichungen (c) die Veränderlichen x_λ, y_λ unmittelbar und mit einem Schritte in die Veränderlichen r_λ, s_λ, und die Transformation ist von derselben Art wie die in (a) und (b) benützte. Damit ist die Gruppeneigenschaft bewiesen.

Die Transformation (2) hat eine interessante Eigenschaft, welche wir jetzt entwickeln wollen. Betrachten wir nämlich ein Volumelement des Phasenraumes der x_λ, y_λ, und berechnen wir seinen Inhalt. Dasselbe ist gegeben durch das $2n$-fache Integral

$$\iint\!\!\cdots\!\int^{(2n)} dx_1, dx_2 \ldots dx_n\; dy_1\, dy_2 \ldots dy_n.$$

Transformieren wir nun die x_λ, y_λ auf die neuen Variabeln vermöge der Gleichungen (2), so verwandelt sich bekanntlich das Raumintegral in das folgende:

$$\iint\!\!\cdots\!\int^{(2n)} \frac{\partial(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n)}{\partial(u_1 \ldots u_n, v_1 \ldots v_n)}\, du_1 \ldots du_n\; dv_1 \ldots dv_n.$$

Berechnen wir die hier auftretende Funktionaldeterminante Δ. Sie lautet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_n}\right)_u \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_1}\right) \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial x_n}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial v_n}\right)_u \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial y_1}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial y_1}{\partial v_n}\right)_u \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial y_n}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial y_n}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial y_n}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial y_n}{\partial v_n}\right)_u \end{vmatrix}.$$

Berücksichtigt man aber die schon oben benützten Beziehungen

$$\left(\frac{\partial y_\lambda}{\partial u_\mu}\right)_v = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\mu}\right)_v,$$

$$\left(\frac{\partial y_\lambda}{\partial v_\mu}\right)_u = \frac{\partial f_\lambda}{\partial v_\mu} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial v_\mu}\right)_u,$$

indem wir die Bezeichnungen von vorhin

$$\frac{\partial S}{\partial x_\lambda} = f_\lambda, \quad \frac{\partial S}{\partial v_\lambda} = g_\lambda$$

beibehalten, so läßt sich die Determinante wesentlich vereinfachen. Wir multiplizieren nämlich die ersten n Zeilen der Determinante der Reihe nach mit

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}$$

und subtrahieren die Summe der so erhaltenen n Zeilen von der $n+1$ten Zeile, wodurch sich der Wert der Determinante nicht ändert; hierauf multiplizieren wir die ersten n Zeilen bzw. mit

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_n}$$

und subtrahieren sie von den Elementen der $n+2$ten Zeile usw. So erhalten wir

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial x_1}{\partial v_n}\right)_u \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_1}\right)_v \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial u_n}\right)_v, & \left(\frac{\partial x_n}{\partial v_1}\right)_u \cdots \left(\frac{\partial x_n}{\partial v_n}\right)_u \\ 0, \quad \cdots \quad 0, & \frac{\partial f_1}{\partial v_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_1}{\partial v_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, \quad \cdots \quad 0, & \frac{\partial f_n}{\partial v_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f_n}{\partial v_n} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante aber ist das Produkt zweier Determinanten $n$ter Ordnung, nämlich

$$\Delta = \left(\frac{\partial(x_1, x_2 \dots x_n)}{\partial(u_1, u_2 \dots u_n)}\right)_v \cdot \frac{\partial(f_1, f_2 \dots f_n)}{\partial(v_1, v_2 \dots v_n)}.$$

Wir haben aber schon oben bemerkt, daß erstlich

$$\left(\frac{\partial x_\nu}{\partial u_\mu}\right)_v = \frac{D_{\mu\nu}}{D},$$

und zweitens, daß die Determinante der Minoren $D_{\mu\nu}$

$$|D_{\mu\nu}| = D^{n-1};$$

hieraus folgt, daß

$$\left(\frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial(u_1 \dots u_n)}\right)_v = \frac{1}{D^n} \cdot D^{n-1} = \frac{1}{D}.$$

Dabei bedeutet D die Determinante

$$D = \frac{\partial(g_1, g_2 \dots g_n)}{\partial(x_1, x_2 \dots x_n)}.$$

Demnach ist

$$\Delta = \frac{1}{D} \frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(v_1 \dots v_n)}.$$

Da aber

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial v_\mu} = \frac{\partial g_\mu}{\partial x_\lambda},$$

so ist

$$\frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(v_1 \dots v_n)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \dots \frac{\partial f_1}{\partial v_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \dots \frac{\partial f_2}{\partial v_n} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial v_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial v_2} \dots \frac{\partial f_n}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \dots \frac{\partial g_n}{\partial x_2} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \dots \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = D,$$

und folglich

$$\Delta = 1.$$

Hieraus folgt, daß

$$\iint^{(2n)} \dots \int dx_1 \dots dx_2 \; dy_1 \dots dy_n = \iint^{(2n)} \dots \int du_1 \dots du_2 \; dv_1 \dots dv_n.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stellt ein Volumelement des Phasenraumes der u_λ, v_λ dar, wenn man auch die u_λ, v_λ als *rechtwinkelige* Koordinaten des Phasenraumes deutet. Also erhält man den Satz: Bei der durch die Transformation (2) vermittelten punktweisen Abbildung des Phasenraumes der x_ν

y_λ auf den Raum der u_λ, v_λ *geht ein Raumteil des* x_λ-, y_λ-*Raumes in einem gleichgroßen Raumteil des* u_λ-, v_λ-*Raumes über.*

Dieser Satz hat eine für die Quantentheorie wichtige Konsequenz. Nach der Hypothese von Planck ist die Einteilung des 2 n-dimensionalen Phasenraumes so zu wählen, daß eine Zelle das Volumen h^n hat, wenn h das Plancksche Wirkungsquantum ist. Da die Transformation (2) ein kanonisches Variabelensystem in ein ebensolches überführt, so stellt die Gruppe aller Transformationen (2) sämtliche zu einem Ausdruck der Hamiltonschen Funktion H gehörigen kanonischen Variabelensysteme her; dies sind also zugleich alle, welche zur Konstruktion des Phasenraumes der statistischen Mechanik verwendet werden können, da man ja für diesen Zweck nur kanonische Veränderliche brauchen kann. Hat man nun für ein solches Variabelensystem die Einteilung des Phasenraumes konstruiert, und bildet man diese Einteilung auf ein anderes System von Veränderlichen ab, so gehen nach unserem Satz dabei die Zellen in volumsgleiche über, sie haben also jedenfalls wieder das Volum h^n, gleichgültig, wie die neuen Veränderlichen im übrigen gewählt sein mögen.

Ein wichtiger Spezialfall der betrachteten Transformation tritt ein, wenn von den neuen Veränderlichen u_λ, v_λ die letzteren $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ von der Zeit unabhängig, also konstant sind; wir wollen sie dann mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bezeichnen. In diesem Falle stellt die erste Hälfte der Transformationsformeln (2)

$$y_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x_\lambda} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n$$

n Beziehungen zwischen den x_λ und den y_λ dar, in welchen noch die n Konstanten α_λ erscheinen; sie stellen also nichts anderes dar als die sogenannten intermediären Integrale der kanonischen Gleichungen (1). Zugleich folgt aus (3)

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u_\lambda}\right)_v = 0,$$

d. h. die charakteristische Funktion H enthält nach der Transformation außer der Zeit — falls sie von dieser explizit abhängt — nur die Konstanten α_n. Aus der zweiten Hälfte der Gleichungen (3) folgen dann die u_λ durch einfache Quadratur

als Funktionen der Zeit und aus der zweiten Hälfte der Gleichungen (2) ergeben sich die x_i als Funktionen von t und von $2n$ Konstanten, also als die Integrale von (1). Die Transformationsformeln (2) geben also in diesem Falle die Darstellung der Integrale von (1). Wenn speziell, wie wir jetzt annehmen wollen, die Funktion H die Zeit nicht explizit enthält, sie also mit der Energie identisch ist, so sind nach (3) die Variabelen u_i, die wir nun mit w_i bezeichnen wollen, lineare Funktionen der Zeit:

$$w_i = \frac{\partial H}{\partial a_i} \cdot t + a_i \qquad \text{(die } a_i\text{-Konstante)}.$$

Diese Darstellung der Integrale der kanonischen Gleichungen (1) mit Hilfe der Größen α_i und w_i — die übrigens rein formal ist, da der Weg zunächst fehlt, zu derselben zu gelangen — deckt sich nicht mit jener nach der bekannten Jacobischen Integrationsmethode. Diese stellt vielmehr einen noch spezielleren Fall dar: es werden nämlich nicht bloß die v_i, sondern auch alle u_i bis auf eines, z. B. u_1 als konstant angenommen. Aus den Gleichungen (3) folgt dann, daß die Energie H nach der Transformation nur von der Konstanten v_1 abhängt, dieser also direkt gleichgesetzt werden kann. Diese Tatsache benützt man in bekannter Weise bei der Jacobischen Methode, um aus der Forderung $H = v_1$, wobei in H für die y_i die aus (2) folgenden Ausdrücke eingesetzt werden, die Funktion S zu bestimmen. Wir wollen für diesen Fall die Konstanten v_i mit c_i, die Größen u_1 mit $t + j_1$; $u_2, \ldots u_n$ bzw. mit $j_2 \ldots j_n$ bezeichnen.

Für die Quantentheorie ist nun der Übergang von dem nach der Jacobischen Methode erhaltenen System der c_i, j_i zu dem der α_i, w_i von Wichtigkeit. Das erstere eignet sich nämlich nicht zur Konstruktion des Phasenraums, weil sich unter den Koordinaten die Energie selbst befände, während doch gerade die Verteilung der Energie im Phasenraum, letztere als Funktion der Koordinaten des Phasenraumes aufgefaßt, ein Hauptziel der Untersuchung bildet. Bisher ist diese Aufgabe, von dem ersten System kanonischer Parameter zum anderen überzugehen, nur für den Fall bedingt-periodischer Bewegungen aufgetreten, und zwar hat Schwarzschild eine Methode an-

gegeben, diesen Übergang in bequemer Weise zu vollziehen.[1]) Weil aber aus seiner Darstellung nicht hervorgeht, ob seine Methode allgemein anwendbar ist (wie sie es tatsächlich ist) und weil vielleicht ein oder der andere Punkt der Theorie noch der Aufhellung bedarf, dürften einige kurze Bemerkungen über den Gegenstand nicht überflüssig sein.

Zunächst bemerken wir, daß ganz allgemein der Übergang von dem System der c_λ, j_λ zu dem der α_λ, w_λ einfach durch eine lineare Substitution geschehen kann. In der Tat sieht man sogleich, daß der Zweck erreicht ist, wenn man setzt

$$\alpha_\lambda = m_{\lambda 1} c_1 + m_{\lambda 2} c_2 + \ldots + m_{\lambda n} c_n \quad \lambda = 1, 2 \ldots n.$$

Es fragt sich, welche Werte die $m_{\lambda\mu}$ für den Fall bedingt-periodischer Bewegungen haben.

Die Jacobische Gleichung $H = c_1$ möge die Form haben

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} A_\lambda \left(\frac{\partial S}{\partial x_\lambda}\right)^2 - (U + c_1) = 0;$$

die A_λ und die potentielle Energie U sind Funktionen der x_λ. Es kann aber sein, daß einige der x_λ in der Gleichung nicht vorkommen (zyklische Koordinaten); es seien dies die Variabelen x_{n-k+1}, $x_{n-k+2} \ldots x_n$ (wir können ja die Reihenfolge der x_λ immer so wählen, daß es gerade die letzten in der Reihe sind). Wir können dann setzen

$$S(x_1, x_2 \ldots x_n) = S'(x_1, x_2 \ldots x_{n-k}) + c_{n-k+1} x_{n-k+1} + \ldots + c_n x_n,$$

so daß die Funktion S' die Gleichung zu erfüllen hat

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n-k} A_\lambda \left(\frac{\partial S'}{\partial x_\lambda}\right)^2 - (U' + c_1) = 0,$$

wo

$$U' = U - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=n-k+1}^{n} c_\lambda A_\lambda.$$

Wir nehmen Separation der Veränderlichen an; es sei also

$$S'(x_1, x_2 \ldots x_{n-k}) = S_1'(x_1) + S_2'(x_2) + \ldots + S_{n-k}'(x_{n-k}).$$

---

1) A. a. O. S. 552.

Für diesen Fall hat Stäckel[1]) die allgemeine Form des Integrals gefunden; es ist

$$S_\lambda'(x_\lambda) = \int d x_\lambda \sqrt{\psi_\lambda(x_\lambda)} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n-k,$$

wobei $\psi_\lambda(x_\lambda)$ eine gewisse *lineare* Funktion der Konstanten c_1, $c_2, \ldots c_{n-k}$ ist. Damit die Bewegung bedingt-periodisch sei, muß die Funktion $\psi_\lambda(x_\lambda)$ die Form haben

$$\psi_\lambda(x_\lambda) = (x_\lambda - a_\lambda)(b_\lambda - x_\lambda)\Phi_\lambda(x_\lambda),$$

wobei $\Phi_\lambda(x_\lambda)$ für keinen Wert von x_λ zwischen a_λ und b_λ verschwindet. Die Integrale der kanonischen Gleichungen sind dann

$$y_\lambda = \frac{\partial S}{\partial x_\lambda} \; (\lambda = 1, 2 \ldots n), \quad t + j_\lambda = \frac{\partial S}{\partial c_\lambda}, \quad j_\lambda = \frac{\partial S}{\partial c_\lambda} \; (\lambda = 2, 3 \ldots n)$$

ausgedrückt durch die Konstanten c_λ und j_λ.

Der Übergang zu den Konstanten α_λ und w_λ soll zugleich bewirken, daß die x_λ periodische Funktionen der w_λ mit der Periode 2π werden. Nun wird dieser letztere Zweck, wie bekannt[2]), durch die folgende lineare Substitution erreicht, welche die j_λ mit den w_λ verbindet:

$$\begin{aligned}
\pi(t + j_1) &= \omega_{11} w_1 + \omega_{21} w_2 + \ldots + \omega_{n-k,1} w_{n-k}, \\
\pi j_2 &= \omega_{12} w_1 + \omega_{22} w_2 + \ldots + \omega_{n-k,2} w_{n-k} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pi j_{n-k} &= \omega_{1,n-k} w_1 + \omega_{2,n-k} w_2 + \ldots + \omega_{n-k,n-k} w_{n-k}.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\omega_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial c_\mu} \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} d x_\lambda \sqrt{\psi_\lambda(x_\lambda)} \qquad \begin{matrix} \lambda = 1, 2 \ldots n-k. \\ \mu = 1, 2 \ldots n-k. \end{matrix}$$

Da sich aber die zu den Parametern γ_λ bzw. w_λ kanonisch zugehörigen Parameter c_λ bezw. α_λ bei einer linearen Substitution kontragredient transformieren, so bestehen zwischen den α_λ und den c_λ die Beziehungen:

$$(9a) \quad \pi \alpha_\lambda = \omega_{\lambda 1} c_1 + \omega_{\lambda 2} c_2 + \ldots + \omega_{\lambda, n-k} c_{n-k} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n-k.$$

1) Habilitationsschrift 1891. Math. Ann. 54.

2) S. z. B. Charlier, Mechanik des Himmels 1. S. 104.

Dazu fügen wir die k Gleichungen

$$\alpha_{n-k+1} = c_{n-k+1}, \ldots \alpha_n = c_n. \tag{9b}$$

Damit ist der Übergang von den c_λ zu den a_λ bewerkstelligt, und zwar sind die oben eingeführten Koeffizienten $m_{\lambda\mu}$:

$$m_{\lambda\mu} = \frac{1}{\pi}\omega_{\lambda\mu}, \quad \text{wenn} \quad \begin{matrix}\lambda = 1,2 \ldots n-k \\ \mu = 1,2 \ldots n-k\end{matrix}$$

und

$$m_{\lambda\mu} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \neq \mu, \\ 1 \text{ für } \lambda = \mu, \end{cases} \quad \text{wenn} \quad \begin{matrix}\lambda = n-k+1 \ldots n, \\ \mu = n-k+1 \ldots n.\end{matrix}$$

Macht man andererseits die bekannte Substitution

$$x_\lambda = \frac{b_\lambda + a_\lambda}{2} - \frac{b_\lambda - a_\lambda}{2}\cos\eta_\lambda,$$

so wird $S_\lambda'(x_\lambda)$ das Integral einer *geraden* periodischen Funktion der Periode 2π, welche sich in eine Fouriersche cos-Reihe entwickeln läßt:

$$S_\lambda'(x_\lambda) = \int d\eta_\lambda (a_{\lambda 0} + a_{\lambda 1}\cos\eta_\lambda + a_{\lambda 2}\cos 2\eta_\lambda + \ldots).$$

Daher wird

$$\int_{b_\lambda}^{a_\lambda} dx_\lambda \sqrt{\psi_\lambda(x_\lambda)} = \pi a_{\lambda 0} \qquad \lambda = 1,2 \ldots n-k$$

Es ist aber

$$\omega_{\lambda\mu} = \pi\frac{\partial a_{\lambda 0}}{\partial c_\mu} = \pi\sum_{\nu=1}^{n-k}\frac{\partial a_{\lambda 0}}{\partial \alpha_\nu}\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial c_\mu}$$

und nach den Gleichungen (9a)

$$\frac{\partial \alpha_\nu}{\partial c_\mu} = \frac{1}{\pi}\omega_{\nu\mu}.$$

Folglich

$$\omega_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{n-k}\frac{\partial a_{\lambda 0}}{\partial \alpha_\nu}\omega_{\nu\mu}$$

und da die Determinante aus den $\omega_{\lambda\mu}$ nicht verschwindet, folgt

$$\frac{\partial a_{\lambda_0}}{\partial \alpha_\nu} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \neq \nu & \lambda = 1, 2 \ldots n-k, \\ 1 \text{ für } \lambda = \nu & \nu = 1, 2 \ldots n-k, \end{cases}$$

also

$$\alpha_\lambda = a_{\lambda_0} \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n-k.$$

Dies entspricht der Schwarzschildschen Regel, und man sieht, daß diese stets anwendbar ist: Immer läßt sich S_λ' in der Form darstellen

$$S_\lambda'(x_\lambda) = a_{\lambda_0}\eta_\lambda + \text{period. Funkt. von } \eta_\lambda \quad (\text{Periode } 2\pi)$$

und der Koeffizient des linearen Gliedes a_{λ_0} ist das gesuchte α_λ. Die Lösungen der kanonischen Gleichungen, ausgedrückt durch die neuen Konstanten, lauten

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\lambda} = w_\lambda, \quad w_\lambda = \frac{\partial H}{\partial \alpha_\lambda} t + \beta_\lambda = \frac{\partial c_1}{\partial \alpha_\lambda} t + \beta_\lambda \qquad \lambda = 1, 2 \ldots n \quad (\text{die } \beta_\lambda \text{ Konstante}).$$

Durch die alten Konstanten ausgedrückt aber haben sie gelautet

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = t + j_1, \quad \frac{\partial S}{\partial c_2} = j_2 \cdots \quad \frac{\partial S}{\partial c_n} = j_n.$$

Da nun diese Form der Lösung in die erstere übergehen muß, wenn man für die c_λ die α_λ einführt, so folgt bei Berücksichtigung von (9 b)

$$w_{n-k+1} = j_{n-k+1}, \quad w_{n-k+2} = j_{n-k+2} \cdots w_n = j_n;$$

d. h.

$$\beta_{n-k+1} = j_{n-k+1}, \cdots \beta_n = j_n$$

und

$$\frac{\partial c_1}{\partial \alpha_{n-k+1}} = \frac{\partial c_1}{\partial \alpha_{n-k+2}} = \cdots = \frac{\partial c_1}{\partial \alpha_n} = 0.$$

Es fehlen also k Parameter α_λ im Energieausdruck H nach der Transformation auf die α_λ, w_λ, woraus hervorgeht, daß *jede zyklische Koordinate eine Schwarzschildsche „mittlere Bewegung" verschwinden läßt (Entartung).*

Die Transformationen (2) lassen eine fundamentale Maßeigenschaft des Phasenraumes, nämlich das Volumen, invariant. In dieser Tatsache steckt offenbar eine ganz wesentliche Qualität des Phasenraumes; ähnlich wie die Tatsache, daß die Transformationsgruppe der Drehungen die Distanz im gewöhnlichen Raume ungeändert lassen, eine fundamentale Eigenschaft des

gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes ausdrückt. Nun haben aber die Transformationsgleichungen (2) einen besonderen Typus. Sie stellen nämlich n Beziehungen für die n Koordinatenebenen $x_i - y_i$ dar, indem sie immer ein x_i mit dem zugehörigen y_i verknüpfen. Dies wird noch deutlicher, wenn man ihnen die Form gibt:

$$y_1 dx_1 + y_2 dx_2 + \ldots + u_1 dv_1 + u_2 dv_2 + \ldots = dS.$$

Es liegt also die Vermutung nahe, daß die Planck-Sommerfeldsche Erweiterung des Quantenansatzes auf n Freiheitsgrade in dieser Form der Gleichungen (2) ihre Begründung haben könnte.

Brünn, am 15. Juli 1919.

(Eingegangen 28. Juli 1919.)

2. *Luftelektrisches Potentialgefälle und Gewittervorhersage;*
von Alfred Hölzel.

(Leipziger Dissertation.)

Inhaltsübersicht: Einleitung. — I. Das Instrumentarium. — II. Der normale Verlauf des Potentialgefälles. — Der jährliche Gang — Der tägliche Gang. — III. Störungen im Verlauf des Potentialgefälles. — Bewölkung. — Regen. — Gewitter.

Einleitung.

Geschichtlich betrachtet ist das Gewitter der Ausgangspunkt der luftelektrischen Forschung. Der elektrische Zustand der Atmosphäre zeigte sich naturgemäß zuerst in seinen extremen Wirkungen. J. H. Winkler in Leipzig (1746) erklärte als erster den Blitz als gewaltigen elektrischen Funken. Den experimentellen Nachweis dafür brachte nach einer von Franklin vorgeschlagenen Methode Dalibard in Paris im Jahre 1752.[1]) Wenn sich auch sehr bald die Forschung hauptsächlich dem normalen elektrischen Zustande der Atmosphäre zuwandte — bereits Le Monnier (1752) erkannte, daß die Luft immer elektrisch ist — und auch heute die Erklärung dieses normalen Zustandes und die Untersuchung seiner Abhängigkeiten von den übrigen meteorologischen Elementen das Hauptgebiet der Luftelektrizität darstellt, so kann doch wohl die Gewitterforschung als ihre eigentlich praktische, auch weitere Kreise interessierende Seite angesehen werden. Die Entwicklung der Luftschiffahrt insbesondere ließ, entsprechend der allgemeinen Prognose (Luftfahrerwarnungsdienst), eine spezielle Gewitterprognose wünschenswert erscheinen. Deshalb war eine Untersuchung über die Frage, ob eine solche auf Grund der Beobachtung des atmosphärischen Potentialgefälles möglich ist, von Interesse. Beobachtungen über Gewitter sind an allen Stationen angestellt worden, wo dauernde Beobachtungen des atmosphärischen Potentialgefälles statt-

1) Vgl. Hann, Lehrbuch der Meteorologie. 3. Aufl. S. 650.

gefunden haben. So gibt z. B. Zölss in Kremsmünster[1]) an, daß das Herannahen eines Gewitters durch einen Anstieg im Verlaufe des normalen luftelektrischen Potentialgefälles gekennzeichnet ist, der in der Regel schon $^1/_2$ Stunde vor Ausbruch des Gewitters beginnt. — Wichtig sind vor allem auch die Untersuchungen von Kähler in Potsdam[2]), die sehr verschiedene Zeiten für die Vorherbemerkbarkeit ergeben haben. Die Zeiten schwanken für Nahegewitter zwischen 5 Minuten und mehr als einer Stunde vor Regenbeginn. Einen Beitrag zur weiteren Klärung dieser Frage zu liefern, war der Zweck der vorliegenden Arbeit. Leider mußte sie mit Kriegsbeginn abgebrochen werden, und es hat deshalb nicht so viel Material beschafft werden können, als zu einer erschöpfenden Behandlung notwendig gewesen wäre. Wenn demnach auch die Ergebnisse natürlich ein abschließendes Urteil nicht ermöglichen, erscheint doch wohl ihre Bearbeitung im Hinblick auf das genannte praktische Problem nicht ohne Wert.

Im Zusammenhang mit dem bezeichneten Zwecke wurde natürlich auch dem normalen Verlauf des Potentialgefälles die entsprechende Aufmerksamkeit geschenkt. Die dabei erhaltenen Resultate sind als die normalen Verhältnisse in der folgenden Besprechung vorangestellt worden. Zuvor soll ferner erst noch kurz auf die verwendeten Apparate eingegangen werden.

I. Das Instrumentarium.

Zur Messung der Potentialdifferenz einer bestimmten Stelle der Luft gegen Erde ist nötig ein Kollektor, d. i. ein Leiter, der auf das betreffende Potential geladen wird, und ein Elektrometer, um dieses Potential zu messen. Da nur Dauerbeobachtungen Aufschluß über den Verlauf des Potentialgefälles geben können, wurden die Beobachtungen mit einem von Benndorf[3]) konstruierten, mechanisch registrierenden Quadrantelektrometer vorgenommen, dessen Wirkungsweise folgende ist:

Zwischen den vom Gehäuse isolierten vier Quadrantenpaaren bewegt sich, bifilar aufgehängt und von ihrer Aufhängung isoliert, die lemniskatenförmige „Nadel". Oberhalb der Quadranten spielt ein von ihr isolierter, im übrigen aber

1) Wiener Ber. 112. S. 1449. 1903.
2) Met. Zeitschr. 25. S. 293. 1908.
3) Wiener Ber. 111. S. 487. 1902.

fest mit ihr verbundener Zeiger über einem Papierstreifen, der durch ein Uhrwerk bewegt wird. Dieses Uhrwerk schließt zugleich zu jeder vollen Minute den Stromkreis eines Elektromagneten, dessen Anker vermittelst eines Bügels den Zeiger auf den Papierstreifen drückt. Mit Hilfe eines zwischen Zeiger und Papierstreifen liegenden Stückes Blaupapier wird die Lage des Zeigers über dem Streifen durch einen Punkt fixiert. Unterhalb der Nadel ist, leitend mit ihr verbunden, ein Stück Platinblech angebracht, das in ein Gefäß mit konzentrierter Schwefelsäure taucht. In diese taucht auch die Zuleitungsklemme für die Nadel. Die Quadrantenpaare sind kreuzweis miteinander verbunden und liegen an den beiden Polen einer Akkumulatorenbatterie von 100 Volt Spannung, deren Mitte zur Erde abgeleitet ist. Das zu messende Potential wird an die Nadel angelegt (Nadelschaltung). Bei dieser Schaltung ist nach Benndorf der Ausschlag der Nadel dem angelegten Potential proportional. — Durch Veränderung des Abstands der Fadenenden der bifilaren Aufhängung läßt sich die Empfindlichkeit des Instruments variieren. Sie wurde so eingerichtet, daß beim Anlegen bekannter Spannungen 10 Volt = 1 mm Ausschlag ergeben. Damit besaß das Elektrometer einen Meßbereich bis $\pm$ 500 Volt, der im Sommer für normale Verhältnisse genügte. Da die Beobachtungen im Winterhalbjahr begonnen wurden, zeigte sich sehr bald, daß dieser Meßbereich oft längere Zeit überschritten wurde. Deshalb wurde eine automatisch wirkende Vorrichtung zur Erweiterung des Meßbereichs eingebaut, ähnlich derjenigen, die Sprung[1]) in Potsdam verwendet hat. Wenn statt der ganzen Hilfsbatterie von 100 Volt nur noch ein Teil (etwa $^1/_5$) an den Quadranten liegt, so wird die Empfindlichkeit des Elektrometers entsprechend herabgesetzt und dadurch der Meßbereich erhöht. Diese Umschaltung bewirkt der Zeiger der Nadel selbsttätig, sobald er die Grenze des Meßbereichs erreicht hat. Er schließt, da er durch die Aufhängung leitend mit dem Gehäuse verbunden ist, durch Berühren eines isolierten Metallstifts den Strom für einen Elektromagneten, dessen Anker einen Quecksilberumschalter umlegt. Die nachstehende Skizze (Fig. 1) zeigt das Schaltungsschema für den Umschalter.

1) Physik. Zeitschr. 5. S. 326. 1904.

In der Folge zeigte es sich aber, daß auch dieser höhere Meßbereich (bis etwa 2500 Volt) öfter überschritten wurde. Es wäre nun die Möglichkeit vorhanden gewesen, durch weitere Herabsetzung der an den Quadranten liegenden Hilfsspannung den zweiten Meßbereich noch mehr zu erhöhen. Dies erschien aber deshalb als unpraktisch, weil, sobald das Feld wieder normale Werte annimmt, der Ausschlag der Nadel zu gering wird, und da ein Überschreiten des unteren Meßbereichs relativ oft eintrat, erhebliche Teile der Registrierkurven unbrauchbar geworden wären. Als Ausnahmefall aber konnte das mit in Kauf genommen werden, da der Apparat nie längere Zeit sich selbst überlassen blieb. So lag es nahe, noch einen dritten Meßbereich zu schaffen, den die Nadel auch wieder automatisch einschaltete, jedoch erst dann, wenn der zweite Meß-

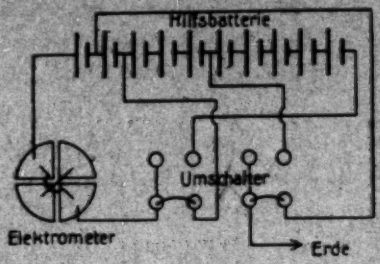


Fig. 1.

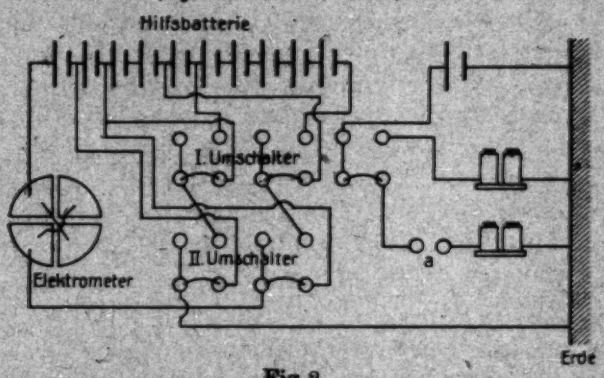


Fig. 2.

bereich überschritten war. Dazu war notwendig, daß dieselben Kontaktstifte während des zweiten Meßbereichs dem Stromkreise für den Magneten eines zweiten Umschalters angehörten, und daß dieser Stromkreis sich automatisch beim Umlegen des ersten Umschalters herstellte. Durch Kombination zweier Quecksilberumschalter war dies leicht zu erreichen, wie aus Fig. 2 ersichtlich ist. — Die Schwierigkeit lag aber darin, daß der die Umschalter in Tätigkeit setzende Zeiger nach Umlegung des ersten Schalters infolge einer gewissen Träg-

heit sich nicht rasch genug von dem Kontaktstift ablöste und in den meisten Fällen auch sofort den anderen Schalter mit umlegte. Diese Schwierigkeit wurde dadurch behoben, daß der Stromkreis für den zweiten Elektromagneten, der durch Umlegen des ersten Schalters hergestellt wird, noch einige Augenblicke offen gehalten wurde, bis der Zeiger der Nadel zurückging. Zu dem Zwecke erhielt der Stromkreis eine aus zwei Quecksilbernäpfchen bestehende Unterbrechungsstelle *a*, in welche sich nach dem Umlegen des ersten Schalters langsam ein Metallbügel hineinsenkt. In Fig. 3 ist *b* der Bügel im Profil bzw. sein einer Haken. Er hängt an einem Faden, der über die Führungsrolle *c* läuft und auf der Rolle *r* aufgewickelt ist. Diese ist bei der Normalstellung des ersten Umschalters (*u*) durch einen von diesem ausgehenden Haken am Abrollen verhindert. Beim Umfallen des Schalters gibt der Haken die Rolle frei, der Bügel rollt durch sein Gewicht den Faden ab und senkt sich in die Quecksilbernäpfchen *a*. Durch Veränderung des Bügelgewichts, der Höhe der Rolle *c* oder der Reibung der Rolle *r* kann man es erreichen, daß die notwendige Anzahl Sekunden vergeht, ehe der Stromkreis zur Betätigung des zweiten Umschalters fertig ist. — Die mit ziemlich primitiven Mitteln hergestellte Vorrichtung bewährte sich ganz gut.

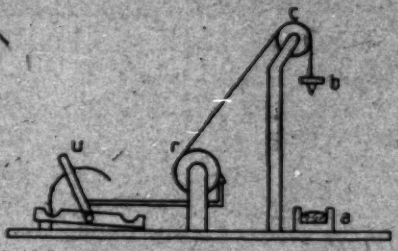


Fig. 3.

Beim zweiten Meßbereich lagen noch $\pm$ 10 Volt an den Quadranten, die Eichung ergab 1 mm Ausschlag = 50 Volt. Beim dritten Meßbereich lagen nur $\pm$ 4 Volt Hilfsspannung an den Quadranten, hierfür ergab die Eichung 1 mm Ausschlag = 120 Volt. Die Meßbereiche gingen somit bis etwa 2500 bzw. 6500 Volt.

Die von Sprung[1]) mitgeteilte Unvollkommenheit des Instruments, daß die Nadel bei stärkeren Spannungen von einem der Quadrantenbogen angezogen wird, wurde nicht

1) Met. Zeitschr. 21. S. 306. 1904.

bemerkt, vermutlich, weil das Instrument aus jenem Grunde bereits abgeändert ist, denn die Distanz der Quadranten eines Paares beträgt 2 cm, nicht mehr, wie früher angegeben wurde, 1 cm.

Als Kollektor wurde ein Wasserkollektor verwendet. — Am Ende einer an einem isoliert aufgestellten Metallgefäß angebrachten ca. $1^1/_2$ m langen Röhre befindet sich eine feine Düse, aus der dauernd Wasser fließt, wodurch das vom atmosphärischen Felde influenzierte System auf das in der Nähe der Ausflußstelle herrschende Potential der Luft geladen wird. Damit das Wasser immer unter gleichem Druck ausfließt, ist auf das isolierte Gefäß eine Mariottesche Flasche aufgesetzt. Das Gefäß selbst stand auf gerieften Hartgummisäulen, die zum Schutz gegen Staub und Feuchtigkeit mit je einem Metallmantel umgeben waren, der außerdem noch Gefäße zur Aufnahme von Trockenmitteln enthielt. Das Ganze stand auf einem verschiebbaren Schlitten, ähnlich einer von Sprung[1]) beschriebenen Einrichtung, so daß die Ausflußstelle nach Bedarf näher an die Mauer herangezogen werden konnte. Alle vom Elektrometer aufgezeichneten Werte wurden mittels empirisch gefundener Faktoren auf die am weitesten von der Mauer ab liegende Stellung der Kollektordüse reduziert. Diese Normalstellung befand sich ca. 84 cm von der Mauer entfernt und etwa 8 m über den Bäumen. (Aufgestellt war der Apparat im siebenten Turmgeschoß des Instituts, etwa 25 m über dem Boden.) — Während der Wintermonate wurde die Stellung im Abstande von 50 cm von der Mauer dauernd benutzt, um ein zu häufiges Umstellen des Elektrometers auf den höheren Meßbereich zu vermeiden. Außerdem wurde bei Kälte eine Mischung von Spiritus und Wasser verwendet, um das Einfrieren des Kollektors zu verhüten.

Für die äußerste Stellung des Kollektors wurden Reduktionsmessungen auf die Ebene ausgeführt, weil infolge des Zusammendrängens der Niveauflächen über dem Gebäude die erhaltenen Registrierwerte nur relative Bedeutung haben. Diese Reduktionsmessungen wurden auf dem freien Gelände zwischen dem damaligen Ausstellungsplatze und dem Bayrischen Bahnhofe vorgenommen, in einer Entfernung von etwa 500 m

1) Physik. Zeitschr. 5. S. 328. 1904.

vom Institut. Verwendet wurde bei diesen Messungen ein Wulfsches Zweifadenelektrometer[1]) und zwei Flammenkollektoren. Diese bestehen in der Hauptsache aus einer Wachskerze, die gegen Wind durch einen Glaszylinder geschützt und von einem Metalldrahtnetz umgeben ist, welches den Leiter bildet, der durch Wegschaffen der entgegengesetzten Influenzelektrizität mittels der von der Flamme erzeugten Ionen auf das Potential des betreffenden Punktes der Atmosphäre geladen wird. Die genaue Bestimmung dieses Punktes, des sogenannten Referenzpunktes, stößt auf Schwierigkeiten. Deshalb wurden zwei gleiche Kollektoren verwendet, die, auf Ebonitstäben stehend, einen Vertikalabstand von 1 m hatten, und von denen einer mit den Fäden, der andere mit dem Gehäuse des isoliert aufgestellten Elektrometers verwunden war. Nach einer Berechnung von Benndorf[2]) beeinflußt eine aufrechtstehende Person die Angaben des Kollektors in einer Entfernung von 2 m um 14%, in 4 m noch um 3%. Das Elektrometer wurde deshalb in einer Entfernung von 7,5 bis 8 m von den Kollektoren aufgestellt.

Die Schwierigkeit dieser Reduktionsmessungen wie überhaupt der ganzen Potentialgefällmessung lag vor allem in der fast beständigen Unreinheit der Luft. Die Nähe des Bayrischen Bahnhofes, dessen Heizhäuser manchmal den größten Teil des Tages über die Luft mit Rauch erfüllten, brachte es mit sich, daß sehr oft Beobachtungsreihen als unbrauchbar ausgeschieden werden mußten. Da ferner die Fortsetzung der Reduktionsmessungen durch den Krieg abgebrochen wurde, sind für die Berechnung des Reduktionsfaktors nur die Beobachtungen dreier Tage übrig geblieben, aus denen wenigstens ein Näherungswert für den Reduktionsfaktor berechnet werden konnte.

Die Beobachtungen wurden in der Weise vorgenommen, daß vorher die Taschenuhr mit der Uhr des Registrierapparats in Übereinstimmung gebracht wurde, so daß die Ablesungen, die im Freien zu jeder vollen Minute gemacht wurden, mit den gleichzeitigen Registrierwerten verglichen werden konnten. Von beiden Wertereihen wurden immer je 5 zu einem Mittel

1) Physik. Zeitschr. 8. S. 527. 1907.
2) Wiener Ber. 115. S. 446. 1906.

vereinigt. Das Verhältnis entsprechender Mittel ergab einen Wert für den Reduktionsfaktor. Diese Werte schwanken auch an den günstigsten Tagen noch recht stark, wie die folgende Tabelle zeigt.

Datum	Mittel aus je 5 Beobachtungen in der Ebene	am Reg.-App.	Reduktionsfaktor
28. 8. 13.	251 V/m	412	0,610
	239 „	357	0,670
	212 „	326	0,651
	234 „	310	0,755
	237 „	306	0,774
	225 „	326	0,690
	221 „	306	0,723
	220 „	300	0,734
	203 „	289	0,703
	194 „	294	0,661
	168 „	290	0,580
	156 „	269	0,580
	183 „	242	0,756
	194 „	229	0,848
		Mittel:	0,695

Die Mittel aller drei Tage weichen relativ wenig voneinander ab, wie man aus der folgenden Tabelle sieht:

Datum	22. 5. 13	28. 8. 13	29. 8. 13	Gesamtmittel
Mittelwert	0,667	0,696	0,686	0,683

Demgemäß wurde zur näherungsweisen Reduktion der Registrierwerte auf die Ebene der Faktor 0,68 verwendet.

II. Normaler Verlauf des Potentialgefälles.

Die Bearbeitung der Registrierwerte wurde in der Weise vorgenommen, daß zur Bestimmung des täglichen und jährlichen Verlaufs des Potentialgefälles von jedem Monat die Schönwettertage Verwendung fanden, wobei nach Möglichkeit Tage mit Stratus- oder Stratokumulusbewölkung ausgeschlossen wurden, weil diese Wolkenformen das Gefälle beeinflussen. Dabei war unvermeidlich, daß für manche

Monate nur eine geringe Anzahl von Tagen verwendbar waren. Bei den Wintermonaten war es zum Teil unmöglich, auch nur einige ganze Schönwettertage zusammenzustellen, und es mußten in solchen Fällen alle niederschlagsfreien Tage des Monats verwendet werden. — Im einzelnen wurde so verfahren, daß immer sämtliche 60 Registrierwerte einer Stunde zu einem Mittelwert vereinigt wurden, und zwar wurde mit dem Polarplanimeter die Fläche zwischen dem stündlichen Registrierkurvenstück und der Nullinie bestimmt, woraus sich durch Division mit dem Abstand zweier aufeinanderfolgender Stundenmarken (der Papierstreifen wurde durch das Uhrwerk pro Stunde um 4,15 cm vorwärts bewegt und mittels elektrischen Kontaktes zu jeder vollen Stunde mit einer Marke versehen) der mittlere Ausschlag des Zeigers für die betreffende Stunde berechnete. Je nach dem eingeschalteten Meßbereiche und der für diesen geltenden Eichung kommt diesem Ausschlag eine bestimmte Potentialdifferenz zu.

Jährlicher Gang des Potentialgefälles. Zur Bestimmung des jährlichen Verlaufs des Potentialgefälles wurden die Stundenmittel eines Tages zu einem Tagesmittel vereinigt und die Mittel der verschiedenen Normaltage zu einem Monatsmittel. Der jährliche Gang des Potentialgefälles stellte sich dann dar als Gang der Mittelwerte der einzelnen Monate. — Die folgende Tabelle enthält die Monatsmittel des Jahres 1913 und des infolge des Krieges unvollständig gebliebenen Jahres 1914 in Volt pro Meter.

Jahr	Monat	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1913	Anzahl der verwendet. Tage	6	11	6	8	4	4	4	7	5	4	4	5
	Monatsmittel Volt/m	356	320	272	122	121	104	167	156	173	195	252	281
1914	Anzahl der verwendet. Tage	9	10	7	8	6	6	7	—	—	—	—	—
	Monatsmittel Volt/m	477	474	224	185	120	125	122	—	—	—	—	—

Graphisch stellt sich der jährliche Gang durch folgende Kurven dar:

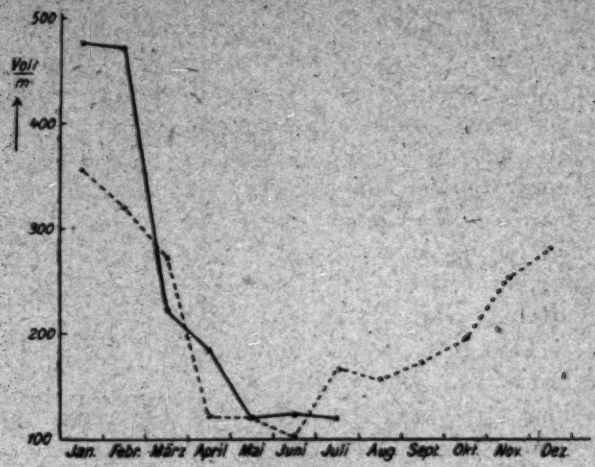


Fig. 4.

Beide Kurven zeigen übereinstimmend ein Maximum im Januar mit steilem Abfall nach dem flachen Sommerminimum,

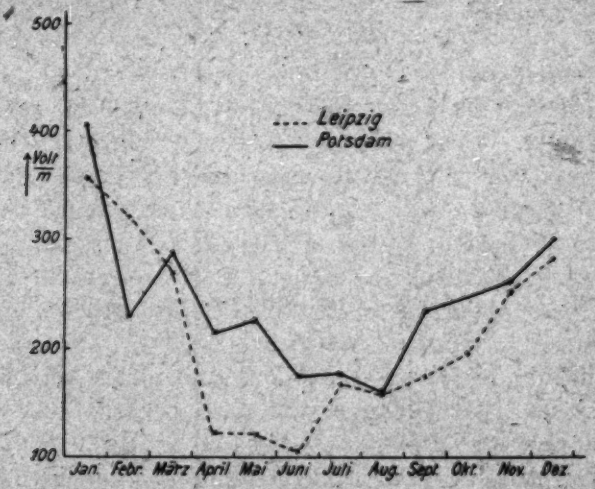


Fig. 5.

das 1913 auf den Juni fällt, 1914 auf Mai zu fallen scheint. Der Anstieg während der Herbstmonate erfolgt allmählicher als der Abfall von dem Wintermaximum. Die höheren Mittel-

werte der Monate Januar und Februar im Jahre 1914 dürften ihre Ursache darin haben, daß sie aus lauter Schönwettertagen gebildet worden sind, an denen diese Monate verhältnismäßig reich waren, während die entsprechenden Werte des Jahres 1913 aus allen niederschlagsfreien Tagen gebildet werden mußten, weshalb sie — wahrscheinlich infolge des Einflusses der Bewölkung — geringer ausfielen.

Im Mittel betrug im Jahre 1913 das Potentialgefälle in den Monaten Dezember, Januar, Februar 319 Volt/m, in den Monaten Juni, Juli, August 142 Volt/m. Im Winter war also das Gefälle mehr als doppelt so hoch als im Sommer. Im ganzen ergab sich für das Jahr 1913 ein Jahresmittelwert von 210 Volt/m. Die maximalen Abweichungen vom Mittel betrugen $+146$ bzw. -106 Volt/m, das entspricht einer Jahresamplitude von 252 Volt/m.

Zieht man zum Vergleich die von Lüdeling[1]) veröffentlichten Potsdamer Beobachtungen vom Jahre 1904 heran, so findet sich dort ein Jahresmittel von 242 Volt/m und eine Jahresamplitude von 248 Volt/m. — In der voranstehenden Figur ist die Kurve des jährlichen Ganges des Potentialgefälles in Potsdam neben die 1913 hier ermittelte Jahreskurve gezeichnet.

Täglicher Gang des Potentialgefälles. Der tägliche Verlauf des Potentialgefälles wurde aus den Stundenmitteln gewonnen und für jeden Monat gesondert bestimmt. Es ergeben sich die in den auf S. 532 u. 533 stehenden Tabellen zusammengestellten Werte in Volt/m. — Zur besseren Übersicht sind die Werte für jeden Monat als Kurve aufgetragen und die Kurven eines Jahres zum Vergleich zusammengestellt (vgl. S. 534). Aus ihnen erkennt man, daß der tägliche Gang des Potentialgefälles während des ganzen Jahres durch eine doppelte Welle dargestellt ist. Alle Monate weisen übereinstimmend das auch an allen anderen Stationen beobachtete Morgenminimum auf, welches sich das ganze Jahr über zwischen $3^h\,a$ und $5^h\,a$ hält. Das Hauptmaximum liegt in den Vormittagsstunden, und zwar tritt es in den Wintermonaten erst gegen Mittag, mit zunehmender Tageslänge dagegen zeitiger ein. Am zeitigsten erscheint es in der Zusammenstellung

1) Met. Zeitschr. 23. S. 114. 1906.

Jahr	Stde.	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	De
1913	I.	289	279	264	101	74	96	193	137	134	161	157	18
	II.	266	222	259	103	74	97	148	127	135	161	139	22
	III.	257	212	206	91	75	69	126	136	148	180	140	21
	IV.	225	226	199	88	79	81	115	134	122	158	166	19
	V.	255	232	146	89	89	89	137	132	120	146	154	17
	VI.	244	239	197	103	105	99	156	150	145	171	206	18
	VII.	267	264	265	133	127	139	168	173	199	191	229	23
	VIII.	324	271	293	175	145	148	216	213	225	213	295	30
	IX.	402	363	311	178	172	150	252	205	227	244	290	33
	X.	470	360	355	182	168	139	238	196	211	232	305	33
	XI.	426	399	395	146	140	136	208	187	212	253	343	34
	Mittag	356	407	318	118	129	102	194	173	185	248	284	33
	I.	349	385	290	120	123	99	174	161	161	237	230	33
	II.	351	368	292	126	116	101	144	142	149	214	224	30
	III.	379	342	305	135	114	97	143	138	144	214	233	32
	IV.	385	349	274	122	120	100	127	121	148	209	254	33
	V.	386	334	220	109	119	84	134	124	158	175	301	34
	VI.	420	352	237	97	120	84	148	142	174	165	307	37
	VII.	470	357	244	98	141	78	142	134	199	177	315	34
	VIII.	474	373	283	124	143	82	158	133	215	189	287	31
	IX.	465	356	324	137	132	105	175	170	195	196	333	23
	X.	439	361	296	127	132	106	182	178	192	211	272	26
	XI.	391	341	281	115	133	112	173	168	183	190	289	21
	Mitter-nacht	328	294	279	106	126	103	165	165	163	157	296	19

von 1913 im August, am spätesten in den Monaten Januar und Februar. Das flachere Nachmittagsminimum, ebenso das in der Regel kleinere Abendmaximum zeigen eine geringere Regelmäßigkeit in ihrem Auftreten, was wahrscheinlich seine Ursache hat in der hier in den Nachmittags- und Abendstunden gewöhnlich sehr viel stärkeren Trübung der Atmosphäre durch Rauch und Dunst. Es scheint aber trotzdem so, als ob das Maximum mit zunehmender Tageslänge später eintritt. Die Beobachtungen an anderen Stationen haben in der Hauptsache ähnliche Verhältnisse ergeben. Die Registrierungen in Potsdam[1]) ergaben eine doppelte Periode in den Sommermonaten und eine einfache während der Wintermonate. Die Münchener Beobachtungen[2]) ergaben durchgängig eine doppelte Welle, ebenso die sich über 9 Jahre erstreckenden Registrierungen

1) Lüdeling, a. a. O.
2) Lutz, Münchener Ber. S. 305. 1911.

Täglicher Gang des Potentialgefälles in den einzelnen Monaten des Jahres 1914.

Jahr	Stunde	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli
1914	I.	405	401	187	162	106	86	123
	II.	388	365	164	139	105	107	110
	III.	373	322	169	124	95	95	103
	IV.	344	308	175	128	104	93	102
	V.	326	287	157	139	107	94	99
	VI.	369	310	186	151	123	116	109
	VII.	366	340	212	179	139	139	133
	VIII.	443	431	266	204	127	171	165
	IX.	510	465	283	214	141	176	175
	X.	553	518	277	237	175	187	166
	XI.	559	537	271	283	152	158	154
	Mittag	513	577	263	211	124	131	143
	I.	447	570	261	230	124	124	139
	II.	582	613	266	221	109	129	119
	III.	555	565	265	215	114	121	120
	IV.	572	535	252	172	124	133	103
	V.	551	507	232	184	115	125	102
	VI.	489	518	205	200	123	121	95
	VII.	449	548	225	173	109	107	83
	VIII.	560	577	207	201	103	105	92
	IX.	585	577	230	198	126	121	122
	X.	510	540	207	180	123	124	131
	XI.	534	517	216	158	112	121	122
	Mitternacht	461	454	185	141	110	122	120

in Kremsmünster.[1]) Blumenschein ist trotzdem der Ansicht, daß der eigentliche Gang des Potentialgefälles eine einfache harmonische Periode besitzt mit einem Maximum zwischen 2^h p. und 3^h p. und einem Minimum gegen 4^h a., und daß das Vormittags- und Abendmaximum nur Störungserscheinungen sind, hervorgerufen durch Kondensationsvorgänge in der Atmosphäre, wofür auch die Verschiebung entsprechend Sonnenauf- und -untergang zu sprechen scheint. Die mehrjährigen Potsdamer Registrierungen[2]) haben dagegen gezeigt, daß das Potentialgefälle in enger Beziehung zu fast allen meteorologischen Elementen steht, die zum Teil so nahe ist, daß die meteorologischen Vorgänge in den unteren Schichten die täglichen Schwankungen des Potentialgefälles hervorrufen

1) Blumenschein, Wiener Ber. 121. S. 37. 1912.

2) Kähler, Veröffentlichungen des preuß. met. Instituts 4. Nr. 1. S. 1—29. 1911.

müssen. Kähler ist deshalb der Ansicht, daß das Potentialgefälle eine recht komplexe Größe ist. Zu diesen Auffassungen Stellung zu nehmen, dürfte erst nach längeren Registrierperioden möglich sein.

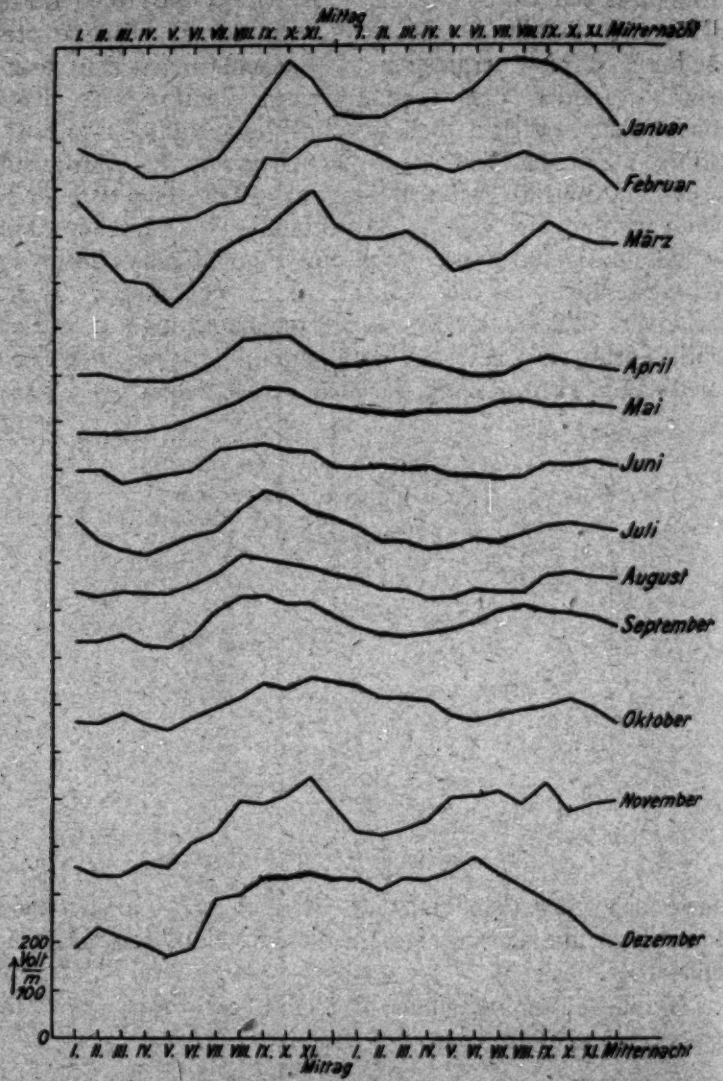


Fig. 6.
Täglicher Gang des atmosphärischen Potentialgefälles für die einzelnen Monate des Jahres 1913.

III. Störungen im normalen Verlauf des Potentialgefälles.

Bewölkung: Daß Wolken das atmosphärische Potentialgefälle unter Umständen stark herabsetzen, hat bereits Exner[1]) einwandfrei beobachtet. Zölss[2]) fand, daß vor allem Stratuswolken das Gefälle beträchtlich vermindern. Ebenso stellte Kähler[3]) durch vergleichende Beobachtungen an benachbarten Stationen den vermindernden Einfluß der Stratuswolken fest, während bei gewöhnlichen Kumuluswolken ein Einfluß nicht mit Sicherheit nachzuweisen, bei Zirren überhaupt kein Einfluß festzustellen war. Auf Grund dieser Tatsachen würden hier bei der Bestimmung des täglichen Ganges des Potentialgefälles die Tage mit Kumulusbewölkung noch mit verwendet, da die Anzahl völlig wolkenloser Tage zu gering war. Wie stark aber die Stratusbedeckung das Potentialgefälle herabsetzt, sei hier noch einmal an dem Beispiel des Monats Juli 1913 gezeigt, für den in der folgenden Figur die

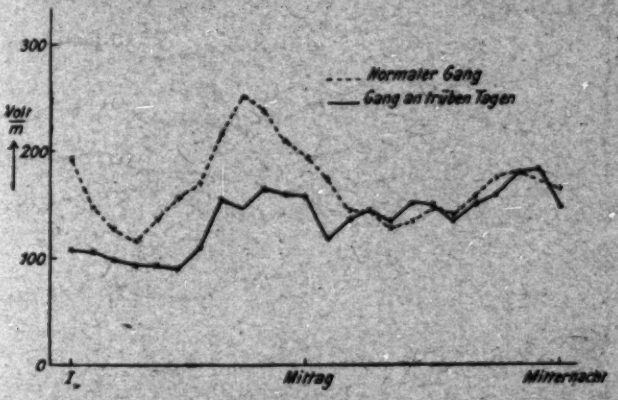


Fig. 7.

Kurve des normalen täglichen Ganges in Vergleich gesetzt ist zu dem aus den trüben (aber niederschlagsfreien) Tagen ermittelten Gang.

Zu den Kurven gehören die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte:

1) Wiener Ber. **93.** S. 263. 1886.
2) Wiener Ber. **112.** S. 1452. 1903.
3) Met. Zeitschr. **26.** S. 10. 1909.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	Mittag
Normaler Gang	193	148	126	115	137	156	168	216	252	238	208	194
Gang an trüben Tagen	107	106	99	93	93	91	110	156	146	165	160	158
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	Mitternacht
Normaler Gang	174	144	143	127	134	148	142	158	175	182	173	165
Gang an trüben Tagen	116	136	145	133	153	150	135	152	161	180	184	146

Die für die trüben Tage geltende Kurve bleibt fast durchgängig unterhalb der Kurve des normalen täglichen Ganges. Nur in den späteren Nachmittags- und in den Abendstunden erreicht sie das Niveau der anderen Kurve. Vermutlich überdeckt in diesen Stunden der Einfluß der abendlichen Rauch- und Staubwirkung die Wirkung der Stratusbewölkung.

Regen. Die neueren Untersuchungen über Niederschlagselektrizität[1]) haben gezeigt, daß die Niederschläge zum größten Teile positiv geladen sind, während das Vorzeichen des Potentialgefälles im allgemeinen dem der Niederschlagsladung entgegengesetzt ist.

In der Zeit vom Juni 1913 bis Juli 1914 wurden hier 165 Regenfälle notiert. Unter diesen waren 82 (50%), bei denen das negative Potentialgefälle überwog und 48 (29%), bei denen negatives und positives Potentialgefälle ungefähr gleichviel vorhanden war. Nur bei 35 Fällen (21%) überwog das positive Zeichen des elektrischen Feldes. (Die Gewitter, bei denen das Vorzeichen des Feldes an sich sehr stark wechselt, wurden außer Betracht gelassen.) Wenn also das Vorzeichen des Potentialgefälles im allgemeinen dem der Regenladung entgegengesetzt ist, lassen diese Zahlen ebenfalls auf ein Überwiegen der positiven Regenladung schließen.

Gewitter. Die stärksten Störungen des atmosphärischen Potentialgefälles treten bei Gewittern auf. Beim Nahen eines

1) Vgl. besonders Simpson, Met. Zeitschr. **33**. S. 127. 1916; Kähler, Met. Zeitschr. **25**. S. 157. 1908.

Gewitters steigt das Potentialgefälle an, und zwar langsamer oder rascher, wahrscheinlich je nach Geschwindigkeit und Stärke des Gewitters. Schließlich nimmt das Gefälle extrem hohe Werte an, und wenn das Gewitter den Beobachtungsort erreicht hat, meist auch schon einige Zeit vorher, beginnt das Gefälle stark zu schwanken und sein Vorzeichen beständig zu wechseln. Da es gewaltige Ladungen sind, die sich während eines Gewitters ausgleichen, so liegt die Vermutung nahe, daß ein solches bereits aus gewisser Entfernung bzw. während seiner Bildung, wenn diese in der Nähe vor sich geht, das atmosphärische Potentialgefälle am Beobachtungsorte beeinflußt. Diesbezügliche Beobachtungen sind auch an fast allen Stationen gemacht worden, worauf schon in der Einleitung hingewiesen worden ist.

Um den Verlauf des Potentialgefälles vor Ausbruch des Gewitters untersuchen zu können, mußte die Ankunft des Gewitters am Beobachtungsorte irgendwie definiert werden. Hierfür konnte nicht in Frage kommen der Zeitpunkt des ersten Donners, weil in der Regel zu dieser Zeit das Gewitter noch weit entfernt ist. Deshalb wurde der Zeitpunkt des Regenbeginns als Ankunftszeit des Gewitters festgesetzt. Ferner wurde der Beginn des Anstiegs des atmosphärischen Potentialgefälles als früheste Wirkung des Gewitters angenommen. Für eine nachträgliche Untersuchung erscheint dies berechtigt, denn man geht wohl in der Annahme nicht fehl, daß die Gewitterwirkungen die der anderen das Gefälle vorübergehend steigernden Faktoren überdecken. — Mit Zugrundelegung dieser Festsetzungen ergab sich für die Nahegewitter der beiden Sommer 1913 und 1914 umstehende Zusammenstellung.

Diese Zusammenstellung zeigt, daß die Zeitdifferenzen zwischen den ersten Einwirkungen des Gewitters auf das atmosphärische Potentialgefälle am Beobachtungsorte und seiner Ankunft ziemlich schwanken. Das Minimum ist 3 Minuten (3. 9. 13), das Maximum fast 2 Stunden (18. 6. 13). Über die Ursache für diese Verschiedenheit läßt sich mit Sicherheit nichts sagen, es ist aber — wie bereits oben erwähnt — wahrscheinlich, daß dabei Stärke und Geschwindigkeit des Gewitters hauptsächlich von Einfluß sind. Z. B. war der 3. 9. 13 ein regnerischer Tag; der Luftdruckverteilung nach befand sich

Datum	Art des Gewitters	Beginn des Potentialanstiegs	Beginn des Regens	Zeitdifferenz	Bemerkungen
1. 5. 13	Leichtes Nahegewitter	4h p.	5h 41 p.	101 Min.	
27. 5. 13	„ „	9h 49 p.	10h p.	11 „	Unruhiger Verlauf des Gefälles bis 9h p, von da ab fast normal bis 9h 49 p.
3. 6. 13	Mittleres „	7h 36 p.	8h 21 p.	45 „	
18. 6. 13	Leichtes „	5h 12 p.	7h 1 p.	109 „	
24. 6. 13	Starkes „	8h 7 p.	9h 4 p.	57 „	
7. 7. 13	Leichtes „	3h 45 p.	4h 28 p.	43 „	Unruhiger Verlauf des Potentialgefälles seit Mittag.
25. 7. 13	Mittleres „	4h 46 p.	5h 22 p.	36 „	Unruhiger Verlauf seit Mittag.
14. 8. 13	„ „	5h 35 p.	6h 15 p.	40 „	
3. 9. 13	Leichtes „	1h 49 p.	1h 52 p.	3 „	Plötzlicher positiver Anstieg des Gefälles.
6. 5. 14	„ „	2h 56 p.	3h 20 p.	24 „	
23. 5. 14	„ „	6h 15 p.	6h 38 p.	23 „	
23. 5. 14	„ „	8h 18 p.	8h 48 p.	30 „	
24. 5. 14	Mittleres „	3h 30 p.	3h 50 p.	20 „	
13. 6. 14	Stärkeres „	12h 38 p.	2h 21 p.	103 „	
22. 6. 14	Mittleres „	2h 30 p.	3h 28 p.	58 „	
24. 6. 14	Leichtes „	5h 15 p.	5h 32 p.	17 „	
14. 7. 14	Stärkeres „	4h 17 p.	5h 24 p.	67 „	

Mitteldeutschland in dem Randgebiet eines östlichen Tiefs. Damit ist die Möglichkeit gegeben, daß es sich um ein rasch ziehendes Wirbelgewitter von geringer Intensität gehandelt hat. — Das Gewitter am 18. 6. 13 war ein ausgesprochenes Wärmegewitter. Der Tag war warm und windstill, die Luftdruckverteilung hatte über Mitteldeutschland ein sogenanntes „Sattelgebiet“ ausgebildet, so daß entweder das Gewitter sich in geringerer Entfernung gebildet haben kann und während seiner Bildung schon das Potentialgefälle am Beobachtungsorte beeinflußt hat, oder als stärkeres Gewitter seinen Einfluß aus größerer Entfernung geltend machte, während es — an Intensität verlierend (es trat hier als Leichtgewitter auf) — näher zog.

Im Mittel ergibt sich aus allen in der Tabelle aufgeführten Gewittern eine Zeitdifferenz von 46 Minuten zwischen dem Beginn des Potentialgefälleanstiegs und dem Eintritt des Regens. Nimmt man eine Durchschnittsgeschwindigkeit des Gewitters

von 30 km/Stde. an[1]), so entspräche die Zeit von 46 Minuten einer durchschnittlichen Entfernung von 23 km, in der ein Gewitter das normale elektrische Feld am Beobachtungsorte zu stören beginnt.

Um eine Abschätzungsmöglichkeit zu gewinnen, inwieweit man diesem Durchschnittswert vertrauen darf, wurden für einen Umkreis von etwa 100 km um Leipzig die Beobachtungen aller derjenigen Orte, die im Sommer 1913 an den in Frage kommenden Tagen Gewitter gemeldet hatten, in eine Karte eingetragen.[2]) Die gemeldeten Richtungen ergaben dabei im großen und ganzen die Richtung des Gewitterzugs (soweit es sich nicht um lokale Bildungen handelte), und die gemeldeten Zeiten boten einen Anhalt für die ungefähre Geschwindigkeit des Gewitters. Aus den so ermittelten Geschwindigkeiten ließen sich die Entfernungen der Gewitter bei Beginn der Störungen in grober Annäherung berechnen. Es ergaben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte.

Datum	Stärke des Gewitters	Zeitdifferenz zwischen dem Beginn des Potentialanstiegs u. dem Regenbeginn	Ungefähre Geschwindigkeit des Gewitters (nach der Karte)	Ungefähre Entfernung des Gewitt. bei Beginn d. Potentialanstiegs
1. 5. 13	Leichtes Nahegewitter	101 Min.	20 km/Stde.	34 km
3. 6. 13	Mittleres „	45 „	25 „	19 „
18. 6. 13	Leichtes „	109 „	27 „	49 „
24. 6. 13	Starkes „	57 „	33 „	31 „
7. 7. 13	Leichtes „	43 „	33 „	24 „
14. 8. 13	Mittleres „	40 „	59 „	39 „
	Mittelwerte:	66 Min.	33 km/Stde.	33 km

Man erhält also eine mittlere Entfernung von 33 km, d. i. ein um etwa 44 % höherer Wert als die erste Abschätzung ergab.

Bei den Nahegewittern handelte es sich lediglich um Frontwirkungen des herannahenden Gewitters. Es ist anzunehmen,

1) Nach Hann, Lehrbuch der Meteorologie, 3. Aufl., S. 672, kommen bei der Fortbewegung von Gewittern alle Geschwindigkeiten vor von fast stationärem Verweilen bis zu 60 km/Stde. und darüber.

2) Die Meldungen waren teils von der Landeswetterwarte Dresden, teils von dem aeronautischen Observatorium Lindenberg zur Verfügung gestellt worden.

daß auch seitliche Wirkungen der Gewitter existieren, wenn sie den Beobachtungsort nicht treffen, sondern als „Ferngewitter" vorüberziehen. In der folgenden Tabelle sind sämtliche Ferngewitter der beiden Sommer zusammengestellt.

Datum	Erster Donner	Beginn des Potentialanstiegs	Beginn des Regens	Zeitdifferenz	Bemerkungen
24. 6. 13	12h 29 p.	12h 19 p.	1h p.	41 Min.	
15. 7. 13	11h 42 a.	11h 42 a.	12h 24 p.	42 „	
26. 7. 13	2h 51 p.	1h 25 p.	kein Regen	—	Max.-Wert des Gef. 600 Volt/m
27. 7. 13	11h 56 a.	12h	kein Regen	—	Nur hohe positive Werte, kein Zeichenwechsel
24. 8. 13	?	9h 26 p.	9h 45 p.	19 Min.	
25. 8. 13	12h 18 p.	12h 9 p.	12h 25 p.	16 „	
25. 8. 13	5h 14 p.	4h 45 p.	4h 45 p.	0 Min.	Max.-W. d. Gef. + 1560 Volt/m
2. 9. 13	5h 14 p.	kein Anstieg	kein Regen	—	„ „ „ + 170 „
13. 6. 14	5h 39 p.	5h 44 p.	6h 20 p. Tr.	36 Min.	„ „ „ − 3800 „
15. 6. 14	2h 18 p.	2h p.	kein Regen	—	„ „ „ − 360 „
15. 6. 14	3h 23 p.	2h 48 p.	kein Regen	—	„ „ „ + 3000 „
16. 6. 14	11h 17 a.	11h 7 a.	kein Regen	—	„ „ „ − 4350 „
4. 7. 14	1h 35 p.	1h p.	1h 23 p.	23 Min.	
15. 7. 14	2h 10 p.	1h 31 p.	kein Regen	—	„ „ „ − 1180 „
22. 7. 14	3h 6 p.	2h 54 p.	kein Regen	—	„ „ „ − 1800 „

Danach läßt sich eine Unterscheidung der Ferngewitter treffen in:

I. solche, deren Regenfront den Beobachtungsort noch trifft (bei denen nur der Teil, in dem die Entladungen stattfinden, in einiger Entfernung vorüberzieht).

II. Solche, die den Beobachtungsort außerhalb ihres Regenbereichs liegen lassen.

Im allgemeinen wird wohl die erste Gruppe die näheren, die zweite die entfernteren Gewitter darstellen, was wohl auch daraus hervorgeht, daß die zweite Gruppe nur schwächere Störungen zeigt. Zwar stört der Regen an sich das Potentialgefälle recht beträchtlich, indessen wird man wohl auch bei den Ferngewittern, bei denen das Einsetzen der Störung erst mit dem Regenbeginn erfolgte, annehmen können, daß eine Übereinanderlagerung der Gewitterstörungen und der Regenstörungen statthat. Außerdem ist unter 7 Ferngewittern, bei denen Regen fiel, nur eines, bei dem der Potentialgefälleanstieg erst mit dem Regen einsetzte. Bei den 6 übrigen ergibt sich eine mittlere

Zeitdifferenz von 30 Minuten zwischen dem Beginn des Potentialgefälleanstiegs und dem des Regens, also ein etwas geringerer Wert, als er sich für die Nahegewitter ergab (46 Minuten). Das eine Gewitter, bei dem die genannte Zeitdifferenz den Wert Null hat, stellt vermutlich einen Übergangsfall dar zu der II. Gruppe, denn es zeigte sich bei ihm dieselbe Erscheinung wie bei dieser, nämlich geringere Störung des normalen elektrischen Feldes. Bei diesen Ferngewittern wechselte das Vorzeichen des Potentialgefälles weniger, die Schwankungen waren langsamer und der dritte Meßbereich wurde nicht mehr überschritten. Die maximalen Werte, die der absolute Betrag des Potentialgefälles bei dieser Gruppe erreichte, bewegen sich zwischen den Grenzen 4400 Volt/m und 360 Volt/m. Letzterer ist eigentlich schon nicht mehr als Störungswert eines Gewitters erkennbar infolge seiner geringen Größe. Bei *einem* Gewitter hatte das Potentialgefälle nur einen Maximalwert von 170 Volt/m, mit anderen Worten, das Potentialgefälle blieb unbeeinflußt, vermutlich, weil das Gewitter seiner Intensität entsprechend eine zu große Entfernung hatte. Beide Faktoren dürften maßgebend sein für die Höhe der erreichten Maximalwerte.

Welche Entfernungen im einzelnen die Ferngewitter hatten, war nicht festzustellen. Nur in zwei Fällen war durch Gewittermeldungen ein gewisser Anhalt gegeben. Am 24. 6. 13 u. 15. 7. 13 hatte Markranstädt (ca. 12 km südwestlich gelegen) zu derselben Zeit Nahegewitter, als hier Ferngewitter im W bzw. SW beobachtet wurden. Die beiden Ferngewitter gehörten der ersten Gruppe an, für welche demnach 12 km Entfernung noch möglich ist. Was die zweite Gruppe anbelangt, so läßt sich nur so viel sagen, daß ihre Entfernungen im allgemeinen 20 km nicht überschreiten werden, welche Entfernung nach Hann[1]) als maximale Hörweite des Donners anzunehmen ist. Unter Umständen werden sogar schon innerhalb dieser Entfernung Gewitter im Verlaufe des Potentialgefälles nicht mehr wahrgenommen, wie man an dem Beispiel des Gewitters am 2. 9. 13 sieht. Über die Entfernung von 20 km hinaus machten sich jedenfalls Gewitter nicht mehr bemerklich, wie aus folgenden Meldungen von Gewittern in der weiteren Umgebung zu ersehen ist, die im Verlaufe des Potentialgefälles unbemerkt geblieben sind.

---

1) Hann, Lehrbuch der Meteorologie, 3. Aufl., S. 659.

Es meldeten:

am 17. 5. 13 Markranstädt	(12 km entfernt)	2^h 45 p.	Ferngew.
am 2. 6. 13 Lausigk	(25 „ „)	7^h p.	Nahegew,
am 3. 6. 13 Colditz	(35 „ „)	6^h p.	„
am 19. 6. 13 Lausigk		12^h 45 p.	„
am 25. 7. 13 Großbothen	(30 „ „)	3^h 40 p.	„

Daß von diesen Gewittern nichts wahrgenommen worden ist, scheint insofern für hiesige Verhältnisse bemerkenswert zu sein, als Zölss in Kremsmünster Gewitter, die in 40—50 km Entfernung vorüberzogen, im Verlaufe des Potentialgefälles wahrgenommen hat.[1])

Im Sommer 1914 wurde der Versuch gemacht, vergleichende Registrierungen an zwei Stationen vorzunehmen, ähnlich wie sie am Potsdamer meteorologischen Institut gemacht worden sind.[2]) Zu dem Zwecke fand auf dem Wasserturm der Heilanstalt Dösen (4250 m südöstlich vom Institut entfernt) ein photographisch registrierendes Zweifadenelektrometer nach Wulf[3]) Aufstellung. Die Versuche stießen längere Zeit hindurch auf Schwierigkeiten, besonders in der Isolation (weil der Apparat immer längere Zeit sich selbst überlassen bleiben mußte) und im Filmtransport des Elektrometers und mußten bei Kriegsbeginn abgebrochen werden. Nur des Interesses halber seien hier die beiden einzigen beobachteten Fälle von Nahegewittern mitgeteilt:

Datum	Richtung, aus der das Gewitter kam	Beginn des Potentialgefälleanstiegs im Institut	in Dösen	Zeitdifferenz
22. 6.	aus SE	2^h 30 p.	2^h 22 p.	8 Min.
14. 7.	aus SW	4^h 17 p.	4^h 15 p.	2 „

Im ersten Fall begann der Anstieg des Potentialgefälles 8 Minuten später im Institut als in Dösen. Das entspräche einer Geschwindigkeit des Gewitters von ca. 32 km/Stde. Im Institut begann der Anstieg des Potentialgefälles 58 Minuten vor Regenbeginn (vgl. die Tabelle auf S. 538). Demnach kamen

1) Zölss, Wiener Ber. 112. S. 1449. 1903.
2) Kähler, Met. Zeitschr. 25. S. 155. 1908.
3) Wulf, Physik. Zeitschr. 8. S. 246. 1907.

die ersten Wirkungen des Gewitters aus einer Entfernung von etwa 31 km, ein Wert, der verhältnismäßig gut mit dem Mittelwert von 33 km (vgl. die Tabelle S. 539) übereinstimmt. — Im zweiten Falle war der fast gleichzeitige Beginn des Potentialgefälleanstiegs zu erwarten, da die Zugrichtung des Gewitters ungefähr senkrecht stand zur Verbindungslinie der Beobachtungspunkte.

Es bleibt nun noch übrig, an der Hand des besprochenen Materials die Frage zu untersuchen, ob eine Gewitterprognose auf der Basis der Potentialgefällemessungen möglich ist. Zu dem Zwecke kann man offenbar nicht mehr den Beginn des Potentialgefälleanstiegs als das erste Gewitteranzeigen betrachten, denn dieser läßt sich wohl hinterher als solches erkennen, vorher aber unterscheidet er sich nicht sogleich von den geringeren Störungen, die den normalen Verlauf des Potentialgefälles ständig begleiten, besonders wenn die Beobachtungsstation am Rande einer Großstadt liegt. Allein die Trübung der Luft durch Rauch und Staub kann das Potentialgefälle stark beeinflussen. Von der Erde aufgewirbelter Staub ist negativ geladen, erniedrigt somit das Gefälle, macht es unter Umständen sogar vorübergehend negativ. Rauch und Dunst sind positiv geladen und bewirken vorübergehende Erhöhung des Potentialgefälles. Wie stark sich dieses mit der Trübung der Luft ändert, geht am besten aus der folgenden von Elster und Geitel angegebenen Zusammenstellung hervor.[1])

Grad der Trübung der Luft	$\frac{\partial V}{\partial n}$
Bis 15 km rein	141 Volt/m
In 15 km trüb	122 „
Gegend in 15 km unsichtbar, bis 2,5 km rein	298 „
Gegend in 2,5 km unsichtbar, bis 0,62 km rein	378 „

Starker Wind wirkt durch Aufwirbelung des Staubes auch auf das Potentialgefälle ein.[2]) Stratusbewölkung kann ebenfalls ziemlich starke Unruhe in seinem Verlaufe verursachen, wie die vergleichenden Beobachtungen Kählers gezeigt haben.[3]) Es dürfte deshalb leicht auf Irrtümer führen, wollte man eine

1) Wiener Ber. **101**. S. 825. 1892.
2) Kähler, Met. Zeitschr. **25**. S. 296. 1908.
3) Kähler, Met. Zeitschr. **26**. S. 10. 1909.

eventuell auch stärkere und stundenlang vorher andauernde Unruhe als Zeichen eines nahenden oder entstehenden Gewitters ansehen. Zwei charakteristische Fälle seien hierfür noch einmal aufgeführt.

Datum	Erster Donner	Beginn des Potentialanstiegs	Beginn des Regens	Zeitdifferenz	Bemerkungen
27. 5. 13	?	9h 49 p.	10h p.	11 Min.	Unruhiger Verlauf des Gefälles seit 5h p.
25. 7. 13	5h p.	4h 46 p.	5h 22 p.	36 „	Unruhiger Verlauf des Gefälles seit 12h mittags

Beide Fälle zeigen lange Zeit vor Ausbruch des Gewitters einen unruhigen Verlauf des Potentialgefälles. Es war aber der 27. 5. 13 ein Tag mit fast ausschließlich Stratusbedeckung, während der 25. 7. 13 in der Hauptsache wolkenlos war bis 5h p. Von da ab wurde Stratus- und Stratokumulusbewölkung notiert; gleichzeitig setzte auch die Unruhe im Potentialgefälle ein.

Da der Beginn des Potentialgefälleanstiegs noch nicht als Anzeichen für ein nahendes oder sich bildendes Gewitter gelten kann, so liegt es nahe, einen Wert des Potentialgefälles festzulegen, der — sobald der absolute Betrag des letzteren ihn überschreitet — das Gewitter sozusagen anmeldet. Dazu müßte man streng genommen die Größe sämtlicher übrigen Störungen (ausgenommen natürlich diejenigen des Regens) genau kennen und berücksichtigen. Um aber einen Überblick über die Zeiten einer möglichen Prognose zu erhalten, genügt es schließlich auch, den Maximalwert, der an den sogenannten Normaltagen erreicht wird, als die erwähnte Größenmarke einzuführen, wobei man davon ausgeht, daß auch diese Normaltage nicht frei von Störungen sind, und der eingeführte Wert nichts anderes ist als der Maximalwert aller Störungen, die die günstigsten Tage der Sommermonate aufweisen. — Dieser Wert ergab sich — beide Sommer zusammengenommen — zu 480 Volt/m. Die auf S. 545 folgende Tabelle zeigt, welche Zeiten sich bei seiner Anwendung ergeben.

Im Mittel erhält man nur eine Prognosenzeit von 28 Minuten. Die einzelnen Zeiten schwanken zwischen Null und $1^1/_2$ Stunden. Von 24 Fällen haben 17 Prognosezeiten, die kleiner sind als

Datum	Art und Stärke des Gewitters	Frühester Zeitpunkt der Prognose	Beginn des Regens	Zeit-Differenz	Erster Donner	Zeit-differenz
1. 5. 13	Leichtes Nahegewitter	5h 14 p.	5h 41 p.	27 Min.	5h 3 p.	−11 Min.
27. 5. 13	„ „	8h 30 p.	10h p.	90 „	?	—
3. 6. 13	Mittleres „	8h 2 p.	8h 21 p.	19 „	?	—
18. 6. 13	Leichtes „	5h 26 p.	7h 1 p.	95 „	6h 33 p.	+67 Min.
24. 6. 13	Ferngewitter	12h 25 p.	1h p.	35 „	12h 29 p.	+ 4 „
24. 6. 13	Starkes Nahegewitter	8h 26 p.	9h 4 p.	38 „	8h 30 p.	+ 4 „
7. 7. 13	Leichtes „	3h 50 p.	4h 28 p.	38 „	4h 8 p.	+18 „
15. 7. 13	Ferngewitter	11h 57 p.	12h 24 p.	27 „	11h 42 a.	−15 „
25. 7. 13	Mittleres Nahegewitter	5h 5 p.	5h 22 p.	17 „	5h p.	− 5 „
26. 7. 13	Ferngewitter	2h 11 p.	k. Regen	—	2h 51 p.	+40 „
27. 7. 13	„	12h 23 p.	k. Regen	—	11h 56 a.	−27 „
14. 8. 13	Mittleres Nahegewitter	5h 54 p.	6h 15 p.	21 Min.	6h 37 p.	+43 „
24. 8. 13	Ferngewitter	9h 33 p.	9h 45 p.	12 „	?	—
25. 8. 13	„	12h 21 p.	12h 25 p.	4 „	12h 18 p.	− 3 Min.
25. 8. 13	Leichtes Nahegewitter	3h 20 p.	3h 24 p.	4 „	?	—
3. 9. 13	„ „	1h 52 p.	1h 52 p.	0 „	2h 2 p.	+10 „
6. 5. 14	„ „	3h 3 p.	3h 20 p.	17 „	3h 12 p.	+ 9 „
23. 5. 14	„ „	6h 28 p.	6h 38 p.	10 „	6h 41 p.	+13 „
23. 5. 14	„ „	8h 21 p.	8h 48 p.	27 „	8h 48 p.	+27 „
24. 5. 14	Mittleres „	3h 36 p.	3h 50 p.	14 „	3h 38 p.	+ 2 „
13. 6. 14	Stärkeres „	2h p.	2h 21 p.	21 „	2h 6 p.	+ 6 „
13. 6. 14	Ferngewitter	6h 19 p.	6h 20 p.	1 „	5h 39 p.	−40 „
15. 6. 14	„	2h 56 p.	k. Regen	—	3h 23 p.	+27 „
16. 6. 14	„	11h 21 a.	k. Regen	—	11h 17 a.	− 4 „
22. 6. 14	Mittleres Nahegewitter	2h 44 p.	3h 28 p.	44 „	2h 30 p.	−14 „
24. 6. 14	Leichtes „	3h 58 p.	5h 32 p.	94 „	5h 20 p.	+82 „
4. 7. 14	Ferngewitter	1h 23 p.	1h 23 p.	0 „	1h 35 p.	+12 „
14. 7. 14	Stärkeres Nahegewitter	4h 56 p.	5h 24 p.	28 „	4h 35 p.	−21 „
15. 7. 14	Ferngewitter	1h 57 p.	k. Regen	—	2h 10 p.	+13 „
22. 7. 14	„	2h 59 p.	k. Regen	—	3h 6 p.	+ 7 „

½ Stunde. Bei 21 Fällen liegen sie unterhalb einer Stunde, nur bei 3 Fällen sind sie größer als eine Stunde. Diese Zeiten bezogen sich auf den Beginn des Regens. In den meisten Fällen aber wird vorher bereits Donner wahrzunehmen sein, deshalb müßten sich die Prognosenzeiten auf den Zeitpunkt des ersten Donners beziehen. Betrachtet man das vorliegende Material daraufhin, so sind unter 26 Gewittern 17, bei denen das Überschreiten des oben genannten Grenzwertes des Potentialgefälles *vor* dem ersten Donner eintrat, in 9 Fällen trat es erst *nach* diesem ein und zwar im Mittel 23 Minuten vorher bzw. 16 Minuten später, oder wenn man ein allgemeines Mittel über alle Fälle bildet, im Durchschnitt 9 Minuten vorher. Im einzelnen schwanken die Zeiten auch wieder recht sehr. Sie nehmen fast alle Werte zwischen 82 Minuten vor und 40 Minuten nach dem

ersten Donner an. Demnach wäre, wenn man davon absieht, daß im einzelnen manche Prognosenzeiten äußerst kurz sind, in 65 Proz. der Fälle eine kurzfristige Prognose möglich gewesen, und diese Prognose würde für günstige Tage, das sind solche, an denen die störenden Einflüsse der verschiedenen anderen meteorologischen Elemente sich auf ein Minimum reduzieren, sozusagen eine Vorhersage mit 100 proz. Wahrscheinlichkeit darstellen. Wenn man sich mit einer geringeren Wahrscheinlichkeit begnügen will, könnte der oben erwähnte Grenzwert entsprechend niedriger angesetzt werden, wodurch sich dann auch die Prognosenzeiten etwas günstiger gestalten. Es ist nicht ausgeschlossen, daß man dadurch wenigstens die Möglichkeit gewinnt, die Wahrscheinlichkeit des Aufkommens von Wärmegewittern an heiteren Sommertagen festzustellen, besonders wenn es der Beobachtung der Wolkenbildung und -veränderung, welche bei Kenntnis der allgemeinen Wetterlage immer noch die besten Anhaltspunkte für die Gewittervorhersage abgibt, schwer wird, eine Entscheidung vom Erdboden aus zu treffen. Im übrigen besteht außerdem durchaus die Möglichkeit, daß auf Grund langjähriger Registrierungen, die eine entsprechende Kenntnis des täglichen Ganges des Potentialgefälles und seiner Abhängigkeit von den übrigen meteorologischen Elementen vermittelt haben, in allen Fällen auch die Ausnutzung dieses meteorologischen Elementes eine Bereicherung der Entscheidungsmöglichkeiten für kurzfristige Gewitterprognosen darstellen wird. Es käme zwar allerdings noch darauf an, ob es nicht der drahtlosen Telegraphie gelingen wird, auf Grund ihrer mit den Gewittern in ursächlichem Zusammenhang stehenden Störungen eine praktisch brauchbare Prognose zu gewährleisten. — Gewitterfernanzeiger, die auf der Ausbreitung der durch den Blitz erzeugten elektrischen Wellen beruhen, sind seit langem schon in Gebrauch.[1]) Ihre Empfindlichkeit ist zuerst sehr stark übertrieben worden. Szalay wies nach, daß die Angaben jener Apparate sehr oft gar nicht auf Gewitter zurückzuführen waren, daß sie bei Nahegewittern auch manchmal ganz versagten.[2]) Welche Erfahrungen mit den neueren Gewitterfernanzeigern, wie z. B. den von der

1) Vgl. Tommasina, Physik. Zeitschr. 2. S. 277. 1901.
2) Met. Zeitschr. 22. S. 10. 1905.

Gesellschaft für drahtlose Telegraphie herausgebrachten[1]) gemacht worden sind, ist nicht bekannt. In Halle vorgenommene Untersuchungen über den Zusammenhang der Störungen des atmosphärischen Potentialgefälles mit den luftelektrischen Empfangsstörungen der drahtlosen Telegraphie[2]), nach denen jeder Potentialstörung eine Empfangsstörung entspricht, die Mannigfaltigkeit der Störungsursachen also in einem wie im andern Falle vorhanden ist, scheinen darauf hinzuweisen, daß eine Prognose auf dieser Grundlage vermutlich ebensovielen Schwierigkeiten begegnen wird, als eine solche auf Grund von Potentialgefällemessungen.

Das Vorhergegangene läßt sich nun also wie folgt zusammenfassen:

Die Nahegewitter der Jahre 1913 und 1914 beeinflußten — sofern sie sich nicht erst in der Nähe bildeten — das atmosphärische Potentialgefälle am Beobachtungsort bereits aus einer Entfernung von ungefähr 33 km.

Die Ferngewitter hatten unter Umständen schon innerhalb 20 km — der maximalen Hörweite des Donners — sicher aber aus 25 km und darüber keinen Einfluß mehr auf das Potentialgefälle am Beobachtungsort.

Es erscheint als im Bereich des Möglichen liegend, daß die Beobachtung des atmosphärischen Potentialgefälles bei entsprechenden Unterlagen über die normalen Verhältnisse eine kurzfristige — eine halbe bis eine Stunde — Gewittervorhersage gewährleisten kann.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Physikalischen Institut der Universität Leipzig ausgeführt. Für die wertvollen Ratschläge und die liebenswürdige Unterstützung, die Herr Prof. Dr. O. Wiener und Herr Dr. L. Schiller mir jederzeit zuteil werden ließen, sage ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank.

---

1) Jahrbuch für drahtlose Telegraphie 7. S. 81. 1913.
2) Physik. Zeitschr. 14. S. 1148. 1913.

(Eingegangen 19. Juli 1919.)

3. *Kristallgitter, deren Atome durch Gravitationsfelder in stabilen Gleichgewichtslagen gehalten werden;*

von R. Schachenmeier.

Die durch v. Laues Entdeckung eingeleitete Analyse der Kristallstrukturen weist darauf hin, daß das Kristallgitter durch dieselben Kräfte zusammengehalten wird, welche die im Kristall vorhandenen chemischen Bindungen bewirken. Andererseits neigt die Chemie auf Grund ihrer neueren Ergebnisse zu der Annahme, daß die Valenzkräfte in der Hauptsache elektrostatische Felder sind. Ein elektrische Ladungen tragendes Punktsystem, wie es das Kristallgitter demnach darstellt, kann aber unter der Wirkung rein elektrostatischer Kräfte nicht stabil sein. Hierzu sind weitere Kraftwirkungen nötig, welche den elektrostatischen das Gleichgewicht zu halten vermögen. Eine solche Kraft wurde am Bohrschen Atommodell in Gestalt der Zentrifugalkraft des umlaufenden Elektrons gefunden. Die großen Erfolge desselben (auch abgesehen von den Leistungen des quantentheoretischen Ansatzes) ermutigen dazu, auch im Raumgitter fester Kristalle nach mechanischen Kräften zu suchen, die sich mit den elektrostatischen im Gleichgewicht befinden. Bei den komplizierten Verhältnissen im Kristallgitter wird man nicht mehr einfache Zentrifugalkräfte erwarten dürfen, sondern vielmehr Gravitationsfelder, die ja in besonderen Fällen im unendlich Kleinen als Zentrifugalfelder aufgefaßt werden können.

Bei dem kubischen Gitter vom Typus des NaCl habe ich ein Gravitationsfeld angegeben[1]), welches dasselbe im stabilen Gleichgewicht erhält derart, daß dessen Atome durch quasielastische Kräfte an die Ecken des Gitters gebunden sind, und

1) Ann. d. Phys. 53. S. 79. 1917; im folgenden als „Stab. Gitter“ zitiert.

welches auch in sonstigen physikalischen (elastischen, thermischen) Eigenschaften mit der Erfahrung übereinstimmt.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie sich kompliziertere Gitter aus Gravitationsfeldern aufbauen, nämlich in § 2 ein aus zentrierten Würfeln (Ecken und Mittelpunkte mit Atomen besetzt), in § 3 ein aus flächenzentrierten Würfeln (Ecken und Flächenmitten besetzt wie z. B. beim Kupfer) bestehendes Gitter, in § 4 aus Parallelepipeden (Kalkspat?), zentrierten Parallelepipeden und flächenzentrierten Parallelepipeden aufgebaute Gitter, in § 5 das Gitter des Graphits und in § 6 das Gitter des Diamants.

§ 1. Grundlagen der Theorie; Gitter von Steinsalz.

In einer durch die Parameter x_1, x_2, x_3, x_4 gegebenen Raum-Zeitmannigfaltigkeit ist das Linienelement

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu, \tag{1}$$

wobei die „Gravitationspotentiale" $g_{\mu\nu}$ den Einsteinschen kovarianten Feldgleichungen genügen müssen.[1]) Letztere vereinfachen sich wesentlich, wenn man setzt

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \tag{2}$$

wobei $\gamma_{\mu\nu}$ kleine Größen 1. Ordnung und

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1\,(\mu = \nu) \\ 0\,(\mu \neq \nu) \end{cases} \tag{3}$$

sind. Führt man weiter die Größen $\gamma'_{\mu\nu}$ ein[2]) nach

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma, \qquad \gamma = \sum_a \gamma_{aa}, \tag{4}$$

woraus folgt:

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\gamma', \qquad \gamma' = \sum_a \gamma'_{aa}, \tag{5}$$

so lauten die Feldgleichungen

$$\left|\begin{array}{l} \sum_a \dfrac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_a^2} = 2\varkappa T_{\mu\nu}, \\ \sum_a \dfrac{\partial \gamma'_{\mu a}}{\partial x_a} = 0. \end{array}\right. \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

1) Vgl. etwa A. Einstein „Grundlage", Ann. d. Phys. 49. S. 769. 1916.

2) Vgl. A. Einstein, „Gravitationswellen", Sitz.-Ber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1918. S. 154.

$\varkappa$ ist die Gravitationskonstante und $T_{\mu\nu}$ der „Energietensor der Materie". Ist keine Materie vorhanden, so sind die Feldgleichungen:

$$(7) \qquad \sum_a \frac{\partial^2 \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_a^2} = 0, \qquad \sum_a \frac{\partial \gamma'_{\mu a}}{\partial x_a} = 0.$$

Dieselben erzeugen eigenartige Gravitationsfelder, welche sich in Wellenform mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Beim Steinsalzgitter treten a. a. O. die Felder auf:

$$(8) \qquad \gamma_{23}' = \alpha_{23} \cos \nu (x_1 \pm i x_4),$$

$$(9) \qquad \gamma_{31}' = \alpha_{31} \cos \nu (x_2 \pm i x_4),$$

$$(10) \qquad \gamma_{12}' = \alpha_{12} \cos \nu (x_3 \pm i x_4),$$

deren Strahlvektoren senkrecht zur Wellenebene stehen. Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes sind, in Größen 2. Ordnung genau, abgesehen vom Vorzeichen[1]):

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} 4\varkappa t_{\mu\sigma} = & \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma'}{\partial x_\sigma} \\ & - \frac{1}{2} \delta_{\mu\sigma} \left\{ \sum_{\alpha\beta\lambda} \left(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_\lambda \left(\frac{\partial \gamma'}{\partial x_\lambda} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Eine Gravitationswelle kann Energie auf ein materielles Gebilde übertragen. Ist nämlich $T_{\mu\nu}$ der Energietensor desselben[2]), so berechnet sich die Beeinflussung desselben durch

---

1) A. Einstein, Sitz.-Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1918. S. 154ff. Gleich. (9). In „Stab. Gitter" sind $t_{\mu\sigma}$ aus der Einsteinschen Arbeit, Sitz.-Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1916. S. 688ff., entnommen, werden aber durch die von A. Einstein dazu gegebene Berichtigung, Sitz.-Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1918. S. 154ff., nicht berührt, weil in „Stab. Gitter" nur die γ_{23}, γ_{31}, γ_{12} auftreten, für welche die alten Formeln richtig bleiben, da $\gamma_{23} = \gamma_{23}'$, $\gamma_{31} = \gamma_{31}'$, $\gamma_{12} = \gamma_{12}'$.

2) Auf Grund der neueren atomistischen Vorstellungen kann man annehmen, daß sich im Atom die äußeren Elektronen in komplizierten Bahnen bewegen (vgl. z. B. Landé, Ber. Dtsch. Phys. Gesellsch. 21. S. 2. 1919), und die eindringenden Gravitationsfelder Störungsbewegungen hervorbringen, welche durch die Schwingungen des Tensors $T_{\mu\nu}$ dargestellt werden.

die Gravitationswelle aus dem Impulsenergiesatz[1]), welcher mit der hier vorgeschriebenen Genauigkeit lautet:

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial (T_{\mu\sigma} + t_{\mu\sigma})}{\partial x_\sigma} = 0. \tag{12}$$

Im Falle des Steinsalzgitters, wo nur die Wellen $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ existieren, folgt daraus in „Stab. Gitter" unter der Annahme, daß nur die Komponente T_{23} von Null verschieden sei:

$$\frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \sum_{\alpha} \frac{\partial t_{3\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \sum_{\alpha} \frac{\partial t_{2\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{14}$$

Berücksichtigt man ferner, daß auch

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial t_{\mu\sigma}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{\varrho\sigma} \frac{\partial \gamma_{\varrho\sigma}}{\partial x_\mu} T_{\varrho\sigma}, \tag{15}$$

so ergibt sich weiter

$$\frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} = -\tfrac{1}{2} T_{23} \cdot \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} = -\tfrac{1}{2} T_{23} \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_3}, \tag{16}$$

oder auch:

$$T_{23} = \frac{2}{\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_2}} \sum_{\alpha} \frac{\partial t_{2\alpha}}{\partial x_\alpha} = \frac{2}{\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_3}} \sum_{\alpha} \frac{\partial t_{3\alpha}}{\partial x_\alpha}. \tag{17}$$

Wenn der Energietensor (z. B. infolge der eingestrahlten Energie) zeitlich variiert, so strahlt das Teilchen wegen (6) wiederum Gravitationswellen aus, und zwar sind dieselben gegeben durch:

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\frac{\varkappa}{2\pi} \int \frac{T_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t - r)}{r} dV_0, \tag{18}$$

wobei x, y, z, t die reellen Parameter $x_1, x_2, x_3, x_4/i$ bedeuten und zwar mit Index 0 diejenigen des Integrationselements, ohne Index 0 diejenigen des Aufpunktes, ferner

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

---

1) A. Einstein, Sitz.-Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1918. S. 154ff. § 5, leitet aus demselben einen geschlossenen Ausdruck für den aus der Welle stammenden zeitlichen Energiezuwachs des Teilchens her:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{\varrho\sigma} \frac{\partial \gamma_{\varrho\sigma}}{\partial t} \int T_{\varrho\sigma} dV.$$

Die Integration ist über das Volumen des Teilchens zu erstrecken.

dV_0 ist das Volumelement des Masseteilchens; die Integration ist über das Volumen desselben zu erstrecken.

Ausstrahlung und Einstrahlung sind offenbar im Gleichgewicht, wenn am Orte des Teilchens der Strahlvektor des Gravitationsfeldes verschwindet:

$$t_{41} = t_{42} = t_{43} = 0. \tag{19}$$

Wir nehmen ferner an, daß beim Vorgang der Energieübertragung nahezu die ganze einfallende Gravitationsenergie in die materielle Energie des Tensors $T_{\mu\nu}$ umgesetzt wird, indem eine Art Resonanz zwischen materiellem Vorgang und Gravitationswelle stattfindet. Dann sind innerhalb der Materie auch die übrigen Energiekomponenten des Gravitationsfeldes mit großer Annäherung gleich Null, also

$$t_{\mu\nu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{20}$$

Hieraus folgt wegen (11) aber notwendig

$$\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\tau} = 0 \qquad (\mu, \nu, \tau = 1, 2, 3, 4). \tag{21}$$

Infolge der Wellennatur der Gravitationsfelder $\gamma'_{\mu\nu}$ ist dies nur möglich, wenn $\gamma'_{\mu\nu}$ im Innern des materiellen Systems verschwinden.

Wenn also eine Gravitationswelle auf ein schwingungsfähiges materielles Teilchen fällt, so wird die eingestrahlte Energie wieder ausgestrahlt derart, daß im Innern desselben die $\gamma'_{\mu\nu}$, also das Gravitationsfeld, verschwinden. Ist eine Ebene genügend dicht mit Materie belegt[1]), so ist ihr Ver-

1) Als derartige „materielle Ebenen" werden die Netzebenen der Kristalle behandelt werden. Da die von den Gitterpunkten ausgehenden elektrischen Kraftlinien ihrerseits in Wechselwirkung mit einer auffallenden Gravitationswelle treten können (das elektrische Feld verhält sich nach A. Einstein dem Gravitationsfeld gegenüber als Materie, vgl. z. B. Ann. d. Phys. 49. S. 767. 1916. § 14), so kann die Netzebene als kontinuierlich mit Materie belegt angesehen werden. Es ist aber ferner zu beachten, daß der von den äußeren Elektronen eines Atoms eingenommene Raum einen Durchmesser hat, der i. a. selbst von der Größenordnung einer halben Gitterkonstante ist. (P. Debye und P. Scherrer finden diese Größenordnung bei Messungen der Zerstreuung von Röntgenstrahlen unter Annahme von kugelförmigen Atomen (Physik. Ztschr. 19. S. 474. 1918. § 3). Die mit Materie belegte Ebene ist daher nur eine Idealisierung der wirklichen Verhältnisse, bei welchen die Wechselwirkung zwischen Gravitationsfeld und Materie eben nicht streng auf einer Ebene, sondern räumlich zu beiden Seiten derselben stattfindet.

halten einer Gravitationswelle gegenüber derart, daß die $\gamma'_{\mu\nu}$ auf ihr verschwinden.[1]) Ist der Strahlvektor senkrecht zur Wellenebene gerichtet, so folgt ferner aus dem Huyghensschen Prinzip, daß die Welle nach dem gewöhnlichen Reflexionsgesetz zurückgeworfen wird.

Wellen, deren Strahl schief zur Wellenebene steht, treten in § 4 auf. Die reflektierte Welle läßt sich in diesem Falle ebenfalls mit Hilfe des Huyghensschen Prinzips angeben, da dann aus (18) folgt, daß die Elementarwellen Ellipsoide sind.

Wird die Welle in sich zurückgeworfen, so daß der Strahl seine Richtung gerade umkehrt, so bilden sich stehende Wellen aus. Im Falle des Steinsalzes entstehen aus den fortschreitenden Wellen (8), (9), (10) durch senkrechte Reflexion die stehenden:

$$\gamma_{23}' = 2\alpha_{23} \cos \nu x_1 \cos \nu i x_4, \tag{22}$$

$$\gamma_{31}' = 2\alpha_{31} \cos \nu x_2 \cos \nu i x_4, \tag{23}$$

$$\gamma_{12}' = 2\alpha_{12} \cos \nu x_3 \cos \nu i x_4. \tag{24}$$

Da eine Gravitationswelle die Bewegungsgröße t_{14}, t_{24}, t_{34} nach (11) mit sich führt, so erfährt die reflektierende Ebene einen Strahlungsdruck:

$$p = 2E, \tag{25}$$

wo E die mittlere Energiedichte der einfallenden Strahlung

$$E = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} t_{44}\, ds \tag{26}$$

ist, wenn s die Richtung des Strahles und ν die Frequenz, also $2\pi/\nu = \lambda$ die Wellenlänge ist. Beim Steinsalz[2]) ergibt sich die mittlere Energiedichte E der Welle (22) zu

$$E = \frac{\nu^3 \alpha_{23}^2}{8\pi\varkappa} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} \sin^2 \nu x_1\, dx_1 = \frac{\nu^3 \alpha_{23}^2}{8\varkappa}. \tag{27}$$

Ist die Flächeneinheit mit N^2 Partikeln besetzt, so erfährt das einzelne die Kraft

---

1) Wenn einzelne der $t_{\mu\nu}$ die $T_{\mu\nu}$ nicht beeinflussen, so gilt (20) für diese nicht, und es brauchen dann auch nicht alle $\gamma'_{\mu\nu}$ zu verschwinden.

2) „Stab, Gitter", § 1.

$$p_1 = \frac{2E}{N^3} = \frac{\nu}{\pi N^3} \int_0^{\frac{2\pi}{\nu}} t_{44}\, ds, \tag{28}$$

also im Falle des Steinsalzes[1]):

$$p_1 = \frac{\nu^3 a_{22}^2}{4\pi N^3}. \tag{29}$$

Befinden sich beiderseits einer materiellen Ebene A stehende, zu ihr parallele Wellen, so erfahren die Teilchen von beiden Seiten her entgegengesetzt gleiche Kräfte. Die stehende Strahlung sei in einen Raum mit reflektierenden Wänden, von denen zwei zu A parallel sind, eingeschlossen. Wird alsdann A senkrecht zu sich selbst, relativ zu den spiegelnden Wänden verschoben, so wachsen auf der einen Seite Strahlungsdichte und -druck proportional der Verschiebung, während sie auf der anderen Seite im selben Verhältnis abnehmen. Die materiellen Teilchen sind also durch quasielastische Kräfte an die ursprüngliche Lage der Ebene gebunden.

Ist der Raum von 3 Scharen paralleler Knotenebenen stehender Gravitationsstrahlung durchzogen, so sind demnach die Schnittpunkte derselben stabile Gleichgewichtlagen für materielle Teilchen. Im Falle des Steinsalzes sind die Knotenflächen der Wellen (22), (23), (24) gegeben durch[1])

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2} + n\right) \\ x_2 = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2} + n'\right) \\ x_3 = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2} + n''\right), \end{cases} \qquad (n, n', n'' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{30}$$

also die Ecken eines kubischen Raumgitters, dessen Gitterkonstante gleich $\lambda/2$ ist, wo

$$\lambda = \frac{2\pi}{\nu}. \tag{31}$$

Üben die Teilchen selbst aufeinander Anziehungskräfte aus, so können sie, in den Schnittpunkten der Knotenebenen angeordnet, dem Strahlungsdruck das Gleichgewicht halten, so daß also die stehenden Wellen in dem Kristallgitter selbst eingeschlossen sind. Diese Anziehung kann durch

1) „Stab. Gitter", § 1.

Gravitation[1]) oder durch elektrostatische Kräfte bewirkt sein. Die neueren Erfahrungen der Chemie[2]) lassen bei „heteropolaren" Verbindungen auf letztere schließen.

§ 2. Kubisches Gitter, an dessen Elementarwürfel Ecken und Mittelpunkte mit Atomen besetzt sind.

Sei für die Indizes $\varkappa = 1, 2, 3, 4$ je ein Vektor $\mathfrak{r}_\varkappa$ mit den Komponenten x_1, x_2, x_3 gegeben durch

$$\mathfrak{r}_\varkappa = a_{\varkappa 1} x_1 + a_{\varkappa 2} x_2 + a_{\varkappa 3} x_3 , \tag{32}$$

wobei

$$a_{\varkappa 1}{}^2 + a_{\varkappa 2}{}^2 + a_{\varkappa 3}{}^2 = 1 . \tag{33}$$

Dann ist für jedes $\varkappa$ eine Lösung der Feldgleichungen (7)

$$\begin{cases} \gamma_{11}{}' = f(\mathfrak{r}_\varkappa \pm i x_4), \quad \gamma_{12}{}' = (-1)^\varkappa f(\mathfrak{r}_\varkappa \pm i x_4), \\ \gamma_{22}{}' = f(\mathfrak{r}_\varkappa \pm i x_4), \end{cases} \tag{34}$$

wobei f eine willkürliche Funktion ist und

$$a_{\varkappa 1} + (-1)^\varkappa a_{\varkappa 2} = 0 . \tag{35}$$

Diesen Bedingungen (35) kann auf mehrere Arten genügt werden, die durch verschiedene Indizes $\varkappa = 1, 2, 3, 4$ gekennzeichnet seien.

Für $\varkappa = 1$ werde gesetzt:

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = \frac{1}{\sqrt{3}} , \tag{36}$$

für $\varkappa = 2$:

$$-a_{21} = a_{22} = a_{23} = \frac{1}{\sqrt{8}} , \tag{37}$$

---

1) Dieselbe wird alsdann durch das Potential g_{44} dargestellt. Da die angenäherten Feldgleichungen linear sind, so superponieren sich die verschiedenen Gravitationsfelder ohne gegenseitige Beeinflussung.

2) Vgl. z. B. W. Kossel, Ann. d. Phys. 49. S. 229. 1916.

für $\varkappa = 3$:

$$-a_{31} = -a_{32} = a_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{38}$$

für $\varkappa = 4$:

$$a_{41} = -a_{42} = a_{43} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{39}$$

Durch die drei Koordinatenebenen wird der Raum in 8 Oktanten zerlegt. Numeriert man dieselben, anfangend mit dem zu lauter positiven Koordinatenrichtungen gehörigen, so verläuft der Vektor $\tau_\varkappa$ im $\varkappa$ten Oktanten und bildet dessen Symmetrielinie (vgl. Fig. 1; die x_3-Achse ist in 0 senkrecht zur Zeichnungsebene nach oben gerichtet, ebenso die τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 nach oben gerichtet zu denken).

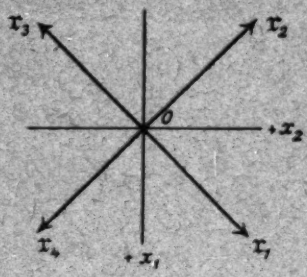


Fig. 1.

Die $\varkappa$te Lösung (34) stellt eine Gravitationswelle dar mit den Wellenebenen

$$\tau_\varkappa = \text{const.} \tag{40}$$

Wird die willkürliche Funktion

$$f(\tau_\varkappa + i x_4) = \alpha^{(\varkappa)} \cos \nu' (\tau_\varkappa + i x_4) \tag{41}$$

gesetzt, so vermögen sich die beiden einander entgegenlaufenden Wellenzüge, welche in (34) durch positive bzw. negative Zeitvariable gekennzeichnet sind, zu stehenden Wellen zu überlagern. Werden dann in (34) für den Index $\varkappa$ die γ_{11}', γ_{12}', γ_{22}' mit $\gamma_{11}^{(\varkappa)}$, $\gamma_{12}^{(\varkappa)}$, $\gamma_{22}^{(\varkappa)}$ bezeichnet, so genügen die stehenden Wellen

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_{11}^{(\varkappa)} = 2\,\alpha^{(\varkappa)} \cos \nu' \tau_\varkappa \cos \nu i x_4, \quad \gamma_{12}^{(\varkappa)} = 2(-1)^\varkappa \alpha^{(\varkappa)} \cos \nu' \tau_\varkappa \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cos \nu i \tau_4, \\ \gamma_{22}^{(\varkappa)} = 2\,\alpha^{(\varkappa)} \cos \nu' \tau_\varkappa \cos \nu i x_4 \qquad\qquad\qquad\qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4) \end{array}\right. \tag{42}$$

den Feldgleichungen (7).

Die 4 Scharen von parallelen Knotenebenen sind gegeben durch

$$\tau_\varkappa = a_{\varkappa 1} x_1 + a_{\varkappa 2} x_2 + a_{\varkappa 3} x_3 = \frac{\lambda'}{2}\left(\tfrac{1}{2} + n\right) \tag{43}$$

$$(\varkappa = 1, 2, 3, 4) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

worin

$$\lambda' = \frac{2\pi}{\nu'} \tag{45}$$

die Wellenlänge vorstellt. Die 8 Ebenen

$$\left\{\begin{array}{ll} \tau_1 = \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{1}{2} + n\right), & \tau_1 = \frac{\lambda'}{2}\left(-\frac{1}{2} + n\right) \\ \tau_2 = \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{1}{2} + n'\right), & \tau_2 = \frac{\lambda'}{2}\left(-\frac{1}{2} + n'\right) \\ \tau_3 = \frac{\lambda'}{2}\left(\frac{1}{2} + n''\right), & \tau_3 = \frac{\lambda'}{2}\left(-\frac{1}{2} + n''\right) \\ \tau_4 = \frac{\lambda'}{2}\,\frac{1}{2} + n'''), & \tau_4 = \frac{\lambda'}{2}\left(-\frac{1}{2} + n'''\right) \end{array}\right. \tag{44}$$

umschließen bei positiven oder negativen n, n', n'', n''', welche die Bedingung

$$n + n' + n'' + n''' = 0 \tag{46}$$

erfüllen, sonst beliebig sind, jeweils ein Oktaeder. In den Ecken dieser Oktaeder liegen also die Schnittpunkte der Knotenflächen; dieselben sind daher stabile Gleichgewichtslagen für Atome.

Die Oktaederecken lassen sich auch in den Ecken und Mittelpunkten von Würfeln anordnen (vgl. Fig. 2), deren Kanten parallel den Koordinatenachsen verlaufen mit der Kantenlänge

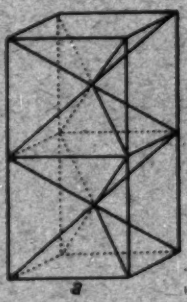


Fig. 2.

$$a = \frac{\lambda'}{2\sqrt{3}}. \tag{47}$$

Das so entstehende Kristallgitter wird durch die Gravitationsfelder (42) im stabilen Gleichgewicht erhalten. Der zur $\varkappa$ten Welle gehörige Energiestrom berechnet sich aus (11):

$$\frac{4\varkappa}{i}\, t_{4\sigma}^{(\varkappa)} = 2\, a_{\varkappa\sigma}\, \nu'^2 \cos\nu'\tau_\varkappa \cdot \sin\nu' i x_4 \cdot \cos\nu'\tau_\varkappa \cdot \sin\nu' i x_4 \cdot \tag{48}$$

$$(\sigma = 1, 2, 3)$$

Aus dem Auftreten der Größen $a_{\varkappa\sigma}$ erhellt, daß der Strahlvektor $t_{41}^{(\varkappa)}$, $t_{42}^{(\varkappa)}$, $t_{43}^{(\varkappa)}$ in die Richtung des Vektors $\mathfrak{r}_\varkappa$ fällt.

Die Energiedichte der $\varkappa$ten Welle ergibt sich aus (11) zu[1])

$$4\varkappa t_{44}^{(\varkappa)} = -\,\nu'^2(\cos^2\nu'\,\mathfrak{r}_\varkappa\cdot\sin^2\nu' i x_4 + \sin^2\nu'\,\mathfrak{r}_\varkappa\cdot\cos^2\nu' i x_4). \tag{49}$$

Sind mehrere Gravitationswellen gleichzeitig zugegen, z. B. $\gamma_{11}^{(1)}$, $\gamma_{12}^{(1)}$, $\gamma_{22}^{(1)}$ und $\gamma_{11}^{(2)}$, $\gamma_{12}^{(2)}$, $\gamma_{13}^{(2)}$, so ist in (11) anstatt $\gamma'_{\alpha\beta}$, ... zu setzen $\gamma_{\alpha\beta}^{(1)}+\gamma_{\alpha\beta}^{(2)}$, ..., so daß der Energiestrom wird:

$$\begin{aligned}
4\varkappa t_{4\sigma} = &\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial x_4}\,\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial x_\sigma}\right)-\dots\\
&+\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial x_4}\,\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial x_\sigma}\right)-\dots\\
&+\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial x_4}\,\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}^{(1)}}{\partial x_\sigma}\right)-\dots\\
&+\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial x_4}\,\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}^{(2)}}{\partial x_\sigma}\right)-\dots
\end{aligned}$$

Für den Strahlungsdruck auf eine Ebene

$$\mathfrak{r}_1 = \text{const.}$$

ist nun maßgebend der Mittelwert von $t_{4\sigma}$, genommen über ein Stück S dieser Ebene:

$$\frac{1}{S}\int_{(S)} t_{4\sigma}\,dS.$$

Die $\gamma_{\alpha\beta}^{(2)}$ sind aber auf dieser Ebene mit wechselndem Vorzeichen veränderlich derart, daß ihre Mittelwerte verschwinden. Daher wird

$$\frac{1}{S}\int_{(S)} t_{4\sigma}\,dS = \frac{1}{S}\int_{(S)} t_{4\sigma}^{(1)}\,dS,$$

wo $t_{4\sigma}^{(1)}$ der mit den $\gamma_{11}^{(1)}$, $\gamma_{12}^{(1)}$, $\gamma_{12}^{(1)}$ nach (11) gebildete Strahlvektor (48) ist. Ebenso kommt für den Strahlungsdruck auf eine Ebene

$$\mathfrak{r}_2 = \text{const.}$$

nur der Energiestrom $t_{4\sigma}^{(2)}$ in Betracht.

---

1) Das negative Vorzeichen der wesentlich positiven Energiedichte ist bedeutungslos, da die Formeln (11) nur abgesehen vom Vorzeichen richtig sind.

§ 3. Gitter des Kupfers (Flächenzentrierte Würfel).

Es mögen außer den Graviatationsfeldern (42) noch die zum kubischen Gitter gehörigen Wellen (22), (23), (24) existieren, und die zugehörigen Wellenlängen λ' bzw. λ miteinander verknüpft sein durch

$$\lambda = \lambda' \sqrt{3}. \tag{50}$$

Das zu den Gravitationsfeldern (22), (23), (24) mit der Wellenlänge λ gehörige kubische Gitter werde als Gitter A, des zu (42) mit der Wellenlänge λ' gehörige „oktaedrische" als „Gitter B" bezeichnet. Alsdann fallen die Ecken des Gitters B in die Knotenflächen des Gitters A (vgl. Fig. 3) und sind mithin an diese Ebenen quasielastisch gebunden. Ebenso fallen aber auch die Ecken von A in die Knotenflächen von B. Die beiden Gitter A und B sind mithin derart miteinander gekoppelt, daß eine Verschiebung des einen als ganzen gegen das andere rücktreibende quasielastische Kräfte weckt.

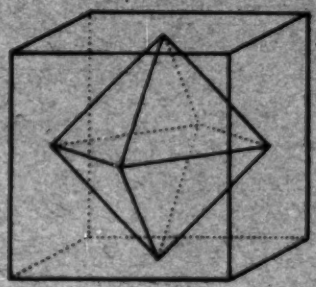


Fig. 3.

Das so entstehende Gesamtgitter baut sich aus flächenzentrierten Würfeln auf und ist z. B. vertreten durch das Kupfer.

§ 4. Gitter aus elementaren Parallelepipeden, deren Ecken oder Ecken und Mittelpunkte oder Ecken und Flächenmitten mit Atomen besetzt sind.

In einem rechtwinkligen Bezugssystem seien mit x_1, x_2, x_3 die Koordinaten der Eckpunkte eines kubischen Gitters bezeichnet, mit x_1', x_2', x_3' die Eckpunkte eines durch beliebige lineare homogene Deformation daraus hervorgehenden Gitters, so daß

$$x_\sigma = b_{\sigma 1} x_1' + b_{\sigma 2} x_2' + b_{\sigma 3} x_3' \qquad (\sigma = 1, 2, 3). \tag{51}$$

Das Elementargebiet des verzerrten Gitters ist ein Parallelepiped.

Da man durch die Deformation (51) vom kubischen zum „parallelepipedischen" Gitter gelangt, so erhält man dasselbe

auch, wenn man das kubische Gitter in einen Raum versetzt, dessen Metrik nicht mehr gegeben ist durch das Linienelement

$$ds^2 = \sum_{(\mu\nu)} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu, \tag{52}$$

sondern durch

$$ds'^2 = \sum_{(\mu\nu)} g'_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu, \tag{53}$$

wobei der Tensor $g'_{\mu\nu}$ aus $g_{\mu\nu}$ vermöge der Transformation (51) hervorgeht. Er ergibt sich zu

$$g'_{\mu\nu} = \sum_{(\sigma\tau)} \frac{\partial x_\sigma}{\partial x_\mu'} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu'} g_{\sigma\tau} = \sum_{(\sigma\tau)} b_{\sigma\mu}\, b_{\tau\nu}\, g_{\sigma\tau}, \tag{54}$$

wenn hierin anstatt der Variablen x_1', x_2', x_3' wieder x_1, x_2, x_3 eingesetzt werden.

Im Falle des zum kubischen Gitter gehörigen Gravitationsfeldes (24) ist

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1, \quad g_{12} = \gamma_{12}', \quad g_{23} = g_{31} = 0, \tag{55}$$

also

$$\left\{\begin{aligned}
g_{11}' &= b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{31}^2 + b_{11}\, b_{21}\, \gamma_{12}' \\
&= c_{11} + 2\, b_{11} b_{21}\, \alpha_{12} \cos \nu (b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3) \cos \nu i x_4 \\
g_{12}' &= b_{11} b_{12} + b_{21} b_{22} + b_{31} b_{32} + b_{11} b_{22} \gamma_{12}' \\
&= c_{12} + 2\, b_{11} b_{22}\, \alpha_{12} \cos \nu (b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3) \cos \nu i x_4 \\
g_{13}' &= b_{11} b_{13} + b_{21} b_{23} + b_{31} b_{33} + b_{11} b_{23} \gamma_{12}' \\
&= c_{13} + 2\, b_{11} b_{33}\, \alpha_{12} \cos \nu (b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3) \cos \nu i x_4 . \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right. \tag{56}$$

Dieses Gravitationsfeld (56) stellt eine stehende Welle vor, deren Knotenebenen parallel sind derjenigen Fläche des Elementarparallelepipeds, in welche die x_1, x_2-Ebene durch die Deformation (51) übergeführt wird. Da der Energietensor $t_{\mu\nu}$ gegen lineare Transformationen kovariant ist[1]), so folgt ferner, daß der Energiestrom $t_{41}', t_{42}', t_{43}'$ der Welle (56) parallel derjenigen Kante des Elementarparallelepipeds gerichtet ist, in welche die x_3-Achse durch die Deformation (51) übergeht. Er steht also nicht mehr senkrecht auf der Wellenebene.

Aus (23) und (22) werden Wellen vom Baue (56), deren Knotenebenen parallel den beiden anderen Flächenpaaren des

1) A. Einstein, Sitz.-Ber. Berl. Akad. d. Wiss. 1914. S. 1077.

Elementarparallelepipeds liegen mit Strahlvektoren in der Richtung der entsprechenden Kanten.

Die Schnittpunkte dieser 3 Scharen von Knotenflächen sind die Ecken eines aus elementaren Parallelepipeden bestehenden Gitters. Mithin sind letztere stabile Gleichgewichtslagen für materielle Teilchen. Dieses Gitter ist vielleicht im Kalkspat vertreten.[1]) Unerklärt bleiben dann allerdings die Gleichgewichtslagen der O-Atome.

Aus dem „oktaedrischen" Gitter geht vermöge der Deformation (51) ein Gitter hervor, das aus schiefen Bipyramiden aufgebaut ist. Die zugehörigen Gravitationsfelder entstehen aus (42), (5), (2) wieder mit Hilfe von (54), wenn

$$a_{\varkappa 1}\, b_{1\sigma} + a_{\varkappa 2}\, b_{2\sigma} + a_{\varkappa 3}\, b_{3\sigma} = a'_{\varkappa\sigma} \tag{57}$$

gesetzt wird, folgendermaßen:

$$\begin{cases} g_{11}^{(\varkappa)} = b_{11}^{\,2} + b_{21}^{\,2} + b_{31}^{\,2} \\ \quad + \alpha^{(\varkappa)}(-1)^{\varkappa} b_{11}\, b_{21} \cos\nu' (a_{\varkappa 1}' x_1 + a_{\varkappa 2}' x_2 + a_{\varkappa 3}' x_3) \cos\nu' i x_4 \\ g_{12}^{(\varkappa)} = b_{11}\, b_{12} + b_{21}\, b_{22} + b_{31}\, b_{32} \\ \quad + \alpha^{(\varkappa)}(-1)^{\varkappa} b_{11}\, b_{32} \cos\nu' (a_{\varkappa 1}' x_1 + a_{\varkappa 2}' + a_{\varkappa 3}' x_3) \cos\nu' i x_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4). \end{cases} \tag{58}$$

Die Knotenebenen dieser 4 Wellenzüge umschließen die genannten schiefen Bipyramiden. Die zu den einzelnen Wellenzügen gehörigen Strahlvektoren fallen in die Richtung der Vektoren

$$\mathfrak{r}_{\varkappa}' = a_{\varkappa 1}' x_1 + a_{\varkappa 2}' x_2 + a_{\varkappa 3}' x_3, \tag{59}$$

in welche die Vektoren $\mathfrak{r}_{\varkappa}$ durch die Deformation (51) übergeführt werden und stehen auf den Wellenebenen nicht mehr senkrecht. Das zu (58) gehörige Gitter kann auch aus Parallelepipeden bestehend aufgefaßt werden, deren Ecken und Mittelpunkte mit Atomen besetzt sind.

Ist das kubische Gitter (22), (23), (24) mit dem „oktaedrischen" (42) nach (50) derart verbunden, daß die Ecken des einen zugleich auf Knotenflächen des anderen fallen, so bleibt diese Eigenschaft auch nach der Deformation (51) erhalten.

---

1) Vgl. z. B. W. L. Bragg, Ztschr. f. anorg. Chemie 90. S. 185. 1915.

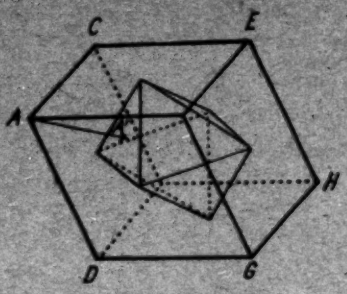


Fig. 4.

Die Gravitationsfelder (56) und (58) bestimmen dann zusammen ein Gitter, dessen Punkte in den Ecken und Flächenmitten von elementaren Parallelepipeden liegen (Fig. 4). Dieses Gitter, welches im folgenden § 5 eine Rolle spielt, werde schlechthin als das „Gitter G" bezeichnet.

§ 5. Gitter des Graphits.

Nach Debye und Scherrer[1]) besteht das Gitter des Graphits aus zwei gegeneinander verschobenen Gittern, von denen jedes seinem Bau nach mit dem im vorigen § 4 abgeleiteten „Gitter G" übereinstimmt. Das Elementarparallelepiped ist ein Rhomboeder, dessen längste Diagonale das 1,670-fache der Diagonale eines elementaren Würfels ist, aus welchem man sich das Rhomboeder durch Dilatation längs einer Diagonale entstanden denken kann. In den Gravitationsfeldern (56), (58) des Gitters G ist daher zu setzen

$$b_{\varkappa\sigma} = \begin{cases} 0{,}968 & (\varkappa = \sigma) \\ -0{,}031 & (\varkappa \neq \sigma). \end{cases} \tag{60}$$

Die zum rhomboedrischen Gitter gehörigen Gravitationsfelder (56) werden dann

$$\begin{cases} g_{11}' = 0{,}940 \\ \quad -0{,}060\,\alpha_{12}\cos\nu(-0{,}031\,x_1 - 0{,}031\,x_2 + 0{,}968\,x_3)\cos\nu i x_4 \\ g_{12}' = -0{,}059 \\ \quad -0{,}060\,\alpha_{12}\cos\nu(-0{,}031\,x_1 - 0{,}031\,x_2 + 0{,}968\,x_3)\cos\nu i x_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{61}$$

Die Gravitationswellen (58), welche zu dem aus schiefen Bipyramiden aufgebauten Gitter gehören, schreiben sich, wenn die $a_{\varkappa\sigma}$ aus (36), (37), (38), (39) eingesetzt werden, im Falle $\varkappa = 1$, d. h. des im ersten Oktanten verlaufenden Strahls

$$\begin{cases} g_{11}^{(1)} = 0{,}940 + 0{,}030\,\alpha^{(1)}\cos\nu' 0{,}523\,(x_1 + x_2 + x_3)\cdot\cos\nu' i x_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{62}$$

1) P. Debye u. P. Scherrer, Physikal. Zeitschr. 18, S. 291. 1917.

und, im Falle der Strahl im zweiten Oktanten verläuft ($\varkappa = 2$):

$$(63)\quad \begin{cases} g_{11}^{(2)} = 0{,}940 \\ \quad -0{,}030\,\alpha^{(2)} \cos\nu' (-1{,}031\,x_1 + 0{,}968\,x_2 + 0{,}968\,x_3) \cos\nu' i x_4 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Das durch die Schnittpunkte der Knotenflächen von (61) und (62), (63) gegebene spezielle Gitter G möge mit G_1 bezeichnet werden.

Sei nun d die längste Diagonale des elementaren Rhomboeders. Dann entsteht aus G_1 ein neues Gitter, wenn in den Gravitationsfeldern (61), (62), (63) die Variablen x_1, x_2, x_3 ersetzt werden durch

$$(64)\qquad x_1 + \frac{d}{8\sqrt{3}}, \quad x_2 + \frac{d}{8\sqrt{3}}, \quad x_3 + \frac{d}{8\sqrt{3}}:$$

$$(65)\quad \begin{cases} g_{11}' = 0{,}940 \\ -0{,}060\,\alpha_{12} \cos\nu (0{,}174\,d - 0{,}031\,x_1 - 0{,}031\,x_2 + 0{,}968\,x_3) \cos\nu i x_4 \\ g_{12}' = -0{,}059 \\ -0{,}060\,\alpha_{12} \cos\nu (0{,}174\,d - 0{,}031\,x_1 - 0{,}031\,x_2 + 0{,}968\,x_3) \cos\nu i x_4 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ferner:

$$(66)\quad \begin{cases} g_{11}^{(1)} = 0{,}940 + 0{,}030\,\alpha^{(1)} \cos\nu' [0{,}302\,d + 0{,}523\,(x_1 + x_2 + x_3)] \\ \qquad\qquad \cdot \cos\nu' i x_4 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(67)\quad \begin{cases} g_{11}^{(2)} = 0{,}940 + 0{,}030\,\alpha^{(2)} \cos\nu' \\ \qquad [0{,}523\,d - 1{,}031\,x_1 + 0{,}968\,x_2 + 0{,}968\,x_3] \cos\nu' i x_4 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dies sind offenbar dieselben Wellen wie (61) bzw. (62), (63), nur mit einer jeweiligen Phasenverschiebung, die einer Parallelverschiebung des Gitters G_1 längs der Hauptdiagonale d des Elementarrhomboeders um $d/3$ entspricht. Das so entstandene, zu G_1 kongruente Gitter heiße G_2.

In einem elementaren Rhomboeder des Gitters G_1 wird nun die längste Diagonale AH (Fig. 5) durch zwei Flächen der zugehörigen Bipyramide, BCD und EFG, in 3 gleiche

Abschnitte $AA' = A'A'' = A''H$ geteilt. Bei der Verschiebung um $\frac{AH}{3} = AA'$ wird daher die Ebene BCD in EFG und überhaupt jede von den vier Scharen paralleler Knotenflächen, welche die Bipyramiden bilden, in die nächstfolgende ihr parallele übergeführt. Folglich liegen alle Bipyramidenecken von

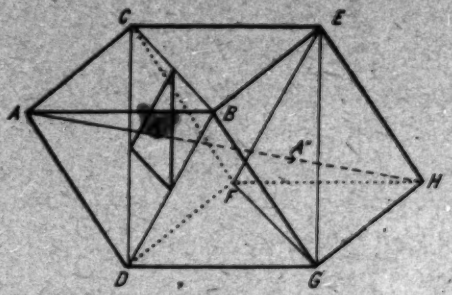


Fig. 5.

G_2 auf Bipyramidenflächen von G_1 und umgekehrt. Ferner fallen auch alle Rhomboederecken von G_1 auf Knotenebenen von G_1, z. B. A auf die Ebene BCD in $A' = \frac{AH}{3}$. Jede andere der Ecken B, C, D, E, F, G verfährt dasselbe in einem Nachbarrhomboeder.

Die beiden Gitter G_1, G_2 sind also einander wiederum derart gekoppelt, daß eine starre Verschiebung des einen gegen das andere rücktreibende quasielastische Kräfte weckt. G_1 und G_2 ergeben zusammen das von Debye und Scherrer[1]) gefundene Gitter des Graphits. Dasselbe läßt sich also stabil aus den Gravitationsfeldern (61), (62), (63), (65), (66), (67) aufbauen.

§ 6. Gitter des Diamants.

Bei dem von W. H. und W. L. Bragg[2]) festgestellten Gitter des Diamants gruppieren sich um ein C-Atom vier benachbarte in den Ecken je eines regulären Tetraeders. Die Mittelpunkte dieser Tetraeder fallen ihrerseits in die Ecken von Tetraedern, die den vorigen spiegelbildlich gleich sind (Fig. 6).

1) A. a. O.
2) W. H. u. W. L. Bragg, Ztschr. f. anorg. Chemie 90. S. 219. 1915.

Sei D der Abstand zwischen Ecke und gegenüberliegender Fläche eines solchen Tetraeders. Dann bilde man die Gravitationsfelder (42) mit einer Wellenlänge

$$\lambda'' = 2D, \tag{68}$$

also der Frequenz

$$\nu'' = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{D}: \tag{69}$$

$$\gamma_{11}^{(\varkappa)} = 2\alpha^{(\varkappa)} \cos \nu'' \mathfrak{r}_\varkappa \cos \nu'' i x_4, \ldots \quad (\varkappa = 1, 2, 3, 4). \tag{70}$$

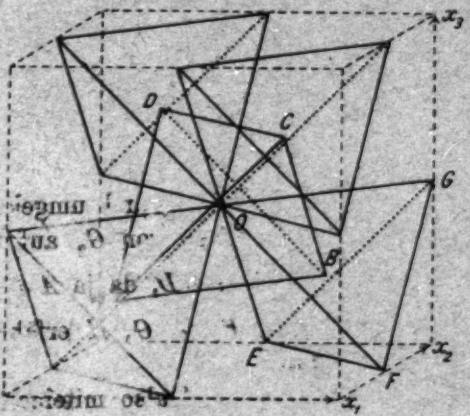


Fig. 6.

Die 4 Stahlvektoren fallen zusammen der Reihe nach mit $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ und diese mit den Symmetrielinien der 8 Oktanten des Koordinatensystems. Im Falle $\varkappa = 1,3$ werde diesen Wellen ferner eine Phasenverschiebung um $\frac{D}{4}$, im Falle $\varkappa = 2,4$ um $-\frac{D}{4} + \frac{\pi}{\nu''}$ erteilt, so daß sie lauten:

$$\begin{cases} \gamma_{11}^{(1)} = 2\alpha^{(1)} \cos \nu'' \left(\frac{D}{4} + \mathfrak{r}_1\right) \cos \nu'' i x_4, \ldots \\ \gamma_{11}^{(2)} = -2\alpha^{(2)} \cos \nu'' \left(-\frac{D}{4} + \mathfrak{r}_2\right) \cos \nu'' i x_4, \ldots \\ \gamma_{11}^{(3)} = 2\alpha^{(3)} \cos \nu'' \left(\frac{D}{4} + \mathfrak{r}_3\right) \cos \nu'' i x_4, \ldots \\ \gamma_{11}^{(4)} = -2\alpha^{(4)} \cos \nu'' \left(-\frac{D}{4} + \mathfrak{r}_4\right) \cos \nu'' i x_4, \ldots \end{cases} \tag{71}$$

Die vier Scharen von Knotenflächen

$$(72)\quad \begin{cases} \mathfrak{r}_1 = \frac{\lambda''}{2}(\frac{1}{4} + n), \quad \mathfrak{r}_2 = \frac{\lambda''}{2}(-\frac{1}{4} + n'), \\ \mathfrak{r}_3 = \frac{\lambda''}{2}(\frac{1}{4} + n''), \quad \mathfrak{r}_4 = \frac{\lambda''}{2}(-\frac{1}{4} + n''') \\ (n, n', n'', n''' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \end{cases}$$

umschließen, wenn

$$(73)\qquad n + n' + n'' + n''' = 0,$$

bei sonst beliebigen n, n', n'', n''' je ein elementares Tetraeder. Das Tetraeder $n = n' = n'' = n''' = 0$ hat den Koordinatenanfangspunkt 0 als Mittelpunkt (in Fig. 6 das Tetraeder A, B, C, D).

Nunmehr werde den Wellen (70) im Falle $\varkappa = 1,3$ eine Phasenverschiebung um $-\frac{D}{2}$, im Falle $\varkappa = 2,4$ um $3\frac{D}{2}$ erteilt, so daß sie lauten:

$$(74)\quad \begin{cases} \gamma_{11}^{(1)} = 2\alpha^{(1)} \cos \nu'' \left(-\frac{D}{2} + \mathfrak{r}_1\right) \cos \nu'' i x_4 \\ \qquad = -2\alpha^{(1)} \sin \nu'' \mathfrak{r}_1 \cos \nu'' i x_4, \ \ldots \\ \gamma_{11}^{(2)} = -2\alpha^{(2)} \cos \nu'' \left(\frac{D}{2} + \mathfrak{r}_2\right) \cos \nu'' i x_4 \\ \qquad = 2\alpha^{(2)} \sin \nu'' \mathfrak{r}_2 \cos \nu'' i x_4, \ \ldots \\ \gamma_{11}^{(3)} = 2\alpha^{(3)} \cos \nu'' \left(-\frac{D}{2} + \mathfrak{r}_3\right) \cos \nu'' i x_4 \\ \qquad = -2\alpha^{(3)} \sin \nu'' \mathfrak{r}_3 \cos \nu'' i x_4, \ \ldots \\ \gamma_{11}^{(4)} = -2\alpha^{(4)} \cos \nu'' \left(\frac{D}{2} + \mathfrak{r}_4\right) \cos \nu'' i x_4 \\ \qquad = 2\alpha^{(4)} \sin \nu'' \mathfrak{r}_4 \cos \nu'' i x_4, \ \ldots \end{cases}$$

Die Knotenebenen dieser Wellen

$$(75)\quad \mathfrak{r}_1 = \frac{\lambda''}{2} n, \ \mathfrak{r}_2 = \frac{\lambda'}{2} n', \ \mathfrak{r}_3 = \frac{\lambda''}{2}(-1 + n''), \ \mathfrak{r}_4 = \frac{\lambda''}{2} n'''$$

umschließen, wenn

$$(76)\qquad n + n' + n'' + n''' = 0$$

bei sonst beliebigen n, n', n'', n''' je ein elementares Tetraeder das dem zu (72) (73) gehörigen spiegelbildlich gleich ist, und dessen Ecken wieder stabile Gleichgewichtslagen für Atome

sind. Eine Ecke des Tetraeders $n = n' = n'' = n''' = 0$ (in Fig. 6 das Tetraeder O, E, F, G) fällt in den Koordinatenanfangspunkt.

Überhaupt sind die beiden aus den Tetraederecken von (72), (73) bzw. (75), (76) bestehenden Gitter derart ineinander gestellt, daß die Ecken von (75), (76) in die Mittelpunkte der Tetraeder von (72), (73) fallen und umgekehrt.

In den Tetraedermittelpunkten von (72), (73) verschwinden aber, wenn angenommen wird, daß

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha^{(3)} = \alpha^{(4)} = \alpha \tag{77}$$

ein Teil der Gravitationspotentiale. Z. B. ist im Koordinatenanfangspunkt 0, wo

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_4 = 0, \tag{78}$$

$$\sum_{(\lambda)} \gamma_{11}^{(\lambda)} = 2\alpha \left(\cos \nu'' \frac{D}{4} - \cos \nu'' \frac{D}{4} + \cos \nu'' \frac{D}{4} - \cos \nu'' \frac{D}{4} \right) \cos \nu'' i x_4 = 0, \tag{79}$$

$$\sum_{(\lambda)} \gamma_{22}^{(\lambda)} = 0, \tag{80}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\sigma} \sum_{(\lambda)} \gamma_{12}^{(\lambda)} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2), \tag{81}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\tau} \sum_{(\lambda)} \gamma_{\tau\tau}^{(\lambda)} = 0 \qquad (\tau = 1, 2). \tag{82}$$

Entsprechendes gilt in allen anderen Tetraedermittelpunkten, wo

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{\lambda''}{2} n, \quad \mathfrak{r}_2 = \frac{\lambda''}{2} n', \quad \mathfrak{r}_3 = \frac{\lambda''}{2} n'', \quad \mathfrak{r}_4 = \frac{\lambda''}{2} n''', \tag{83}$$

$$n + n' + n'' + n''' = 0.$$

Ferner erfährt ein im Mittelpunkt befindliches materielles Teilchen in jeder beliebigen Richtung einen Strahlungsdruck, der durch einen gleich großen aus der entgegengesetzten Richtung gerade aufgehoben wird. Denn die Komponenten des Strahlvektors[1])

$$\frac{4\varkappa}{i} \left(t_{4\sigma}^{(1)} + t_{4\sigma}^{(2)} + t_{4\sigma}^{(3)} + t_{4\sigma}^{(4)} \right) \qquad (\sigma = 1, 2, 3), \tag{84}$$

1) Vgl. hierzu die Bemerkungen über den Energiestrom am Schluß von § 2.

welche sich aus (48) ergeben, wenn darin $\frac{D}{4} + \tau_1$ anstatt τ_1 usw. geschrieben wird, sind nach (36), (37), (38), (39) im Punkte

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0, \tag{85}$$

für $\sigma = 1$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \nu''^2 \cos\nu'' i x_4 \sin\nu'' i x_4 \left\{\cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4} + \cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4} - \cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4} - \cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4}\right\} = 0, \tag{86}$$

für $\sigma = 2$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \nu''^2 \cos\nu'' i x_4 \sin\nu'' i x_4 \left\{\cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4} - \cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4} - \cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4} + \cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4}\right\} = 0, \tag{87}$$

für $\sigma = 3$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \nu''^2 \cos\nu'' i x_4 \sin\nu'' i x_4 \left\{\cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4} - \cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4} + \cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4} - \cos\nu'' \frac{D}{4} \sin\nu'' \frac{D}{4}\right\} = 0. \tag{88}$$

Ebenso verschwinden sie in allen anderen Tetraedermittelpunkten.

Es sind also auch die Mittelpunkte der Tetraeder (72), (73) stabile Gleichgewichtslagen für Atome.[1]) Dasselbe läßt sich auch für die Mittelpunkte der Tetraeder (75), (76) zeigen.

Mithin sind die beiden zugehörigen Gitter derart miteinander gekoppelt, daß bei gegenseitiger Verschiebung eine quasielastische Kraft überwunden werden muß.

Die Gravitationsfelder (71), (74) vermögen also das Gitter des Diamants im stabilen Gleichgewicht zu erhalten.

---

1) Vorausgesetzt, daß $T_{\mu\nu}$ durch $\sum_{(\lambda)} \gamma_{12}^{(\lambda)} \neq 0$ nicht beeinflußt wird; vgl. auch S. 553, Anm. 1.

Zusammenfassung.

Für jedes der nachfolgend gekennzeichneten Kristallgitter wird ein Gravitationsfeld angegeben, welches dasselbe im stabilen Gleichgewicht zu erhalten vermag:

1. Ecken und Mittelpunkt des Elementarwürfels mit Atomen besetzt.
2. Ecken und Flächenmitten des Elementarwürfels besetzt (Kupfer).
3. Ecken des Elementarparallelepipeds besetzt (Kalkspat?).
4. Ecken und Mittelpunkt des Elementarparallelepipeds besetzt.
5. Ecken und Flächenmitten des Elementarparallelepipeds besetzt.
6. Gitter des Graphits.
7. Gitter des Diamants.

Karlsruhe i. B., Physikal. Institut d. Techn. Hochschule.

(Eingegangen 9. August 1919.)

4. *Über die Messung der Dielektrizitätskonstante in der Wheatstoneschen Brücke bei Anwendung hoher Frequenzen;*

von Hans Joachim.

(Berliner Dissertation.)

A. Einleitung.

Die von Nernst[1]) angegebene Methode zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstante (D.K.) in der Wheatstoneschen Brücke ist von Nernst selbst[2]), sowie von Nernst und von Lerch[3]) für schnelle Schwingungen ausgearbeitet worden. In der ersten Arbeit wird ein Funkenmikrometer und eine Leuchtröhre in der zweiten eine Schlömilchzelle, in ihrer Wirkung als Detektor, als Wellenindikator angewandt. Im Anschluß an diese Arbeiten wurde dann von W. Hertwig[4]) eine Methode ausgeführt, in welcher die Wheatstonesche Brücke als Sekundärkreis auf einen Primärkreis abgestimmt war, während als Nullinstrument ein Bleiglanzgraphitdetektor verwandt wurde. Die vorliegende Arbeit ist als die Fortsetzung der Arbeiten Hertwigs zu betrachten.

Bei allen genannten Methoden geht das Bestreben dahin eine Konstruktion zur Bestimmung der D.K. ausfindig zu machen, in der die Wellenlängen der angewandten Schwingungen innerhalb weiter Grenzen bequem veränderlich ist. Die Wheatstonesche Brücke ist, wie M. Wien[5]) und Nernst[2]) bewiesen haben, bei beliebigen Schwingungszahlen anwendbar und deshalb ist die Nernstsche Methode, direkt Kapazitäten in der Brückenanordnung zu vergleichen, besonders geeignet auch für schnelle Schwingungen ausgearbeitet zu werden. Der Vorteil der Anwendung schneller Schwingungen ist ein mehrfacher.

1) W. Nernst, Zeitschr. f. Phys. Chem. **14**. S. 622 im folgenden mit I bezeichnet.

2) W. Nernst, Wied. Ann. **60**. S. 600. 1897.

3) Gött. Nachr. 1904, Heft 2; vgl. auch Ann. d. Phys. **15**. S. 836. 1904.

4) W. Hertwig, Ann. d. Phys. **42**. S. 1099. 1913.

5) M. Wien, Wied. Ann. **44**. S. 689. 1891.

Nach W. Nernst[1]) und M. Wien[2]) kann man die Wirkung eines Sinusstromes auf eine Flüssigkeitszelle als eine Kapazität mit hintergeschalteten Widerstand ansehen, wenn nicht die Polarisation störend wirkte, so daß der wahre Widerstand w auf $w' = w + \Delta w$ erhöht erscheint. Infolge der Polarisation wird auch die Kapazität einer Zelle C_1 auf

$$C_2 = C_1 \left(1 + \frac{1}{\nu^2 C_1 C_p w^2}\right)$$

vergrößert, worin C_p die sogen. Polarisationskapazität bei der Schwingungszahl ν ist, während w den spezifischen Widerstand bedeutet. Wie man sieht ist das Additionsglied um so kleiner, je größer ν ist, d. h. die scheinbare Kapazität C_2 ist um so näher der wahren Kapazität C_1, je höher die Schwingungszahl ist. Ferner ist der Verschiebungsstrom im Verhältnis zum Leitungsstrom eines Körpers um so größer, je höher die Frequenz des Stromes ist, es wäre also bei entsprechend schnellen Schwingungen möglich, die Leitfähigkeit von Elektrolyten zu eliminieren und sie dementsprechend als reine Isolatoren zu betrachten.

Die bequeme Veränderlichkeit der Wellenlänge ist aus folgenden Gründen für die Untersuchung der D.K. erstrebenswert: Nach der Maxwellschen Theorie ist das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle im leeren Raume c, zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit c' in einem Medium von der Dielektrizitätskonstante ε und der magnetischen Permeabilität μ, d. h. der Brechungsexponent der Welle n gleich $\sqrt{\varepsilon \mu}$. Da für die meisten Substanzen μ nahezu gleich 1 ist, wird also $n^2 = \varepsilon$. Die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge bezeichnet man als Dispersion, und zwar ist diese Dispersion sehr verschieden sowohl unter den einzelnen Substanzen, wie bei der gleichen Substanz innerhalb der einzelnen Frequenzbereiche. Diese letztere sogen. anomale Dispersion ist wie Harms[3]) bei Alkohol gezeigt hat, wegen ihrer Kleinheit nach Drudes Methode zur Messung der D.K. nicht genau zu bestimmen. Es ist aber aus später zu erörternden Gründen von hervorragendstem theoretischen In-

1) W. Nernst, Zeitschr. f. Phys. Chem. 14. S. 622. 1894.
2) M. Wien, Wied. Ann. 58. S. 37. 1896.
3) F. Harms, Ann. d. Phys. 5. S. 567. 1901.

teresse einen Apparat zu konstruieren, der eine bequeme Messung der D.K., wie in dem ursprünglichen Nernstschen Apparate (I), mit einer leichten Veränderlichkeit der verwendeten Wellenlängen vereinigt. Betont z. B. doch schon Abegg[1]), daß zur Messung der Temperaturabhängigkeit der D.K. der Nernstsche Apparat dem von Drude konstruierten überlegen ist.

B. I. **Schwingungserzeugung mit Funkenstrecke im Primärkreis.**

Wie schon erwähnt ist die folgende Arbeit als eine direkte Fortsetzung der Arbeit von W. Hertwig (im folgenden a. a. O. bezeichnet) anzusehen; es wurden deshalb zunächst einige Verbesserungen an dem dort beschriebenen Apparate vorgenommen. Im Sekundärkreis wurde der a. a. O. angegebene Detektor zeitweilig durch einen Karborunddetektor, der mir wegen der Kriegsverhältnisse nur zeitweilig zur Verfügung gestellt werden konnte, ersetzt, wie ihn die Technik der drahtlosen Telegraphie benutzt; dieser neue Apparat arbeitete regelmäßiger, doch mußte er später wieder durch den alten ersetzt werden.

Wie schon Nernst I erwähnt, ist auf die stets gleiche Stellung des Meßkondensators zwischen den Glasplattenkondensatoren genau zu achten; aus diesem Grunde erschien folgende Abänderung vorteilhaft: Eine Hartgummiplatte wurde so zwischen die Brückenkondensatoren eingepaßt, daß sie durch an den Rändern übergreifende Zähne stets in der gleichen Lage gehalten wurde. Auf dieser Platte wurde ein Messingring befestigt, der wie a. a. O. beschrieben stets in Verbindung mit den beiden vorderen Platten der Brückenkondensatoren stand. Der Meßtiegel wurde dann durch einen Zapfen mit Schraubengewinde in die Hartgummiplatte eingeschraubt, so daß er fest mit dem Messingring in Verbindung stand. Eine Störung durch schlechten Kontakt hat sich hierbei niemals gezeigt.

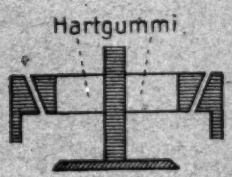


Fig. 1.

Um eine stets gleiche Entfernung der beiden Elektroden des Meßtiegels, d. h. also des Tiegelbodens und der durch einen Stift isoliert eingeführten Platte (vgl. I), zu gewährleisten, erwies sich folgende Änderung an dem Meßtiegel für vorteil-

1) R. Abegg, Wied. Ann. 60. S. 57. 1897.

haft: Die den Deckel bildende Hartgummiplatte wurde mit einem Metallring versehen, die, wie vorstehende Fig. 1 andeutet, abgeschrägt genau in den Tiegel hineingesetzt werden konnte.

Ferner erwies es sich als zweckmäßiger, den Kontakt des aus dem Tiegeldeckel herausragenden Stiftes nicht wie a. a. O. beschrieben durch zwei Federn mit den mittleren Platten des Kondensators herzustellen, sondern den Stift durch ein Kupferband an die jeweiligen von den Platten ausgehenden Kupferbänder anzulöten.

An den a. a. O. beschriebenen Apparaten des Primärkreises wurden folgende Änderungen vorgenommen: Die Funkenstrecke arbeitete nicht gleichmäßig und mußte deshalb in eine stabilere Form gebracht werden. Der Durchmesser der einander gegenüberstehenden Kupferblöcke wurde auf 2 cm vergrößert. Der eine Block blieb auch hier wieder feststehend, während der andere sich in einem festen Rahmen bewegen ließ; außerdem war er durch ein Kugellager befähigt, sich dem feststehenden Blocke genau parallel zu stellen; durch eine Feder wurde dann der Block in dieser Stellung festgehalten, so daß bei einer Entfernung von einander zur Einstellung der Funkenlänge die Flächen, welche auf einander abgeschliffen waren, stets parallel blieben. Hierdurch wurde ein sicheres Überspringen der Funken auf der ganzen Ebene gewährleistet. Diese Funkenstrecke arbeitete, wenn sie nicht zu lange hintereinander betrieben wurde, so daß sich zu starke Oxydschichten auf den Flächen bildeten, stets gleichmäßig. Die Entfernung der Oxydschichten konnte leicht durch Abreiben mit feinem Schmirgelpapier erfolgen.

Grundlegender waren die Änderungen, die in der Schwingungserzeugung vorgenommen werden mußten. Wie a. a. O. beschrieben bestand der Primärkreis aus einem Drehkondensator, einer Selbstinduktion und einer Funkenstrecke, die durch ein Induktorium mit Deprezunterbrecher betrieben wurde. Bekanntlich enthält nun ein Induktorium außer den Spulen mit dem Eisenkern und der Stromunterbrechungsstelle noch einen Kondensator, um die durch die Selbstinduktion bei Unterbrechung des Stromes an der Unterbrechungsstelle erzeugte hohe Spannung herabzusetzen. Es bildet also die Primärspule

mit dem Fizeaukondensator und der Funkenstrecke des Unterbrechers zusammen einen Schwingungskreis. Die von diesem Schwingungskreis ausgesandten Wellen wirkten direkt auf die Zuleitungsbänder des Detektors und störten infolgedessen das Minimum der Brückeneinstellung. Es wurde deshalb das Induktorium in etwa 5 m Entfernung gebracht und so aufgestellt, daß die die Enden des Eisenkernes schließenden Kraftlinien nicht das Brückensystem beeinflussen konnten.

Ferner hat es sich bei Messungen mit elektrischen Wellen, wie schon Drude[1]) gezeigt hat, als vorteilhaft herausgestellt einen Tesla-Transformator einzuschalten. Es wurde deshalb folgende Anordnung gewählt: Die Sekundärspule des Induktoriums erregt einen Schwingungskreis bestehend aus der dickdrähtigen Primärspule des Tesla-Transformators, 2 Leydener Flaschen und einer Funkenstrecke. Zeitweise wurde dieser Funkenstrecke auch eine zweite parallel gelegt. Die Sekundärspule des Transformators führte dann zu einem Drehkondensator und einer Selbstinduktionsspule, mit welcher der Brückenmeßkreis gekoppelt war.

Bei dieser Schaltung war ein absolutes Minimum in der Nullstellung der Brücke vorhanden; die Schärfe des Minimums war so groß, daß bequem auf $^1/_{10}$ mm genau eingestellt werden konnte, wie folgende beliebig herausgegriffene Beobachtungsreihen beweisen mögen:

72,8	72,8	72,8	72,8	72,8	Max.-Diff.	0,0 mm.	
60,2	60,2	60,2	60,3	60,1	60,3	60,2	60,2 Max.-Diff. v. Mittel 0,1 mm.
108,4	108,5	108,4	108,5	108,5	108,4	108,5	108,5 Max.-Diff. v. Mittel 0,05 mm.

Die in diesem Schwingungskreis erzeugten Wellen sind gedämpfte, d. h. die Amplituden der Schwingungen nehmen allmählich ab. Die Ursache dieser Dämpfung ist eine zweifache: Erstens wird sie bedingt durch den Widerstand w des Kreises und zweitens durch die Funkendämpfung. Die erste ist aus der allgemeinen Schwingungsgleichung zu berechnen und zwar ist das Dämpfungsverhältnis zweier Amplituden

$$\frac{i_1}{i_2} = e^{\frac{wT}{2L}},$$

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 8. S. 336. 1902.

wenn i_1 und i_2 zwei auf einander folgende Maximalwerte des Stromes oder der Spannung bedeuten, e die Basis der natürlichen Logarithmen, T die Periodendauer der Schwingung, L die Selbstinduktion. Da

$$\log i_1 - \log i_2 \text{ gleich } \frac{w\,T}{2\,L} = \mathfrak{d}$$

ist, so bedeutet $\mathfrak{d}$ das logarithmische Dekrement der Schwingung. Es ist also der Schwingungsvorgang in einem Kondensatorkreis ohne Funkenstrecke hierdurch vollständig bestimmt. Anders aber bei einem Schwingungskreis mit Funkenstrecke. Die durch die Funken hervorgerufene Dämpfung verläuft nicht exponential, sondern nahezu linear. Daraus folgt, daß das Verhältnis der Amplituden am Anfang und Ende einer Periode nicht mehr für alle Perioden konstant ist, wenn man auch angenähert von einem dem Funken äquivalenten Widerstand dem sogen. „Funkenwiderstand“ sprechen kann; allerdings muß dann auch nur mit einem Mittelwert der Perioden gerechnet werden. Da also bei einem Kondensatorkreis mit Funkenstrecke die Amplitude der Schwingung, weil sie keine reine Exponentialkurve darstellt nicht gleichmäßig veränderlich ist, so ist auch im Sekundärkreis die Frequenz der Schwingungen nicht konstant. Viel günstiger würde man mit ungedämpften Wellen arbeiten, wo ja die Amplitudenkurve eine Gerade, das logarithmische Dekrement Null ist.

II. Die Schwingungserzeugung mit dem Röhrensender.

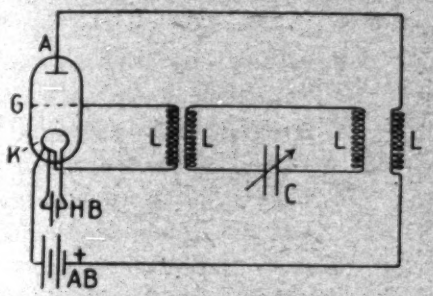
Bis vor kurzer Zeit war man zur Erzeugung ungedämpfter Wellen auf die Lichtbogenmethode nach Poulsen angewiesen. Doch, wie schon a. a. O. erwähnt, arbeitet diese Anordnung nicht konstant, so daß leicht Schwankungen der Frequenz vorkommen können, auch können die Oberschwingungen höherer Frequenz störend auftreten. Es ist deshalb von unschätzbarem Vorteil in dem Röhrensender[1]) einen Apparat zu haben, der völlig konstante ungedämpfte Wellen aussendet. Der Röhrensender benutzt zur Erzeugung der Schwingungen die Kathodenröhre. Diese besteht aus einem völlig luftleer gepumpten Glasgefäß, in welches drei Elektroden münden. Erstens die

1) Vgl. hierzu die schöne Darstellung v. A. Meißner, Elektr. Ztschr. 1919. Heft 7—8.

Glühkathode K (vgl. Fig. 2), zweitens die Anode A, drittens das Gitter G. Die Glühkathode wird durch eine Heizbatterie auf Weißglut erhitzt und sendet infolgedessen, da die Röhre luftleer ist, Elektronen aus. Zwischen der Anode und der Glühkathode liegt eine Batterie, die sogen. Anodenbatterie, so daß also die Anode, die Batterie, die Kathode und die Vakuumstrecke einen Stromkreis, den sogen. Anodenkreis, bilden, da ja die von der Glühkathode ausgehenden Elektronen durch ihren Übergang zur Anode einen Gleichstrom herstellen. Die zwischen der Kathode und der Anode liegende Gitterelektrode wird je nach der Spannung, die sie gegen die Glühkathode besitzt (Gitterspannung), die von der Kathode zur Anode strömenden Elektronen entweder beschleunigen oder aufhalten, somit den Anodenstrom entweder erhöhen oder erniedrigen können. Ist die Gitterspannung stark negativ, so werden überhaupt keine Elektronen durch das Gitter zur Anode hindurchwandern, ist sie stark positiv, so kann der „Sättigungsstromwert" der Röhre erreicht werden. Da nun alle Vorgänge in der Röhre, wenigstens bei den Frequenzen der elektrischen Wellen infolge der verschwindenden Masse der Elektronen trägheitlos verlaufen, so vermag der Elektronenstrom den kleinsten Schwankungen der Gitterspannung zu folgen. Wird also an das Gitter eine Wechselspannung angelegt, so wird auch an der Anode eine Wechselspannung erzeugt werden, oder genauer ein Gleichstrom, dem ein Wechselstrom überlagert ist. Dieser an der Anode entstehende Wechselstrom besitzt die gleiche Frequenz wie der am Gitter liegende, doch ist die Amplitude bedeutend vergrößert und kann sich bis zum Sättigungsstromwert der Röhre vermehren.

Es genügen Gitterspannungen von wenigen Volt, um Stromschwankungen von einem Milliampère im Anodenstrom zu erzeugen, und da außerdem die Kapazität des Systems, Gitter-Glühkathode-Zuleitungsdrähte zum Gitter, außerordentlich klein ist, so bedarf es nur ganz schwacher Stromänderungen um Spannungsschwankungen in der Röhre zu erzeugen. Aus diesem Grunde sind die Kathodenröhren zur Verstärkung schwacher Empfangsströme, aber auch als Sender für elektrische Wellen zu verwenden. In diesem letzteren Falle wird ein Stromstoß, wie er bei der Schließung eines Gleichstromes

entsteht auf einen aus einer Kapazität und Selbstinduktion bestehenden Schwingungskreis übertragen (vgl. Fig. 2). Der Schwingungskreis wird hierdurch zu Eigenschwingungen angeregt, und ist er nun mit dem Gitterstromkreis gekoppelt, so werden diese Eigenschwingungen auf das Gitter übertragen. Es wird also infolgedessen, wie oben auseinandergesetzt auch im Anodenkreis sich ein verstärkter Schwingungsvorgang abspielen. Liegt nun der erste Schwingungskreis selbst im



A Anode
G Gitter
K Glühkathode
C Drehplattenkondensator
L Selbstinduktionsspulen
HB Heizbatterie
AB Anodenbatterie

Fig. 2.

Anodenkreis, so werden auf jenen die verstärkten Schwingungen übertragen, der sie auf den gekoppelten Gitterkreis verstärkt überträgt und so fort, bis der Sättigungsstromwert der Röhre erreicht ist. In der technischen Ausführung liegt der zuerst angeregte Schwingungskreis nicht direkt im Anodenkreise, sondern ist durch eine Spule mit diesem gekoppelt. Um den Sättigungsstromwert der Röhre zu erhöhen, liegt der Kathodenröhre eine zweite parallel, so daß die von der ersten Röhre vergrößerte Amplitude von der zweiten Röhre noch einmal um den gleichen Betrag vergrößert wird. Zur Veränderung der Wellenlänge liegen zwei Möglichkeiten vor: Die Vergrößerung der Kapazität des Schwingungskreises oder die Änderung der Selbstinduktion des Gitter- bzw. Anodenkreises. Da nun hiermit auch eine Änderung der Koppelung verbunden ist, und die Leistungsfähigkeit der Röhre stark von den Koppelungsverhältnissen abhängt, ist man genötigt für jede Röhre jeweilig die geeigneten Koppelungskoeffizienten festzustellen.[1])

1) Vgl. hierzu besonders A. Meißner, Elektrotech. Zeitschr. 1919. Heft 7—8.

Die Vorteile dieser Methode zur Erzeugung elektrischer Wellen sind folgende: Die Amplitude ist absolut konstant, die Wellen sind also völlig ungedämpft, der Frequenzbereich ist bequem veränderlich und reicht fast unbegrenzt von den langsamsten Wechselzahlen bis zu Wellenlängen von einigen Metern. Auch die völlige Geräuschlosigkeit im Gegensatz zu der Schwingungserzeugung mit Funkenstrecke ist für Messungen, bei denen es auf eine Lautlosigkeit des Telephons ankommt, von nicht zu unterschätzendem Vorteil. Als deshalb auf Vorschlag von Herrn Professor Nernst diese Art der Schwingungserzeugung für die vorliegende Arbeit ausprobiert werden sollte, war es dankbarst zu begrüßen, daß die Gesellschaft für drahtlose Telegraphie (Telefunken) eins ihrer zu großer technischer Vollkommenheit durchgearbeiteten Sendermodelle bereitwillig zur Verfügung stellte; es sei mir gestattet, an dieser Stelle besonders Herrn Dr. Meißner hierfür meinen Dank auszusprechen. Der entliehene Apparat hatte die kleinste Form eines Röhrensenders und besaß einen Wellenbereich von 200 bis 1500 m. Als Heizbatterie brauchte er drei Akkumulatoren, zusammen 6 Volt; als Anodenbatterien wurde die Lichtleitung von 110 Volt benutzt. Die Änderung der Frequenz erfolgt zunächst in weiten Grenzen durch Änderung der Selbstinduktion, indem die Lage zweier Spulen bis zu festliegenden Punkten gegeneinander verändert wird. Die genaue Einstellung erfolgt innerhalb dieser Punkte durch Änderung der Kapazität an einem größeren Drehkondensator; für Abstimmzwecke ist noch eine ganz feine Variation durch Einstellung eines kleineren Drehplattenkondensators möglich. In den später ausgeführten Messungen ist stets nur mit einer Wellenlänge von etwa 300 m gearbeitet worden.

III. Der Empfänger für ungedämpfte Wellen.

Um die von dem Röhrensender ausgesandten Wellen hörbar zu machen, ist man gezwungen, von den bisher üblichen Apparaten abzuweichen. Zunächst ist es klar, daß Wellen von 300 m Länge, d. h. 10^8 Wechsel pro Sekunde, weit außerhalb der dem Ohre vernehmlichen Schwingungszahlen liegen. Doch ist es auch nicht möglich, die Wellen durch einen Detektor hörbar zu machen. Alle Detektoren, ob in der elektrolytischen Zelle oder als Kristalldetektor, sprechen auf einen Impuls an,

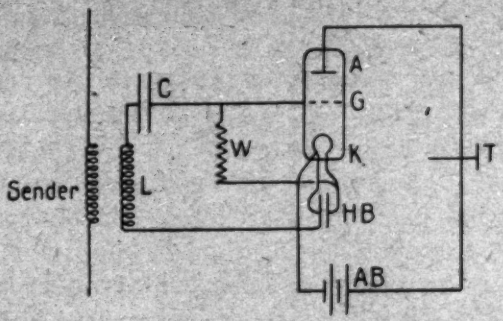
summieren die von dem Impuls des Funkens ausgehenden Wellen und machen sie dem Ohre durch das Telephon hörbar. Detektoren sind also ohne weiteres verwendbar, wenn Funkenstrecken in dem Schwingungskreise liegen, wo jeder Funke einen neuen Impuls zu einem neuen Wellenzuge gibt. Anders liegt es bei einem Röhrensender, der einen gleichbleibenden Zug ungedämpfter Wellen aussendet.

Es bleiben drei Wege gangbar, um den Empfang der Wellen bewerkstelligen zu können: 1. Die Überlagerung, 2. das Audion, 3. der Schleifer.

Der Empfang durch Überlagerung beruht auf dem Prinzip der Interferenz. In der Akustik ergeben zwei Töne von gleicher Intensität, aber nur wenig verschiedener Schwingungszahl Schwebungen, d. h. man hört eine Tonwelle, deren Schwingungszahl gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Einzeltöne und deren Amplitude durch die Differenz der Schwingungszahlen bestimmt wird; die Amplitude ist um so länger, je weniger die beiden Töne sich voneinander unterscheiden. Nach diesem Prinzip kann man den ausgesandten elektrischen Wellen mit einem zweiten Röhrensender Schwingungen von ein wenig höherer oder niederer Frequenz überlagern, so daß Schwebungen entstehen, deren Häufigkeit klein genug ist, daß das Ohr sie im Telephon als beliebig hohen Ton hören kann. Diese Methode wurde jedoch nicht angewandt, weil ein zweiter Röhrensender, der als Überlagerer hätte dienen können, zurzeit nicht zur Verfügung stand, und weil ferner diese Methode überaus empfindlich ist; da die Messung in der Wheatstoneschen Brücke ja eine Nullmethode ist, so hätten minimale Kapazitätsänderungen, wie sie durch Äußerlichkeiten bedingt werden können, störend auf die Nullstellung wirken können. Doch ist es fraglos, daß diese Methode zur Bestimmung der sehr kleinen D.K. von Gasen eine Genauigkeit ergeben würde, wie sie wohl von keiner anderen Methode bis jetzt erreicht wird. Erwähnt sei, daß die schließlich angewendete, für die Messungen ausreichende Empfangsmethode an Empfindlichkeit nur den 1500. Teil leistet.

Dieselbe Überlagerungsmethode kann ebenso gut im Empfänger erfolgen. Am besten ist es dann, als Detektor auch eine Kathodenröhre in der sog. Audionschaltung zu verwenden.

Das Audion beruht auf folgenden Prinzipien: Der von der Glühkathode zum Gitter fließende Elektronenstrom lädt einen mit letzterem verbundenen Kondensator *C* auf, indem die eine mit dem Gitter verbundene Belegung negativ, die andere durch Influenz positiv wird.



A Anode
G Gitter
K Glühkathode
C Kapazität
L Selbstinduktion
T Telephon
HB Heizbatterie
AB Anodenbatterie

Fig. 3.

Der Kondensator *C* ist aber zugleich mit dem empfangenden Schwingungskreis gekoppelt, von dem seine Belegungen abwechselnd positiv und negativ geladen werden. Wird nun z. B. die linke Seite (vgl. Fig. 3) positiv geladen, so wird die rechte durch Influenz negativ, es strömt also positive Elektrizität vom Kondensator in das Gitter. Der Elektronenstrom von der Glühkathode zur Anode wird also beschleunigt. Wird die linksseitige Belegung durch den Stromwechsel negativ geladen, so fließt entsprechend negative Influenzelektrizität in das Gitter, der Anodenstrom wird geschwächt. Durch die fortdauernden Wechsel steigt die negative Spannung des Gitters, es muß deshalb der Gitterkreis gleichzeitig durch einen hohen Widerstand geschlossen werden, so daß die negative Gitterladung während der Zeit zwischen zwei Wechseln abfließen kann. Es werden jetzt in einem im Anodenkreise liegenden Telephon genau wie bei einem Detektor Impulse gedämpfter Wellen hörbar werden. Die Kathodenröhre wirkt also bei dieser Schaltung wie ein Detektor, nur daß sie außerdem die Schwingungen verstärkt.

Wenn man die im Anodenkreis auftretenden Schwingungen nochmals mit den im Gitterkreis befindlichen zurückkoppelt, so werden die Schwingungen nicht nur noch weiter verstärkt werden, sondern es ist durch geeignete Kapazitätsänderungen

im Anodenkreise möglich, den Wellen im Gitterkreise solche etwas anderer Frequenz zu überlagern und so Schwebungen hervorzurufen, die im Telephon hörbar sind. In dieser Audionschaltung mit Rückkoppelung dient die Kathodenröhre also gleichzeitig als Detektor, Verstärker und Überlagerer. Auch diese Empfangsmethode ist aus äußeren Gründen noch nicht für die Zwecke der vorliegenden Arbeit durchgebildet worden.

Als dritte Möglichkeit, ungedämpfte Wellen hörbar zu machen, bleibt, die Schwingungen zu unterbrechen und die einzelnen Unterbrechungen in einer so langsamen Folge geschehen zu lassen, daß das Ohr für sie empfänglich wird. Dieses kann man bekanntlich schon ganz roh erreichen, wenn man einen Draht über eine Feile gleiten läßt, so daß also der Stromschluß nur an den Spitzen der Feile erfolgt. Auf dem gleichen Prinzip beruht der Schleifer, der auch von Telefunken für die vorliegende Arbeit freundlichst zur Verfügung gestellt wurde. In dem Schleifer wird als Stromunterbrecher durch ein Uhrwerk ein ganz feines Zahnrad an einer Feder vorbeigeführt, das Telephon liegt parallel der Unterbrechungsstelle. Der Schleifer arbeitete während der ganzen Zeit überaus regelmäßig. Der Gang des Uhrwerks blieb bei jeder Federspannung völlig gleich. Ein Detektor ist hierbei nicht mehr nötig, da die Unterbrechungen schnell genug hintereinander erfolgen, so daß im Telephon ein Rauschen hörbar ist, welches in seiner Intensität natürlich stark von der Intensität der Schwingungen des Senders abhängt. Erwähnt sei noch, daß der Gang des Uhrwerks bequem durch einen Sperrhaken unterbrochen werden kann.

Es ergab sich nunmehr folgendes Schaltbild: Der Primärkreis wurde durch den von Telefunken gelieferten Röhrensender ersetzt, damit gekoppelt lag der a. a. O. beschriebene Brückenkreis. An Stelle des Detektors kam der Schleifer, dem parallel das Telephon liegt. Die hiermit im Brückenkreise vorgenommenen Messungen ermöglichten zunächst eine Einstellung des Nullpunktes bis auf 1 mm. Das Minimum war also im Verhältnis zu der mit Teslafunken im Primärkreise erzeugten Schwingungsmethode ziemlich breit. Durch Parallelschalten einer dritten Kathodenröhre konnte das Minimum auf 0,6 mm eingeengt werden. Eine weitgehende Verbesserung wurde aber erzielt,

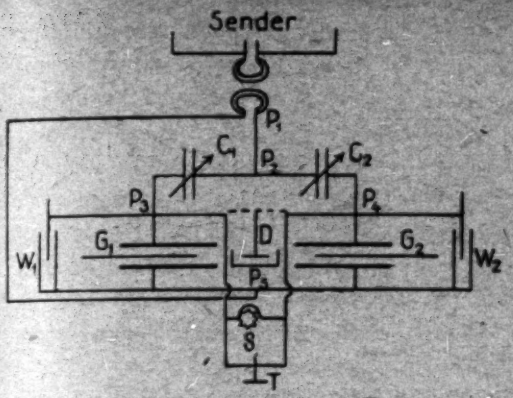
als an Stelle der bis dahin verwendeten Doppelkondensatoren die ursprünglich von Nernst in I. angegebenen Glasplattenkondensatoren wieder eingeführt wurden. Bei den bis dahin gebräuchlichen Methoden zur Erzeugung schneller Schwingungen mußten, wie schon Nernst[1]) erwähnt, dickere Glasplatten eingeführt werden, damit keine Funken zwischen den Kondensatorbelegungen überspringen können. Eine derartige Funkenbildung ist aber bei dem Röhrensender ausgeschlossen, und man kann deshalb zu der ursprünglichen Meßbrücke, deren Glasplatten nur 1,1 mm stark sind, gegen 3,3 bei den bis dahin benutzten, zurückkehren.

Da diese Anordnung weniger Intensität verbraucht, wurde eine Empfindlichkeit der Einstellung erzielt, die der anfangs erwähnten Methode mit gedämpften Wellen fast gleich kam. Besonders als ein bedeutend empfindlicheres Telephon in Anwendung gebracht wurde. Während bis dahin nämlich ein gewöhnliches Posttelephon von etwa 300 Ω Widerstand benutzt wurde, ist das neue ein von Telefunken für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie konstruiertes von 4000 Ω, also bedeutend empfindlicher; als Zeichen dafür möge gelten, daß man den kleinen Stromstoß, der bei Lösung oder Herstellung eines Kontaktes entsteht, als starkes Knacken hören kann.

In der a. a. O. beschriebenen Schaltung waren alle vier Zweige der Wheatstoneschen Brücke durch Glasplattenkondensatoren gebildet, von denen je zwei eine Metallplatte gemeinsam hatten. Die von Nernst in I. angegebene Schaltung zeigt nur einen Glasplattenkondensator auf beiden Seiten der Brücke, während die beiden anderen Zweige dort durch zwei Elektrolytwiderstände gebildet werden. Es wurde also zunächst versucht, die gleiche Schaltung auf die vorliegende Meßmethode anzuwenden, doch zeigte es sich, daß die Elektrolyten zu viel Energie verbrauchten und das Minimum infolgedessen außerordentlich flach wurde. Es wurden daher statt der Widerstände zwei Drehplattenkondensatoren als Brückenzweige eingeführt. Die Größe der Kapazitäten wurde so eingestellt, daß alle vier Zweige nahezu einander gleich waren. Es ergibt sich somit folgendes Schaltungsschema:

---

1) W. Nernst, Wied. Ann. 60. S. 600. 1897



C_1, C_2 Drehplattenkondensatoren
G_1, G_2 Glasplattenkondensatoren
W_1, W_2 Kompensationswiderstände
D Meßtiegel
T Telephon
P_1—P_5 Verzweigungspunkte
S Schleifer

Fig. 4.

Der Meßtiegel D ist, wie von Nernst in I angegeben für Messung von kleineren D.K., ein Nickeltiegel, für größere wurde wieder ein Platintiegel benutzt. D steht mit den vorderen Metallplatten in der Meßbrücke bei P_5 in dauerndem Kontakt, die zweite Elektrode wird abwechselnd mit den beiden hinteren Metallplatten bei P_3 oder P_4 verbunden, so daß also die Kapazität der zu untersuchenden Substanz abwechselnd der rechten oder der linken Meßbrücke parallel liegt. Als Kompensationswiderstände für Flüssigkeiten mit größerem Leitvermögen dienten auch wiederum die von Nernst in I beschriebenen mit Manganinischer Lösung beschickten Elektrolytwiderstände W_1 und W_2.

Bei der Bestimmung der D.K. des Wassers, die ja sehr hoch ist und deshalb im Platintiegel erfolgen mußte, trat eine Schwierigkeit auf, die zu einer kleinen Abänderung der Schaltung führte. Der in den Platintiegel hineinragende Stift sowie die daran befindliche zweite Elektrode waren aus Silber gefertigt. Infolge der Verschiedenheit der Elektroden traten Extraströme auf, der Meßtiegel wirkte als galvanisches Element. Diese Ströme wurden auch durch den Schleifer unterbrochen und waren infolgedessen im Telephon hörbar. Eine Nulleinstellung der Brücke war nun nicht mehr möglich, da ja in dem einen Brückenzweige außer der zu messenden Kapazität noch ein Element lag. Es lag nun nahe, den Schleifer vor die Meßbrücke zu legen, z. B. zwischen P_1 und P_2, während das Telephon als Nullinstrument zwischen P_3 und P_4

liegen blieb. So geht ein stetig unterbrochener Zug ungedämpfter Wellen durch die Brücke, der im Telephon hörbar ist, während der im Meßtiegel entstehende Gleichstrom nicht mehr unterbrochen wurde und deshalb die Messung nicht stören konnte. Hierbei trat jedoch eine neue Schwierigkeit auf; sobald nämlich die Kompensationswiderstände angeschaltet wurden, war eine Nulleinstellung der Brücke nicht mehr möglich. Ein Extrastrom konnte nicht mehr die Ursache sein, denn diese Erscheinung zeigte sich auch, als der Meßtiegel nicht in der Brücke lag. Vielmehr müssen Vorgänge in den Elektrolyten auftreten, die eine Messung verhindern.

Wie schon eingangs erwähnt, kann man einen Elektrolyten auffassen als metallischen Widerstand mit hintergeschalteter Kapazität, sofern keine Polarisationserscheinungen auftreten. Diese bringen nun aber auch eine Phasenverschiebung hervor, die umgekehrt proportional der Zahl der Wechsel ist. Nun werden die von dem Schleifer ausgehenden unterbrochenen einzelnen Wellenzüge als bedeutend langsamere Impulse auf die Elektrolyten wirken, als die von der anderen Elektrode ausgehenden ungedämpften Wellen. Es werden also zwei verschiedene Frequenzen sich in den Flüssigkeitswiderständen überlagern, die auch eine verschiedene Phasenverschiebung ausüben und infolgedessen keine Stromlosigkeit in der Brücke zulassen.

Es mußte deshalb ein anderes Mittel gefunden werden, um den auftretenden Extrastrom zu eliminieren. Es wurde der Schleifer wieder zwischen P_3 und P_4 gelegt und auf Vorschlag von Prof. Nernst, zwischen den Meßtiegel und den Verzweigungspunkt P_5 eine Kapazität von 2000 cm in Gestalt eines kleinen Glimmerkondensators gelegt. Der ohnehin sehr schwache Extrastrom lud dann wohl diesen Kondensator auf, doch konnte er nicht mehr störend auf die Nulleinstellung wirken.

IV. Messungen.

A. Flüssigkeiten.

Die mit dem Apparat ausgeführten Messungen erstreckten sich nur auf die Bestimmung der D.K. schon gemessener Substanzen zur Kontrolle der Methode. Leider erlaubten es die augenblicklichen Verhältnisse nicht, für alle Messungen genügend

reine Substanzen zu erhalten. Die Messung selbst erfolgt genau in der gleichen Weise, wie bei der von Nernst in I angegebenen Methode. Der Meßtiegel wird mit Luft, mit einer Eichsubstanz und mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt an den rechten und an den linken Glasplattenkondensator gelegt, die rechte Glasplatte ist bis zum völligen Schweigen des Telephons heraus- bzw. hineinzuschieben. Bedeutet s_0 die Hälfte der Glasplattenverschiebung, wenn der Meßtiegel rechts und links ausgeschaltet wurde, mit Luft gefüllt, s_e gefüllt mit Eichsubstanz, s_u mit der zu untersuchenden Substanz, so berechnet sich die gesuchte D.K., bezeichnet D_u, aus der Formel:

$$D_u = (D_e - 1)\frac{s_u - s_0}{s_e - s_0} + 1,$$

wenn D_e die D.K. der Eichsubstanz ist. Die Schärfe der Nulleinstellung ist aus folgenden Tabellen ersichtlich.

Luftgefüllt		Chloroform		Äthylenchlorid		Toluol	
51,8	34,5	19,9	78,0	124,6	11,5	59,7	29,7
51,8	34,5	20,1	78,2	124,8	11,6	59,9	29,9
51,7	34,2	20,1	78,0	124,7	11,4	59,7	29,9
51,5	34,5	20,1	77,9	124,3	11,7	59,7	29,8
51,8	34,6	19,7	78,0	124,5	11,3	59,8	29,7
51,8	34,5	19,8	78,1	124,8	11,5	59,6	29,7
51,5	34,4	20,0	78,0	124,8	11,5	59,7	29,7
51,7	34,6	20,1	78,1	124,8	11,7	59,6	29,8
51,6	34,5	20,0	77,9	124,5	11,5	59,7	29,7
51,8	34,6	19,8	78,0	124,3	11,6	59,8	29,8
51,70	34,49	19,96	78,03	124,61	11,53	59,72	29,77

Die Einstellungen wurden nach der von Nernst in I angegebenen Methode derart gemacht, daß das Mittel aus den Verschiebungen der Glasplatte genommen wurde, bei denen ein erstes Anschwellen des Tones bemerkbar wurde, doch war die Lautlosigkeit in der Nullstellung derartig vollkommen, daß eine mit geschlossenen Augen vorgenommene Einstellung ebenso sicher ausführbar war. Wie man sieht, ist die Schärfe nicht ganz so groß, wie bei den gedämpften Wellen, doch ist die Abweichung vom Mittelwert nirgends größer als 0,2 mm, was bei so geringen Verschiebungen wie bei Toluol nur 0,4 Proz. ausmacht. Die Schärfe des Minimums ist überaus von der Stärke des Heizstromes der Glühkathode abhängig. Sobald

z. B. der Heizstrom statt auf 6 Volt auf 5,8 Volt durch Entladung der Akkumulatoren gesunken war, wurde das Minimum sofort bedeutend breiter; es ist deshalb auf eine ausreichende Stärke des Heizstromes sorgfältig zu achten. Frisch geladene Akkumulatoren ermöglichen eine Genauigkeit der Einstellung auf 0,1 mm im Mittel zu erreichen. Wie auch schon Nernst in I erwähnt, ist die Körperhaltung stets gleich zu bewahren. Denn die Annäherung oder Entfernung der Hand ergibt schon eine Differenz der Nullstellung von etwa 0,3 mm.

Im Nickeltiegel wurde die D.K. folgender Substanzen bestimmt:

Äther (als Eichsubstanz) mit Natrium getrocknet,
Toluol mit Natrium getrocknet,
Chloroform chemisch rein (D. A. B. 4),
o-Xylol chemisch rein,
Anilin mit Natrium getrocknet,
Äthylenchlorid.

Bei allen sechs Substanzen war eine Widerstandskompensation völlig unnötig; das Minimum war ganz lautlos, eine Leitfähigkeit war bei den angewandten Schwingungszahlen (= 300 m) also nicht mehr vorhanden.

Mit dem Platintiegel wurden gemessen:

Leitfähigkeitswasser,
Äthylalkohol abs. über Kalk dest.
Methylalkohol chemisch rein,
Isobutylalkohol „ „
Aceton frisch destilliert,
Nitrobenzol (aus krist. Benzol).

Letzteres als Eichsubstanz. Eine Widerstandskompensation war nur bei Nitrobenzol überflüssig; sie erfolgte stets mit der breiten Platinelektrode der von Nernst in I beschriebenen Form, da die Änderung der Kapazität bei einer Widerstandsänderung mit dieser bedeutend geringer ist, als bei den Platindrahtelektroden. Die Einstellung auf Lautlosigkeit ist bei Messungen mit Widerstandskompensation genau so scharf, wie ohne diese, wie folgende Tabelle beweisen mag.

Wasser		Methylalkohol	
127,0	1,3	96,7	36,1
126,8	1,6	96,8	36,5
126,8	1,5	97,0	36,2
127,0	1,3	97,2	36,0
127,1	1,3	97,0	36,0
126,7	1,3	97,0	36,0
127,0	1,4	97,2	36,2
126,9	1,4	97,0	36,4
126,8	1,3	97,1	36,0
127,0	1,4	97,0	36,2
126,91	1,38	97,00	36,16

Wie Nernst (I, S. 647) erwähnt, ist bei den dort verwendeten langsamen Schwingungen die Korrektion infolge der Kondensatorwirkung der Kompensationswiderstände zu vernachlässigen; das Verhältnis der Kapazität des dielektrischen Troges und der Widerstände ist umgekehrt proportional der spezifischen galvanischen Leitfähigkeit und direkt der D.K. der Flüssigkeiten. Hieraus berechnet sich ein Fehler der gemessenen D.K. von $1 - \frac{D_0 \sigma}{D \sigma_0} : 1$, wenn D_0 und σ_0 die D.K. und spezifische Leitfähigkeit der Kompensationswiderstände und D und σ diejenigen des Meßtiegels bedeuten. Für schnelle Schwingungen dürften die Verhältnisse nicht so günstig liegen, da σ mit zunehmender Schwingungszahl immer kleiner wird und die dielektrische Leitfähigkeit mehr hervortritt. Das Verhältnis der beiden Größen läßt sich nach Drude[1]) in der Form schreiben: $\frac{2 c \sigma_m \lambda}{\varepsilon}$, wo c die Lichtgeschwindigkeit, σ_m die galvanische Leitfähigkeit in elektromagnetischem Maße, λ die Wellenlänge und ε die Dielektrizitätskonstante bedeutet. Die Kapazität der Widerstandskompensatoren wird dann besonders hervortreten, wenn die benutzte Wellenlänge in ein Gebiet fällt, wo der untersuchte Körper anomale Dispersion aufweist. Denn während gewöhnlich der Einfluß der Wellenlängenänderung im Meßkreise, welche durch Hinzufügen der Kapazität der Widerstände entsteht, nicht ins Gewicht fällt, zumal ja zu beiden Brückenzweigen annähernd die gleiche Kapazität geschaltet

1) P. Drude, Physik des Äthers. Abschn. IX. 28. S. 638. 1912.

wird, dürfte im Gebiete anomaler Dispersionen auch diese geringe Wellenlängenänderung von Einfluß sein. Da die Kapazität eines Kondensators der Entfernung der Metallbelegungen umgekehrt proportional ist, dürfte es sich in diesem Falle auch nicht empfehlen, die beiden Elektroden der Kompensationswiderstände einander sehr nahe zu bringen, um auf diese Weise einen möglichst geringen Kapazitätsunterschied in beiden Zweigen zu erreichen. Vielleicht ist es in diesem Falle besser, die a. a. O. beschriebenen Widerstände zu verwenden.

In Fällen, wo eine kleine Änderung der Wellenlänge von Einfluß auf das Beobachtungsresultat ist, dürfte es auch angebracht sein, die Nulleinstellung der Brücke nicht nur durch Herausziehen und Hineinschieben der Glasplatte des rechten Brückenzweiges vorzunehmen, sondern durch Herausziehen derjenigen Glasplatte, welcher der Meßtrog parallel liegt, damit die Gesamtkapazität des Brückenzweiges gleich bleibt. Natürlich müssen die Glasplatten gegeneinander geeicht sein.

In der folgenden Tabelle sind die erhaltenen Meßresultate im Vergleich zu den mit anderen Wellenlängen gefundenen anderer Beobachter zusammengestellt. Die mit Wellenlänge ∞ gefundenen Zahlen sind den Messungen von Nernst, Turner, bei Äthylenchlorid und Methylalkohol von Landolt, bei Aceton von Walden entnommen; die mit $\lambda = 75$ m angegebenen Zahlen entstammen den Messungen von Drude. Die mit dem neuen Apparat gefundenen Resultate sind unter $\lambda = 300$ m angegeben; die Messungen wurden sämtlich bei Zimmertemperatur ausgeführt.

Substanz	$\lambda = \infty$	$\lambda = 75$ m	$\lambda = 300$ m	
Chloroform	5,14	4,95	5,06	
Toluol	2,33	2,31	2,38	
o-Xylol	2,57	2,57	2,47	ohne Widerstandskomp.
Äther	4,36	4,35	(4,36)	
Äthylenchlorid	10,8		10,95	
Anilin	7,32	7,14	7,23	
Wasser	81,1	80,7	80,16	
Methylalkohol	35,2	33,2	36,17	
Äthylalkohol	26,8	31,8	29,57	
Isobutylalkohol	18,9	8,0	19,90	
Aceton	21,5	20,7	21,03	
Nitrobenzol	(36,45)	34,0	(36,45)	ohne Widerstandskomp.

B. Messungen an festen Körpern.

Im folgenden seien Messungen mitgeteilt, die nach Hertwigs Methode mit der a. a. O. beschriebenen Schwingungserzeugung angestellt wurden. Es wurden anorganische Salze untersucht, und zwar wurden die Substanzen fein gepulvert und dann möglichst fest in den Nickeltiegel gepreßt; die zweite Elektrode wurde dann fest aufgesetzt. Nach Maxwell[1]) dürfte gegen die Anwendung von Pulvern, d. h. also Schichten von Luft und der zu untersuchenden Substanz, kein Bedenken bestehen, da dieser ja darauf hinweist, daß man sich mehrere Schichten gleichen Materials ohne Änderung zu einer Schicht vereinigt denken kann. Die Dichte der Pulver wurde durch Ausmessen des eingenommenen Volumens und Abwägung der angewandten Substanz bestimmt, die gefundene D.K. der Pulver auf die D.K. für die Pulver mit Kristalldichte umgerechnet.

Für Gase gilt die Beziehung $\varepsilon - 1 \sim d$ (Dichte), man kann also ohne weiteres die Elektrisierungszahlen, d. h. die um 1 verminderte D.K., auf verschiedene Dichten umrechnen; für Flüssigkeiten und feste Körper ist das nicht mehr angängig. Die Elektronentheorie nimmt an[2]), daß die Elektronen in Isolatoren durch quasielastische Kräfte an die Moleküle gebunden sind, also Kräfte die der Entfernung von der Ruhelage proportional sind. Durch ein äußeres elektrisches Feld werden die Elektronen aus der Ruhelage verschoben und infolgedessen eine Polarisation hervorgerufen. Wenn die auf das Elektron wirkende Kraft nur durch die Natur des Moleküls bestimmt und von den Feldern der benachbarten Moleküle unabhängig ist, so wird die Elektrisierungszahl proportional der Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit sein, also auch proportional der Dichte; das ist aber nur bei Gasen der Fall. Bei Flüssigkeiten und besonders bei festen Körpern wirken auf die Elektronen auch die Felder der Nachbarmoleküle, und die Dichte d ist proportional der Funktion $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$, vorausgesetzt, daß die Zahl der Elektronen sich nicht bei der Dichteänderung ändert.

---

1) I. Cl. Maxwell, Lehrb. d. Elekt. u. d. Magnet. Deutsch von B. Weinstein. 1. Art. 328. S. 473. 1883.

2) M. Abraham, Theorie d. Elektr. II. 3. Aufl. 1914. § 29. S. 259.

Die gleiche Funktion folgt auch aus der Clausius-Mossottischen Theorie.

Man rechnet also die aus der für die Pulver gefundenen D.K. ε_p bestimmte Funktion $\frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2} = x$ für Kristalldichte um und berechnet aus der hierfür gefundenen Zahl x die D.K. ε_k des Kristalls nach der Formel $\varepsilon_k = \frac{1 + 2x}{1 - x}$. Es braucht wohl nicht hervorgehoben zu werden, daß die so gefundene D.K. einen Mittelwert der drei „Hauptdielektrizitätskonstanten“[1]) des Kristalls bedeutet.

Es wurden folgende Zahlen gefunden:

Substanz	Dichte d. Pulv.	Dichte d. Krist.	D.K. d. Pulv.	D.K. d. Krist. ber.
KCl	1,61	1,985	2,06	2,42
$KAl(SO_4)_2$	1,42	1,75	2,970	3,87
$PbCl_2$	4,84	5,80	4,29	6,03
$PbSO_4$	3,59	6,30	3,72	16,07
$(COOH)_2Pb$	2,26	2,50	2,35	2,57
S (am.)	1,313	1,92	2,84	4,76
$HgCl_2$	4,39	5,42	2,58	2,95
$Hg(CN)_2$	3,11	4,018	2,41	3,11
$(NH_4)_2SO_4$	1,39	1,77	2,56	3,31

Wie groß die Differenz für die berechnete D.K. des Kristalls werden kann, ob man die Elektrisierungszahl $\varepsilon - 1$ oder die Funktion $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ der Dichte proportional setzt, mögen folgende Zahlen zeigen:

Substanz	D.K. ber. $\varepsilon - 1 \sim d$	D.K. ber. $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \sim d$
$(NH_4)_2SO_4$	2,99	3,31
S	3,69	4,76
$PbCl_2$	4,94	6,03
$PbSO_4$	5,77	16,07

Es sei bemerkt, daß eine Widerstandskompensation für etwaige Leitfähigkeit unnötig war.

Es liegt nahe, einen Vergleich der obigen Zahlen mit den

1) Vgl. M. Born, Dynamik d. Kristallgitter § 19. S. 67. 1915.

von Starke[1]) nach der „Schwimmethode" erhaltenen Zahlen anzustellen. Hierbei zeigt es sich, daß die D.K. für KCl bedeutend kleiner als von Starke gefunden wurde. Es ist möglich, die verschiedenen Leitfähigkeiten von Benzol und Äthylenchlorid und eine wohl stets auf der Oberfläche eines Kristalls haftende Flüssigkeitsschicht als Grund hierfür anzusehen. Sollte besonders bei hygroskopischen Salzen ein Unterschied zwischen den beiden Meßmethoden in zukünftigen Fällen hervortreten, so würde diese Annahme an Wahrscheinlichkeit gewinnen. Doch sind wohl noch eingehendere Versuche nötig, um über diese Frage ein sicheres Urteil zu fällen.

Es wurde ferner die Temperaturabhängigkeit der D.K. einiger Salze bestimmt. Um die Temperaturmessungen zu ermöglichen, konnte es nicht umgangen werden, daß die Verbindungen des Meßtiegels mit den Glasplattenkondensatoren verlängert wurden, um das Einsetzen der Substanz in ein Dewargefäß zu ermöglichen. Die Versuche wurden derart angestellt, daß die Plattenkondensatoren und die Apparate des Primärkreises erhöht aufgestellt wurden, so daß der Meßtiegel in ein zwischen die Plattenkondensatoren gestelltes Dewargefäß hinabgelassen werden konnte. Als Abkühlungsmittel wurde bis $-70°$ C ein Gemisch von fester Kohlensäure und Alkohol benutzt. Einige Messungen wurden auch mit flüssiger Luft ausgeführt. Ein Einfluß des Kühlmittels wurde, trotz der wahrscheinlich großen Verschiedenheit der D.K. von Alkohol und flüssiger Luft, nicht festgestellt. Die Verwendung eines Metallrührers während der Messung ist zu vermeiden, da ja hierdurch ein neuer Kondensator gebildet wird, welcher von der D.K. des Kühlmittels abhängig ist und die Messungen stört. Andere Schwierigkeiten sind bei der Versuchsanordnung nicht hervorgetreten.

Substanz	D.K. bei						
	$+17°$	$-5°$	$-20°$	$-30°$	$-45°$	$-60°$	$-180°$
S	2,84	2,84		2,84		2,84	2,84
$(NH_4)_2SO_4$	2,56		2,56		2,56	2,56	2,55
$HgCl_2$	2,58	2,58	2,58		2,58	2,58	
$Hg(CN)_2$	2,41		2,41		2,41	2,41	
$PbCl_2$	4,29	4,29		4,29		4,29	4,29

1) H. Starke, Wied. Ann. 60. S. 629. 1897.

Die oben angegebenen Zahlen beziehen sich auf die D.K der Pulver.

V. Theoretisches.

Aus obiger Tabelle ersieht man, daß die Temperaturabhängigkeit fester Körper, wenn überhaupt vorhanden, so gering ist, daß sie nicht festzustellen war. Vielleicht wäre es möglich nach der oben beschriebenen Überlagerungsmethode, die ja unvergleichlich viel empfindlicher ist, eine Temperaturabhängigkeit zu erkennen. Das wäre besonders interessant für die Ammoniumsalze, sowie für Ferro- und Mangansulfat. Wie nämlich R. Ewald[1]) beobachtete, ist der Verlauf der spezifischen Wärme bei Ammoniumbromid und -Nitrat zwischen $+20^0$ und -78^0 C. ein anomaler; er deutete diese Erscheinung auf eine intramolekulare Umwandlung der Salze in dem betrachteten Temperaturgebiete, welche sich eventuell durch eine Änderung der D.K. ausdrücken müßte. Für Ferro- und Mangansulfat wies Oosterhuis[2]) nach, daß diese Stoffe nicht dem Curieschen Gesetz gehorchen, daß nämlich die Suszeptibilität umgekehrt proportional der absoluten Temperatur ist, sondern er zeigte, daß entsprechend dem Nernstschen Wärmesatz

$$\lim \frac{dm}{dT} = 0$$

ist, wenn m das durch die magnetische Kraft 1 erzeugte Moment der Masseneinheit ist, d. h. also daß bei hinreichend starker Abkühlung die Suszeptibilität von der Temperatur unabhängig wird. Es wäre nun möglich, daß Ferro- und Mangansulfat auch für den Verlauf der Temperaturabhängigkeit ein abnormes Verhalten zeigen.

Debye[3]) nämlich führt in einer Arbeit über die Temperaturabhängigkeit der D.K. flüssiger Körper aus, daß der Clausius-Mossotti bzw. Lorentz-Lorenzsche Ausdruck $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$ eine Temperaturfunktion von der Form $\frac{a}{T}+b$ sein muß, worauf auch schon Ratz[4]) hinweist, welcher ausspricht, daß dies um so stärker hervortritt, je größer die D.K. ist. Zu dieser Formel kommt jedoch Debye nur mit Hilfe der Hypothese,

1) R. Ewald, Ann. d. Phys. 44. S. 1213. 1914.
2) E. Oosterhuis, Phys. Zeitschr. 15. S. 862. 1913.
3) P. Debye, Phys. Zeitschr. 13. S. 97. 1912.
4) Fl. Ratz, Zeitschr. f. phys. Chem. 19. S. 102. 1896.

daß im Innern der Atome nicht nur quasielastisch gebundene Elektronen, sondern auch fertige Dipole sind, wobei man die Stärke der Bindung mit Clausius für verschiedene Körper verschieden ansehen müßte. Die D.K. ε hätte dann also die Form $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{a}{T}$, wo ε_0 nur von den Verschiebungselektronen herrührt und $\frac{a}{T}$ ein dem Curieschen Gesetz analoger Ausdruck für den Anteil der Dipole bildet. Es würde das nach dem Nernstschen Wärmesatze heißen, daß die Funktion $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}$ für tiefe Temperaturen von der Temperatur unabhängig ist. Das gleiche Resultat kann man durch Anwendung des Nernstschen Wärmetheorems auf einen von Drude[1]) betrachteten Kreisprozeß erhalten.

Wie Reinganum[2]) nachweist wird die potentielle Energie der Dipole erst bei tiefen Temperaturen von der Temperatur unabhängig, entsprechend könnte man daraus schließen, daß nur die fertigen Dipole bei einer Elektrisierung eine gewisse Wärmekapazität besäßen.

Wie weit die Energie der Dipole bei tiefen Temperaturen mit der für die Unabhängigkeit der Suszeptibilität von der Temperatur von Oosterhuis eingeführten Nullpunktsenergie identisch ist, wage ich nicht zu entscheiden.[3]) Ebenso mag die Hypothese hier unerörtert bleiben, ob die von Reinganum und Debye in das Atom eingeführten Dipole mit dem innersten Elektronenring des Bohrschen Atommodells, welcher ja nur aus zwei Elektronen besteht, zu identifizieren sind.

Die Temperaturabhängigkeit der D.K. ist jedoch auch noch von einem andern Gesichtspunkte aus von großem Interesse. Nach Nernst[4]) spielt bei der elektrolytischen Dissoziation die elektrostatische Anziehungskraft der entgegengesetzt geladenen Ionen eine entscheidende Rolle. Werden diese Anziehungskräfte geschwächt, so nimmt die elektrolytische Dissoziation zu. Durch Zwischenschalten eines Mediums höherer

1) P. Drude, Physik des Äthers I, 48. 1912.

2) M. Reinganum, Ann. d. Physik 38. S. 649. 1912.

3) Vgl. W. Nernst, Verhdl. d. D. Phys. Ges. 18. S. 83. 1916. bes. S. 115 Ziff. 8.

4) W. Nernst, Theor. Chem. VII. Aufl. S. 403.

D.K. wird die Anziehungskraft zweier ungleicher Ladungen gemindert, folglich wird in einem Medium höherer D.K. die elektrolytische Dissoziation größer sein, als in einem Medium kleinerer D.K. Allerdings werden hierbei auch die Kräfte in Frage kommen, welche das Molekül in Ionen zu spalten suchen, wobei wahrscheinlich die kinetische Energie der Molekülkomponenten eine entscheidende Rolle spielt. Auf diesen Gedankengängen Nernst' aufbauend stellt Kossel[1]) Betrachtungen über die Größenordnung der Kräfte an, die zur Trennung der Ionen eines Moleküls erforderlich sind und kommt zu dem Schluß, daß die D.K. des Lösungsmittels in der Tat die elektrolytische Dissoziation bestimmt, wie auch Lenard[2]) den gleichen Einfluß der D.K. der Umgebung für die Eigenschwingungsdauer des Zentrums einer Phosphoreszensbande wahrscheinlich gemacht hat.

Wie zu Anfang dieser Arbeit erwähnt wurde, ist es von hervorragendem Interesse die Abhängigkeit der D.K. von der Wellenlänge der angewandten Schwingungen aufzuklären. Die Elektronentheorie erklärt die Erscheinungen der normalen und anomalen Dispersion für das Gebiet der Lichtwellen mit den Eigenschwingungen der Atombestandteile und zwar sowohl der Elektronen wie der positiven Atomkerne. Ist die Frequenz der Eigenschwingungen ν_0 groß gegen die der einfallenden Welle ν, so findet keine Dispersion statt, da die Trägheit der mitschwingenden Teilchen nicht in Betracht kommt; ist ν_0 nur wenig größer als ν, so nimmt der Brechungsindex n mit wachsendem ν zu (normale Dispersion). Wächst ν weiter und wird gleich und größer als ν_0, so liegt der Fall der anomalen Dispersion vor, die Wellenlängen, welche kleiner als die der Eigenschwingungen sind, werden schwächer gebrochen als die etwas größeren. Bei weiter wachsendem ν beeinflußt der Wert von ν_0 überhaupt nicht mehr den Brechungsindex.

Im Gebiet der elektrischen Wellen sind viele Substanzen gefunden worden, die für langsamere Schwingungen eine größere D.K. besitzen als für schnellere, welche also auch die Erscheinungen der anomalen Dispersion zeigen, da der

1) W. Kossel, Ann. d. Phys. 49. S. 229, bes. S. 268. 1916.
2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 31. S. 671. 1910.

Brechungsexponent durch $n^2 = \varepsilon\mu$ und von Flüssigkeiten mit Leitfähigkeit nach Drude[1]) durch die Formel

$$n^2 = \mu\left(\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \sigma_m\, c^4\, \nu^2}\right)$$

mit der D.K. verknüpft ist, worin μ die magnetische Permeabilität, σ_m die Leitfähigkeit in elektromagnetischem Maße, c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Eine ähnliche funktionale Abhängigkeit ergibt sich auch für die Absorption. Eine Erklärung für die Erscheinungen der anomalen Dispersion kann man ebenso wie die Elektronentheorie im Gebiete des sichtbaren Lichtes durch sehr langsame Eigenschwingungen der Atome mit geringer Dämpfung geben. Doch wie Nernst durch eine Arbeit von Millikan[2]) gezeigt hat, ist auch eine andere Deutung möglich. Mit Clausius[3]) kann man annehmen, daß ein Dielektrikum im Ganzen als Nichtleiter anzusehen ist, welcher kleine leitende Körperchen enthält. Wie nun schon Maxwell[4]) gezeigt hat, tritt in all den Dielektrika Absorption auf, die aus Teilchen verschiedener Substanzen zusammengesetzt sind, selbst wenn die Teilchen für sich diese Erscheinung nicht zeigen; und zwar ist die Absorption für die elektrische Schwingung am stärksten, deren Frequenz der Größenordnung nach: gleich der D.K. der Teilchen dividiert durch das doppelte der elektrostatisch gemessenen Leitfähigkeit ist. Millikan prüfte die Richtigkeit dieser Hypothese und damit die Clausiussche Vorstellung über den Bau eines Dielektrikums durch die Bestimmung der D.K. einer Chloroformemulsion und zeigte, daß angesäuertes Chloroform in Schwingungsgebieten zwischen 10^4 bis 10^7 starke anomale Dispersion zeigen muß.

Durch Untersuchung der D.K. derartiger Emulsionen mit verschiedenen Wellenlängen, wie es mit dem Röhrensender bequem möglich ist, kann man vielleicht Aufklärung darüber erlangen, ob die anomale Dispersion und Absorption, welche hervorragend konstitutive Eigenschaften sind, bei elektrischen Wellen durch Resonanz der Eigenfrequenzen verschiedene

1) P. Drude, Phys. d. Äthers, Abschn. IX. 31.
2) H. Millikan, Wied. Ann. 60. S. 376. 1897.
3) R. Clausius, Mech. Wärmetheor. Bd. 2 Abschn. III.
4) J. Cl. Maxwell, a. a. O. Artikel 330—331.

Atome bzw. Atomgruppen, oder durch die Leitfähigkeit dieser eingelagerten Atomgruppen bedingt ist, wie es Drude[1]) für die Wirksamkeit der OH-Ionen erörtert hat.

C. Zusammenfassung.

1. Der von W. Hertwig beschriebene Apparat zur Messung der D.K. mit gedämpften Wellen wurde in einzelnen Teilen verbessert.

2. Durch Einführung des Röhrensenders wurde es ermöglicht die Messungen mit ungedämpften Wellen von völlig konstanter Amplitude auszuführen. Die völlige Lautlosigkeit und Einfachheit in der Apparatur sind hervorzuheben. Durch den Röhrensender wird es auch ermöglicht, die von Nernst zuerst beschriebene Meßbrücke auch für Messungen mit schnellen Schwingungen zu benutzen. Die bequemere Veränderlichkeit der Wellenlängen gegenüber der von Hertwig beschriebenen Methode ist zu betonen.

3. Die zum Empfang der ungedämpften Wellen möglichen Methoden werden angegeben und die durch den schließlich eingeführten Schleifer sich ergebende Schaltung ausgeführt.

4. Es werden die Resultate der Messungen mitgeteilt, die zur Kontrolle der Methode ausgeführt wurden.

5. Es wird die Dielektrizitätskonstante einiger anorganischer Salze und ihre Temperaturabhängigkeit mit dem von Hertwig beschriebenen Apparate bestimmt.

6. Die Theorie der Temperaturabhängigkeit der D.K., die Bedeutung der D.K. für die elektrolytische Dissoziation, sowie die Frage der Abhängigkeit der D.K. von der Wellenlänge im Hinblick auf den Bau der Dielektrika werden kurz erörtert.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Herrn Professor Dr. Nernst im Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Berlin ausgeführt.

Es sei mir gestattet, Herrn Professor Nernst an dieser Stelle für seine anregende Unterstützung und ständiges Interesse an dieser Arbeit meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Auch Herrn Dr. Günther danke ich für manche liebenswürdigen Ratschläge bei den ersten Arbeiten mit dem Röhrensender.

1) P. Drude, Wied. Ann. 60. S. 500. 1897.

(Eingegangen 9. August 1919.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

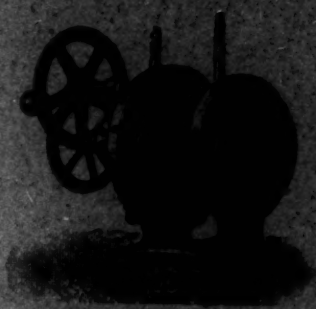
Arthur Pfeiffer, Wetzlar 0

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1869.

Spezialfabrik von Luftpumpen zu Demonstrationen und für wissenschaftliche Zwecke.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen

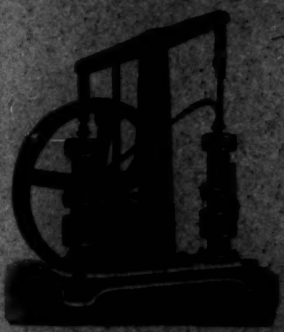
System Pfeiffer, D.R.P. **System Gaede, D.R.P. angemeldet**



Hochvakuum-Apparate zur Demonstration und zu wissenschaftlichen Untersuchungen. Neukonstruktionen nach Angabe.

Vakuummeter n. Reiff, mit direkter Ablesung, D.R.P. angemeldet.

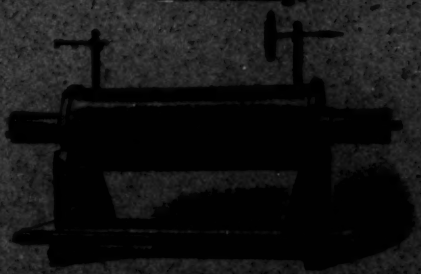
Geryk-Öl-Luftpumpen, D.R.P. **Rotierende Öl-Luftpumpen, D.R.P.**



Alle Arten von Luftpumpen; Trockene rotierende Luftpumpen. Trockene Schieber-luftpumpen. Quecksilberluftpumpen aller Systeme. Kompressionsluftpumpen.

Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4–1000 mm Funkenlänge

Eingetragene Fabrik-Marke



Induktoren mit Demonstrations-schaltung. Alle Nebenapparate.

Inhalt.

		Seite
1.	W. Wien. Über Messungen der Leuchtdauer der Atome und der Dämpfung der Spektrallinien. I. (Hierzu Tafel I.)	597
2.	W. Voigt. Strukturbroade und Kohäsionserscheinungen	633
3.	K. Försterling. Quantentheorie und Adiabatenhypothese	673

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Dem geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für die verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung der ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen unterer Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren sonst möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskripts stets genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind als Fußnote oder unten auf den Seiten des Manuskripts (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

1919. № 23.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. *Über Messungen der Leuchtdauer der Atome und der Dämpfung der Spektrallinien. I;* von *W. Wien.*

(Hierzu Tafel I.)

Die Bestimmung der Dämpfung der zum Leuchten erregten Atome ist für die Theorie der Lichterregung von großer Bedeutung.

Aus der Annahme schwingender Elektronen konnte zwar die Größe der Dämpfung theoretisch bestimmt werden, seitdem jedoch das Bohrsche Atommodell für die Darstellung der Spektralserien mit so großem Erfolge benutzt wird, ist diese Theorie zweifelhaft geworden, da in der Bohrschen Vorstellung vollkommen unklar bleibt, wie die lichtaussendende Schwingung beschaffen ist. Um so wichtiger ist es, die Größe der Dämpfung durch Messungen zu bestimmen, von denen Aufschlüsse über die Vorgänge bei der Lichterregung erwartet werden können. Eigentliche Messungen der Dämpfung der nach der Lichterregung ungestört abklingenden Atome liegen bisher nicht vor. L. Mandelstam[1]) hat eine Methode angegeben, die sich der von Bjerknes zur Bestimmung der elektromagnetischen Dämpfung aus der Resonanzkurve anschließt, indem die Änderung der Absorption infolge der Änderung der Schwingungszahl durch ein Magnetfeld bestimmt wird. Indessen tritt merkliche Absorption erst bei großer Gasdichte ein und die Dämpfung ist dann nicht allein durch die Ausstrahlung, sondern auch durch Störungen infolge der Zusammenstöße der Moleküle bedingt.

Neuerdings hat J. Stark[2]) aus Beobachtungen über das Hinausgreifen der Lichterregung über die Begrenzung eines Kanalstrahlenbündels eine Schätzung der oberen Grenze der Leuchtdauer versucht. Er geht dabei von der Annahme aus,

1) L. Mandelstam, Physik. Zeitschr. 11. S. 752. 1910; G. von Ubisch, ebendort, S. 73 und Ann. d. Phys. 35. S. 790. 1911.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 49. S. 731. 1916.

daß die in dem Kanalstrahl zum Leuchten erregten Moleküle durch die Molekularbewegung über die Grenze des Strahls hinausgelangen, bevor sie ihre Lichtaussendung beendet haben. Er findet, daß die Serienlinien des Wasserstoffs bei wachsenden Gliednummern eine erheblich geringere Dämpfung besitzen im Widerspruch zu der Forderung der elektromagnetischen Theorie des schwingenden Elektrons, nach der die Dämpfung dem Quadrat der Wellenlänge umgekehrt proportional sein soll.

Wir werden sehen, daß die Serien des Wasserstoffs allerdings keine solche Dämpfung besitzen wie die elektromagnetische Theorie des schwingenden Elektrons es verlangt, weil in der Tat die Dämpfung mit abnehmender Wellenlänge nicht zunimmt. Andererseits hat sich aber auch die Abnahme der Dämpfung mit der Wellenlänge nicht feststellen lassen; wenn eine solche vorhanden ist, so liegt sie innerhalb der Beobachtungsfehler.

Während die Abhängigkeit der Dämpfung von der Wellenlänge mit der Theorie nicht übereinstimmt, ergibt sich die Größe der Dämpfung für H_α in überraschender Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert.

Eine weitere Schätzung der Dämpfungskonstante ist neuerdings von Stern und Volmer[1]) auf Grund der Abklingungszeit der Fluoreszenz von Dämpfen versucht. Aber auch diese Methode gestattet vorläufig keine eigentlichen Messungen.

Mit Hilfe der zu besprechenden Methode sind solche Messungen möglich, wenn auch die Genauigkeit noch keine sehr große ist.

1. Die Methode.

Bereits früher habe ich daruf hingewiesen[2]), daß die Messung der Leuchtdauer der in den Kanalstrahlen bewegten Atome ausführbar wäre, wenn es sich vermeiden ließe, daß sie durch die Zusammenstöße mit ruhenden Molekülen immer wieder neu zum Leuchten erregt werden. Wenn es demnach gelingt, die Kanalstrahlen aus einem Raum hohen Drucks in einen solchen von niedrigem Druck, wo die Lichterregung durch Zusammenstöße nicht mehr in Betracht kommt, plötzlich über-

1) O. Stern u. W. Volmer, Physik. Zeitschr. **20**. S. 183. 1919.
2) W. Wien, Ann. d. Phys. **28**. S. 428. 1907.

treten zu lassen, so müssen die fliegenden Atome auf ihrer Bahn allmählich ihre Lichtenergie verlieren und zu leuchten aufhören. Aus der Intensitätsabnahme des von diesen Kanalstrahlen ausgesandten Lichts in Verbindung mit der Geschwindigkeit muß sich die Dämpfung der Lichtschwingungen bestimmen lassen. Versuche, die bereits im Jahre 1907 in dieser Richtung angestellt wurden, führten zu keinem Ergebnis, da es nicht gelang einen genügend niedrigen Druck in einem Raum zu erzielen, in den Kanalstrahlen von ausreichender Stärke aus einem unmittelbar benachbarten, wo der Druck der Entladungsröhre herrscht, übertreten. Seitdem aber in der Gaedeschen Diffusionspumpe ein neues Hilfsmittel zur Herstellung höchster Verdünnungen gefunden ist, war es in der Tat möglich, die besprochenen Bedingungen zu erfüllen. Die neue Gaedesche Diffusionspumpe war bereits im physikalischen Institut für militärtechnische Untersuchungen benutzt und es konnten die hierbei gemachten Erfahrungen verwendet werden. Die Anordnung, die sich als zweckmäßig erwies, war die folgende.

Eine Kanalstrahlenröhre R von 8 cm Durchmesser hat eine Kathode k mit einer Durchbohrung von 5 mm Durchmesser (Fig. 1). Durch den Rohransatz A wird das Gas beständig mit Hilfe einer rotierenden Gaedeschen Pumpe ausgepumpt, während neues Gas durch eine enge Kapillare zuströmt. Die Glasröhre des Kanalstrahlenrohres ist in den ringförmigen Einschnitt eines etwas weiteren Metallzylinders $M\,M$ eingekittet, so daß dieser von der Kathode berührt wird und seine Durchbohrung die Fortsetzung der Kathodenöffnung bildet. Auf diesen Zylinder ist eine Messingplatte $m\,m$ von 1 mm Dicke gelötet, der in der Mitte einen Spalt von 3 mm Länge trägt. Die Breite des Spalts betrug 0,1 oder 0,25 mm. Durch diesen Spalt treten die Kanalstrahlen als schmales Bündel in den Beobachtungsraum ein. Um den Metallzylinder ist ein Kühler K gelötet, durch den beständig kaltes Wasser fließt.

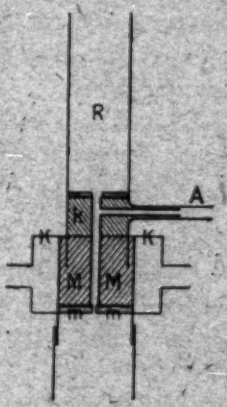


Fig. 1.

Der Beobachtungsraum wird durch zehn Diffusions-

pumpen (Fig. 2) ausgepumpt, die an eine Glasröhre von 2,5 cm Durchmesser in geringer Entfernung voneinander angesetzt sind. Als Vorpumpe für die Diffusionspumpen dient eine rotierende Quecksilberluftpumpe, während als Vorpumpe für die rotierenden Quecksilberpumpen eine Kapselpumpe ver-

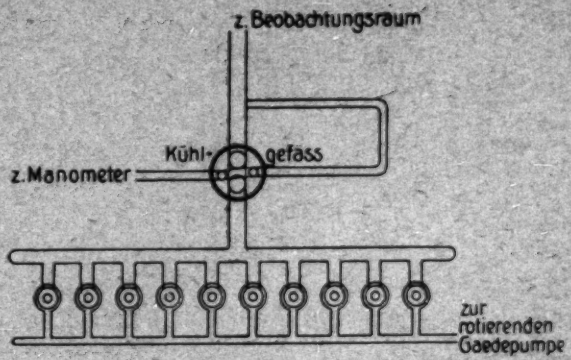


Fig. 2.

wendet wird. Der Druck im Beobachtungsraum wird durch ein Mc Leodsches Manometer gemessen. Sowohl von dem Verbindungsrohr zwischen dem Beobachtungsraum und den Diffusionspumpen wie von dem zwischen dem ersteren und dem Manometer ist ein Teil als U-Rohr gebogen und taucht in eine Mischung von Aceton und fester Kohlensäure. In ein zweites Kühlgefäß taucht das U-Rohr der Verbindung zwischen der Kanalstrahlenröhre und deren Pumpe.

2. Die Druckverhältnisse.

Bei der beschriebenen Anordnung lassen sich folgende Druckunterschiede erreichen bei einer Spaltbreite von 0,25 mm.

Füllung	Spannung Volt	Druck im Entladungsraum	Druck im Beobachtungsraum	Verhältnis der Drucke in Prozent
Wasserstoff .	4000	0,06 mm Hg	0,0015 mm Hg	2,5
„ .	2000	0,14 „ „	0,003 „ „	2,1
Sauerstoff . .	9000	0,0155 „ „	0,0003 „ „	2
Stickstoff . .	8000	0,014 „ „	0,0003 „ „	2,1

Bei einem Spalt von 0,1 mm Breite ging der Druck im Beobachtungsraum auf 0,0004 bei 4000 Volt Spannung zurück,

so daß dann der Druck im Beobachtungsraum unter einem Prozent des Druckes im Entladungsraum lag. Bei diesem engeren Spalt war jedoch der Strahl für manche Beobachtungen zu lichtschwach, so daß dann der breitere Spalt von 0,25 mm angewendet werden mußte.

Über die Veränderungen des Druckes und der Dichte des aus dem engen Spalt ausströmenden Gases geben die Untersuchungen von Knudsen Aufschluß.

Sei N die Anzahl der Moleküle bei dem in der Entladungsröhre herrschenden Druck in der Volumeinheit, m die Masse eines Moleküls, u die mittlere Geschwindigkeit. Dann ist in einem ccm die Gasmasse Nm.

Nach Knudsen[1]) geht durch einen Kanal von der Länge l, der Breite a und der Tiefe L die Gasmasse

$$Q = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{Nm}{p_1}}\,\frac{a^2 b}{L}(p_1 - p_2)$$

in der Zeiteinheit, wo $p_1 - p_2$ die Druckdifferenz ist.

Ferner ist

$$p = \frac{N m v^2}{3}.$$

Hier ist v die mittlere Geschwindigkeit, aus der Summe der Quadrate berechnet. Dabei ist

$$v = \sqrt{\frac{3\pi}{8}}\,u,$$

also

$$p = N m \frac{\pi}{8} u^2.$$

Setzen wie nun $p_2 = 0$, $p_1 = p$, so ist

$$Q = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{a^2 b}{L} N m u.$$

In der Entfernung r vom Spalt geht diese Gasmasse durch eine Halbkugel von der Fläche $2\pi r^2$ und zwar nach den Beobachtungen von Knudsen überall gleichmäßig ohne einen Strahl zu bilden. Die Moleküle treffen hierbei nahe rechtwinklig auf die Kugeloberfläche. Die Raumdichte des Gases ist also

$$\frac{2}{3}\,\frac{a^2 b}{L}\,\frac{N m}{2\pi r^2}.$$

---

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28. S. 108. 1909.

Verglichen mit der Gasdichte $N m$ im Entladungsraum ist daher die Dichte in der Entfernung r vom Spalt

$$\frac{1}{3\pi r^2} \frac{a^2 b}{L}.$$

Ist nun

$$a = 0{,}025 \text{ cm}$$
$$b = 0{,}3 \quad ,,$$
$$L = 0{,}1 \quad ,,$$
$$r = 0{,}2 \quad ,,$$

so ist das Verhältnis der Dichten

$$0{,}005.$$

Es ist also die Dichte des Gases schon in einer Entfernung von 2 mm vom Spalt sehr klein.

3. Verhalten des in den Raum hoher Verdünnung durch den Spalt eintretenden Strahls.

Wenn ein Kanalstrahl aus dem Spalt in den stark verdünnten Raum übertritt, so nimmt seine Helligkeit schnell ab. In einer Entfernung von wenigen Zentimetern ist die Helligkeit bereits klein geworden. Es ist ein auffallender Unterschied zwischen dem Strahl vorhanden je nachdem er in einen Raum von gleichem oder erheblich niedrigeren Druck übertritt. Im ersteren Fall ist der Strahl diffus, seine Helligkeit nimmt zwar infolge der Zerstreuung ab, bleibt aber auf große Strecken hin beträchtlich. Beim niedrigen Druck ist die Zerstreuung des Strahls gering, seine Helligkeit nimmt trotzdem viel schneller ab. Man sieht hieraus, daß die in den Raum niedrigen Drucks gelangenden Atome, die vorher durch die Zusammenstöße im Raum höheren Drucks zum Leuchten erregt waren, schnell abklingen.

Tafel I Abb. Ia und b zeigt die photographische Aufnahme des Strahls ohne Spektrographen sowohl bei hoher Verdünnung als bei höherem Druck in beträchtlicher Verkleinerung. a ist die Aufnahme bei 2500 Volt, 0,01 mm Druck im Beobachtungsraum, $3^1/_2$ St.-Belichtung; b ist die Aufnahme bei 2500 Volt, 0,0003 mm Druck, 4 St.-Belichtung. Es hat sich kein wesentlicher Unterschied in dem Aussehen des Strahles gezeigt, wenn anstatt des Spalts von 0,1 mm Breite ein solcher mit

0,25 mm Breite genommen wurde. Es sind in beiden Fällen die Drucke so niedrig, daß sie keine erhebliche Lichterregung mehr bewirken.

Der Druck des Quecksilberdampfes wurde, wie bereits erwähnt, durch Eintauchen eines Teils der zu den Pumpen und zum Manometer führenden Leitungen in feste Kohlensäure verringert. Eine vollständige Beseitigung gelang indessen nicht, obwohl die Röhre, sobald die Kühlung fortgenommen war, mit Luft von Atmosphärendruck gefüllt wurde. Die stärkeren Quecksilberlinien erscheinen auf den Spektrogramm manchmal kaum angedeutet, manchmal stärker, nur selten gar nicht.

4. Die Messung des Intensitätsfalls des leuchtenden Strahls für verschiedene Spektrallinien.

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, quantitativ zu bestimmen, wie die Intensität des von den allmählich abklingenden Atomen ausgesandten Lichtes abnimmt. Diese Messung ist für die Spektrallinien einzeln vorzunehmen um festzustellen, wie die Dämpfung der lichtaussendenden Atome von der Wellenlänge abhängt. Die Schwierigkeit liegt in der geringen Lichtstärke des Strahles. Es mußte daher vor allem auf Lichtstärke der spektroskopischen Anordnung Bedacht genommen werden.

Es wurde ein Quarzspektrograph vom Öffnungsverhältnis 1:5 gewählt. Obwohl sich mit Glasspektrographen größere Lichtstärken erreichen lassen, hat der Quarzspektrograph den Vorteil der geringen Absorption, die namentlich im blau bei Flintgläsern beträchtlich ist. Der Spalt des Spektrographen wurde fortgenommen und zunächst für die Vorversuche folgendermaßen verfahren.

Durch eine achromatische Linse wurde der Strahl am Orte des Spaltes abgebildet und so ein Bild des Strahles für jede Spektrallinie erhalten.

Es hätte nun der Intensitätsabfall aus den photographischen Schwärzungen in bekannter Weise ermittelt werden können. Dies hat indessen den Nachteil, daß die Schwärzung dem Abfall der Lichtintensität entsprechend sehr stark abnimmt, so daß sie teils größer, teils kleiner ist als die Normalschwärzung. Es schien daher vorzuziehen eine Methode zu benutzen, bei der man von der Kenntnis des Zusammenhanges zwischen

Schwärzung und Intensität unabhängig ist. Dies läßt sich in folgender Weise erreichen.

Im Brennpunkt einer achromatischen Linse von 30 cm Brennweite befindet sich eine Lichtquelle von geringer Ausdehnung. Unmittelbar vor der Linse ist ein Spalt angebracht durch den nahe parallele Strahlen gehen. Dicht am Spalt ist ein rechteckiger Glastrog aufgestellt, der durch eine diagonal gestellte Glasplatte in zwei keilförmige Hälften geteilt ist (Fig. 3). Die eine Hälfte wird mit Wasser, die andere mit einer absorbierenden Flüssigkeit gefüllt vom Absorptionsindex k. Der Spalt befindet sich neben der Kanalstrahlenröhre und, wenn die den Trog durchsetzenden parallelen Strahlen auf dieselbe achromatische Linse fallen, welche den Kanalstrahl am Spaltorte des Spektrographen abbildet, so bilden sie auch den Spalt an demselben Orte ab (Fig. 4). Bei punktförmiger Lichtquelle ist es eine Abbildung wie durch eine Lochkamera, weil ein von der Lichtquelle ausgehender Strahl nur einen bestimmten Punkt des Spalts abbildet. Daher ist die Anordnung lichtschwach und es bedarf starker Lichtquellen, um genügende Lichtstärken zu erhalten. Seien a und b die beiden Lichtstrahlen, welche die durch den vertikalen Spalt gehenden Strahlen oben und unten begrenzen. Sei l die Entfernung des Strahles b vom Rande des Keils, β der Keilwinkel. Durch die Absorption ist der Strahl b im Verhältnis $e^{-k\,l\,\mathrm{tg}\,\beta}$ geschwächt, ein in der Entfernung y von b durch den Trog gehender Strahl (Fig. 3) im Verhältnis $e^{-k\,(l+y)\,\mathrm{tg}\,\beta}$. Der letztere Strahl ist also im Verhältnis $e^{-k\,y\,\mathrm{tg}\,\beta}$ mehr geschwächt als der Strahl b. Wir erhalten also bei einfarbigem Licht auf der Platte des Spektrographen als Bild

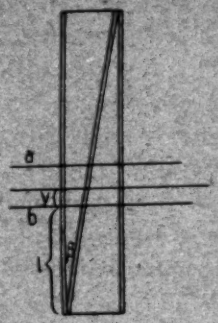


Fig. 3.

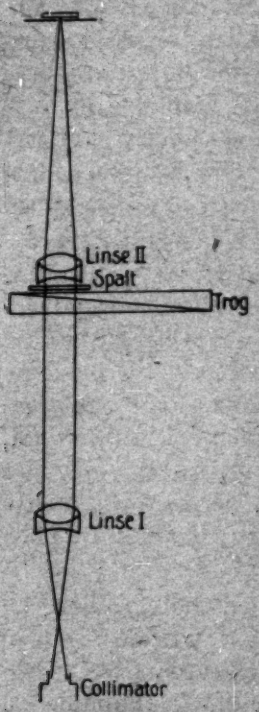


Fig. 4.

des Spalts einen Streifen mit abnehmender Schwärzung, die durch allmählich wie $e^{-k y \operatorname{tg}\beta}$ abnehmende Lichtstärke hervorgerufen wird.

Andererseits nimmt die Lichtstärke des Kanalstrahles wie $e^{-2\alpha t}$ ab, wenn t die Leuchtdauer bezeichnet und α die Dämpfungskonstante der Schwingungsamplitude. Ist die Geschwindigkeit der Strahlen v, so ist $t = y/v$, wo y die zurückgelegte Wegstrecke ist. Bei gleicher Entfernung des Spalts und des Kanalstrahls von der Linse I ist die Abbildung des Spalts und die des Kanalstrahls von gleicher Größe, daher die Strecken y in beiden gleich.

Nun muß die Lichtstärke der den Spalt beleuchtenden Lichtquelle, der Absorptionsindex k und der Winkel β so gewählt werden, daß bei gleicher Expositionsdauer der Schwärzungsabfall des vom Kanalstrahl erzeugten Bildes übereinstimmt mit dem Schwärzungsabfall des Spaltbildes. Um das zu erreichen wird zunächst durch Beobachtung mit dem Auge die Helligkeit des Spaltbildes mit dem der Kanalstrahlen durch Heben und Senken des Troges in Übereinstimmung gebracht. Bei der Schwäche der aus dem engen Spalt austretenden Kanalstrahlen waren nur die im grünen liegenden Spektrallinien sichtbar. H_α konnte in den Kanalstrahlen nicht durch das Auge wahrgenommen werden. Als Vergleichslichtquelle zur Beleuchtung des Spalts wurde zunächst eine Nernstlampe gewählt. Der Ort der einzelnen Farben wurde durch eine Geißlersche Röhre bestimmt. Schließlich hat es sich aber als wesentlich genauer herausgestellt nicht mit einem kontinuierlichen Spektrum zu vergleichen, sondern mit Spektrallinien von nahe gleicher Breite wie die Linien des Kanalstrahles.

Wenn der Schwärzungsabfall in beiden Bildern übereinstimmt, so ist

$$e^{-k y \operatorname{tg}\beta} = e^{-2\alpha t} = e^{-2\alpha \frac{y}{v}}.$$

$$2\alpha = k \operatorname{tg}\beta\, v = k \gamma v,$$

wo

$$\gamma = \operatorname{tg}\beta$$

gesetzt ist.

Für die absolute Bestimmung der Dämpfungskonstante α ist die Kenntnis von k, $\operatorname{tg}\beta$ und v erforderlich. Beim Vergleich verschiedener Spektrallinien ist nur die Abhängigkeit von k von der Wellenlänge zu bestimmen.

Die Tröge wurden aus Glasplatten mit Chotimskykitt oder Siegellack zusammengekittet. Folgende Tröge dienten zur Beobachtung:

Bezeichnung	γ	Bezeichnung	γ
Ia	0,055	Ib	0,054
Ia′	0,0545	Ib′	0,0552
IIa	0,0755	IIb	0,076
IIIa	0,089	IIIb	0,088
IVa	0,108	IVb	0,106
Va′	0,122	Vb	0,128
IIIa′	0,865		

Als absorbierende Flüssigkeit wurde zunächst Triazolschwarz *G* der Chemischen Fabrik Griesheim-Elektron verwendet, das ich der Freundlichkeit des Hrn. Prof. Emmert verdanke. Von der Gegend von H_β im Spektrum bis zum Ende des sichtbaren Teiles ändert sich der Absorptionsindex wenig mit der Farbe. Für Beobachtungen im Rot dagegen ist die Flüssigkeit unbrauchbar.

Es wurde daher später eine von Hrn. Goldberg[1]) empfohlene Mischung von Brillantschwarz und Violettschwarz der Badischen Anilin- und Sodafabrik und Naphtholgrün von L. Casella in Frankfurt a. M. verwendet. Es ist mir allerdings nicht gelungen eine Mischung von konstantem Absorptionsindex für das ganze Spektrum herzustellen, immerhin sind die Unterschiede nicht groß gewesen.

Diese Flüssigkeiten hatten den Nachteil, daß die organischen Farbstoffe durch die Kitte der Tröge etwas zersetzt wurden. Hierdurch änderte sich einerseits der Absorptionsindex, andererseits bildeten sich feste, in der Flüssigkeit schwebende Teilchen. Es mußte daher der Absorptionsindex beständig neu gemessen und die Flüssigkeit täglich durch Glaswolle filtriert werden. Leyboldsche Tröge mit Emaillekittung trafen infolge der Kriegsverhältnisse solange nach der Bestellung ein, daß diese Arbeit bereits abgeschlossen war. Die Absorptionsmessungen wurden mit Hilfe des Spektralphotometers von König-Martens ausgeführt. Anfänglich wurde eine Beleuchtungsvorrichtung improvisiert, später die Martenssche der Firma Schmidt und Hänsch benutzt. Da die

1) E. Goldberg, Zeitschr. f. wissenschaftl. Photographie 10. S. 244. 1912.

meisten Vergleichsmessungen mit den Wasserstofflinien ausgeführt sind, so wurden die Absorptionsindizes mit einer Geißlerschen Wasserstoffröhre für die einzelnen Wasserstofflinien bestimmt.

Die Ausmessung des Schwärzungsabfalls geschah mit dem Hartmannschen Mikrophotometer. Die von den Kanalstrahlen herrührende Spektrallinie, die ein Bild des Strahles darstellt, hat eine nicht unbeträchtliche Breite, weil der Strahl eine Tiefe von 3 mm hat und daher nicht in allen Teilen scharf abgebildet werden kann. Die Linie wird quer zum Schlitz des Mikrophotometers gelegt und die Schwärzung von Millimeter zu Millimeter oder in Sprüngen von $^1/_2$ mm gemessen, wenn Spaltbild und Spalt gleichgroß sind. Der Schwärzungsabfall der Vergleichslichtquelle ist bei kontinuierlichem Spektrum nicht so gut zu messen, weil er in der Nachbarschaft der zur Bestimmung der Wellenlänge überlagerten Linie einer Geißlerröhre gemessen werden muß. Eine Aufnahme mit kontinuierlichem Vergleichsspektrum und verkleinerten Bildern zeigt Tafel 1 Abb. II. Es wurde daher später nur noch mit Geißlerschen Röhren als Vergleichslichtquellen gearbeitet und mit einer Anordnung, bei der die Bilder von natürlicher Größe sind. Für die Wasserstofflinien hat dies den Nachteil, daß in der Geißlerröhre wegen des höheren Druckes die Linien der Balmer-Serie mit der Wellenlänge stärker an Lichtstärke abnehmen, als bei den Kanalstrahlen. War daher eine Linie des Vergleichsspektrums zum Vergleich wegen gleicher Schwärzung geeignet, so war häufig die andere wegen zu großer Verschiedenheit nicht brauchbar. Der Spalt des Vergleichspektrums war ungefähr 18 mm lang. Da gewöhnlich zum Vergleich die Länge von 10—12 mm herangezogen wurde, so blieb daher immer noch ein gewisser Spielraum übrig um bei den beiden zu vergleichenden Linien von Punkten gleicher Schwärzung auszugehen.

Bei geringen Schwärzungen ist die Messung des Schwärzungsabfalles ungenau, da dann die Einstellungsfehler zu groß sind im Vergleich mit dem zu messenden Schwärzungsunterschied. Man kann dann mit der Kontrastmethode arbeiten, indem man einfach beim Nebeneinanderhalten der zu vergleichenden Bilder durch Beurteilung des Kontrastes aussagen kann, ob die Schwärzung in einem Streifen schneller abnimmt als im anderen. Stellt man dann Aufnahmen mit verschiedenen Trögen her, so kann man den Schwärzungsabfall der Kanal-

strahlenlinie einschließen zwischen zwei Vergleichslinien, von denen die eine einen stärkeren, die andere einen schwächeren Schwärzungsabfall hat.

Es ist nicht zweckmäßig die Schwärzung der Kanalstrahlenlinie zuweit zu verfolgen, weil schließlich ein schwacher Rest des Leuchtens noch von der Erregung des ruhenden Gases im Beobachtungsraum herrührt, der schließlich mit dem von den bewegten Atomen ausgehenden Lichte vergleichbar ist. Dadurch kommt auch eine Ungenauigkeit beim Vergleichen von Spektrallinien von sehr verschiedener Intensität.

Für die wirklich verwendeten Messungen sind nur solche Aufnahmen ausgewählt, bei denen ausreichende und genügend übereinstimmende Schwärzungen erzielt waren.

5. Endgültige Versuchsanordnung.

Die anfänglich benutzte Methode, den Spalt für das Vergleichsspektrum neben die Kanalstrahlenröhre zu stellen, hat den Nachteil, daß die Aufnahmen des Kanalstrahles und des Spaltes durch den Absorptionstrog nicht gleichzeitig erfolgen können, weil der Abstand zwischen dem Spalt und dem Kanalstrahl zu groß ist. Man muß daher jedesmal den Spektrographen verschieben, da die Kanalstrahlenröhre nicht beweglich gemacht werden kann. Dieses Verschieben des Spektrographen hat aber große Nachteile, da auch bei geeigneter Führung doch die Genauigkeit der Einstellung Schaden nimmt. Außerdem geht viel Zeit verloren, da die beiden Aufnahmen nicht gleichzeitig erfolgen können. Es wurde daher die Anordnung in folgender Weise abgeändert:

Der Kanalstrahl tritt aus dem engen Spalt in eine Messingröhre, die in der Richtung des Spalts zwei Ausschnitte hat, die mit ebenen Quarzplatten verschlossen sind. Hierdurch schon wird die Abbildung des Kanalstrahles verbessert. Um jedoch alle unnützen Lichtverluste zu vermeiden, wird der Kanalstrahl selbst als Spalt benutzt und der Kollimator so nahe an die Röhre geschoben, daß der Kanalstrahl sich im Brennpunkt der Kollimatorlinse befindet. Der Spalt mit dem Absorptionstrog wird hinter der Kanalstrahlenröhre so aufgestellt, daß das Spaltbild durch eine achromatische Linse L_1 am Orte des Kanalstrahles abgebildet wird (Fig. 5). Auf der photographischen Platte erscheint dann für jede Spektral-

linie ein Bild des Kanalstrahles und daneben ein Bild des Spaltes (vgl. Tafel I Abbildung III und IV).

Es müssen jedoch die Entfernungen der beiden Spektren so gewählt sein, daß die sonst noch auftretenden Linien, be-

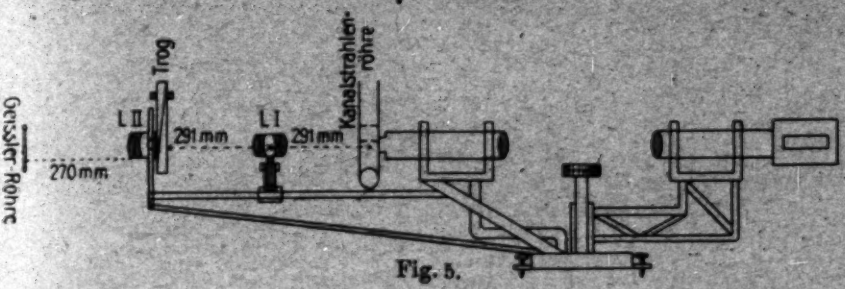


Fig. 5.

sonders bei der Geißlerschen Röhre das Viellinienspektrum, nicht stören.

Die Linsen *L* I uud *L* II sind dieselben wie in Fig. 4. Der Trog wird durch eine Klammer gehalten und kann leicht auf und ab geschoben werden.

Die Linse *L* I ist auf einer Schiene montiert und mikrometrisch verschiebbar. Die Linsen und der Trog sind mit dem Spektrographen fest verbunden, so daß die Einstellung nicht geändert wird, wenn der Spektrograph von der Kanalstrahlenröhre fortgeschoben werden muß. Als Vergleichslichtquelle wurde schließlich nur eine mit einem Induktorium betriebene Geißlersche Röhre verwendet. Die Röhre war schwarz angestrichen und nur in der Mitte der Kapillare eine Strecke von 1 cm Länge frei gelassen. Diese Lichtquelle befand sich im Brennpunkt der Linse II von 300 mm Brennweite. Die aus der Linse austretenden Lichtstrahlen sind wegen der Ausdehnung der Lichtquelle nicht streng parallel und legen daher im Absorptionsgefäß verschieden lange Wegstrecken zurück. Da aber die Länge der Lichtquelle von der Mitte aus nur je $^1/_2$ cm, der Abstand vom Linsenmittelpunkt 30 cm beträgt, so macht der größte Unterschied in der Weglänge weniger als $^1/_{1000}$ aus.

Zunächst wurden die beiden Linsen I und II und der Spalt zentrisch zur Kollimatorachse aufgestellt. Dann wurde die Geißlersche Röhre so verschoben, daß das durch den Spalt gehende Strahlenbündel gerade durch die Mitte der Linse I ging.

6. Prüfung der Versuchsbedingungen.

Um die von der Vergleichslichtquelle erzeugten Spektrallinien mit denen der Kanalstrahlen vergleichen zu können und auf die Abnahme der Lichtintensitäten zu schließen, müssen zunächst folgende Prüfungen vorgenommen werden. Es muß zunächst ohne Trog, beziehentlich ohne absorbierende Flüssigkeit, die Schwärzung auf der ganzen Länge der Spektrallinie gleich groß sein. Diese Prüfung wurde häufig vorgenommen um sicher zu sein, daß nicht durch Veränderung des Strahlenganges schon Änderungen der Intensität für die einzelnen Teile einer Spektrallinie eintreten.

Der Spalt wurde so breit gemacht, daß die Breite der Spektrallinie des Vergleichsspektrums ungefähr mit der Breite der Linie der Kanalstrahlen übereinstimmte. Genau läßt sich das nicht erreichen, weil die Spektrallinien des Vergleichsspektrums keinen Abfall der Intensität nach beiden Seiten zeigen, wie das bei den Kanalstrahlen besonders durch die Unschärfe der Abbildung des 8 mm tiefen Kanalstrahlenbündels der Fall ist. Es hat sich jedoch gezeigt, daß dieser Umstand auf die Messungen ohne Einfluß war.

Die Linse I wurde so eingestellt, daß das Spaltbild dieselbe Größe hat wie der Spalt selbst. Um dies festzustellen, wurde zunächst beim Spektrographen selbst die Größe des Spaltbildes mit dem Spalt verglichen. Nachdem der Spektrograph für das sichtbare Gebiet und das Ultraviolett bis etwa 330 $\mu\mu$ scharf eingestellt war, wurde ein Papierstreifen von 5 mm Breite auf den Spalt geklebt und die Breite auf der photographischen Platte gemessen. Im grünen sind Spalt und Bild von gleicher Größe, im ultravioletten ist das Bild wegen der kürzeren Brennweite etwas kleiner. Doch beträgt der Unterschied zwischen 440 $\mu\mu$ und 320 $\mu\mu$ nur ungefähr 2 Proz.

Nach der Einstellung des Spektrographen wurde der Spalt von ihm fortgenommen und das Kollimatorrohr an das Fenster der Kanalstrahlenröhre soweit herangeschoben, bis ein scharfes Bild des Strahles für jede Spektrallinie entstand. Da der Spalt der Vergleichslichtquelle durch eine achromatische Linse am Ort der Kanalstrahlen abgebildet wird, so sind im Spektrographen die von den Kanalstrahlen erzeugten Spektrallinien denselben optischen Bedingungen unterworfen, wie die der Vergleichslichtquelle. Es ist daher nur noch dafür zu sorgen, daß die Spaltbilder der letzteren dem Spalt der Vergleichslicht-

quelle an Größe gleich sind. Dies wurde durch Verschieben der Linse I erreicht.

Ferner mußten scharfe Linien im Spektrographen erhalten werden sowohl wenn der Spalt unmittelbar oder wenn er durch die im Brennpunkte der Linse II stehenden Geißlerröhre beleuchtet wurde. Schließlich wurde noch festgestellt, daß ein 6 mm vor dem Spalt (d. h. in der Dicke der Absorptionsschicht) befindlicher Papierstreifen durch die parallelen Strahlen scharf abgebildet wurde. Hierdurch war gesichert, daß die Strahlen die absorbierende Schicht parallel durchsetzen. Nachdem so die Einstellung beendet war, mußte noch festgestellt werden, daß die verschiedenen Lichtstärken entsprechenden Schwärzungen beim Betriebe der Geißlerschen Röhre mit dem Induktionsapparat dieselben waren, wie bei einer mit Gleichstrom betriebenen Lichtquelle. Denn die Kanalstrahlen wurden mit einer vierzigplattigen Influenzmaschine erzeugt.

Hierfür wurde folgender Weg beschritten.

Vor den Spalt eines Hilgerschen Quarzspektrographen wird eine Mattglasscheibe gesetzt und diese entweder durch eine Nernstlampe oder durch eine Geißlersche Wasserstoffröhre beleuchtet. Der Spalt wird zur Hälfte mit einer geschwärzten photographischen Platte verdeckt. Hierzu werden Plattenstücke verschieden starker Schwärzung verwendet. Es wird nun eine photographische Aufnahme mit der Nernstlampe gemacht, darauf mehrere auf derselben Platte von gleicher Dauer und verschiedenem Abstand der Mattscheibe mit der Geißlerschen Röhre, die mit demselben Induktionsapparat betrieben wird, der für die Röhre, die als Vergleichslichtquelle bei den Messungen diente, verwendet war. Bei diesen Aufnahmen war die Entfernung der Geißlerschen Röhre von der Mattglasscheibe verändert. Von diesen Aufnahmen wird die gewählt, deren Schwärzung mit der von der Nernstlampe für die gleiche Farbe übereinstimmt. Es wird dann für beide die durch Absorption geschwächte Schwärzung mit der ungeschwächten vermittels des Mikrophotometers verglichen.

Im folgenden (S. 612) sind die Ergebnisse zusammengestellt. Man ersieht aus diesen, unter sehr verschiedenen Schwärzungsbedingungen angestellten Messungen, daß kein erkennbarer Unterschied besteht in den Schwärzungen, die von gleich-

mäßiger Belichtung oder einer durch einen Induktionsapparat betriebenen Geißlerschen Röhre herrühren.

Platte	Spektrallinie	Belichtungsdauer	Absorption d. schwächend. Platte in Proz.	Stellung des Photometerkeils für das ungeschwächte		für das geschwächte	
				Nernstl.	G. R.	Nernstl.	G. R.
C Hauff	H_β	$1^1/_2$ St.	95,8	60,0	60,3	44,5	44,2
D „	450 $\mu\mu$	„	95,8	72,0	72,3	45,5	45,5
E „	H_β	$1^3/_4$ St.	95,8	59,6	59,6	46,5	46,5
F „	H_γ	1 St.	78	67,9	67,8	57,9	57,9
G „	H_β	„	78	69,2	68,8	60,4	60,3
H „	H_β	„	78	68,2	68,2	58,3	58,3
H „	H_γ	„	78	62,0	62,0	53,3	53,3
B „	H_β	$1^1/_2$ St.	95,8	72,0	72,2	54,9	55,1
I „	H_γ	1 St.	58	63,1	64,2	58,9	60,6
I „	H_β	„	58	64,3	63,7	59,0	58,4
K „	H_β	„	58	72,	71,8	67,4	67,2
K „	H_γ	„	58	71,5	70,5	64,2	63,4
L rotempf. Platte	H_α	2 St.	58	71,2	71,0	65,9	65,7
M „	H_α	„	58	63,5	62,1	58,8	57,3
N „	H_α	„	78	54,2	52,3	48,5	47,0
O „	H_α	„	78	79,0	79,0	61,0	61,1
O „	H_β	„	78	65,2	65,0	53,6	53,6

7. Auswertung der Schwärzungskurven.

Wenn die leuchtenden Atome durch größere Dämpfung oder infolge geringerer Geschwindigkeit auf kürzeren Strecken abklingen, so wird der Schwärzungsabfall ein steilerer sein. Punkte von bestimmtem Schwärzungsunterschied rücken dann näher zusammen. Wenn man daher die Abszissen der Schwärzungskurven verkleinert, so erhält man eine Kurve, die einer stärkeren Abklingung entspricht. Dasselbe ist bei dem Absorptionstroge der Fall. Man kann hier die Intensitätsabnahme und damit die Abnahme der Schwärzung entweder durch Vergrößerung des Keilwinkels des Absorptionstroges oder durch Wahl einer stärker absorbierenden Flüssigkeit steigern. Wenn nun bei einer bestimmten absorbierenden Flüssigkeit vom Absorptionsindex k eine Schwärzungskurve gemessen ist, so ist damit von einer bestimmten Anfangsintensität und Schwärzung an abwärts der Zusammenhang zwischen Intensität und Schwärzung bekannt. Denn die Intensität nimmt im Verhältnis $e^{-\gamma k y}$ ab und die Schwärzung ist für jedes y durch die Beobachtung bestimmt. Die Schwärzung ist nach der üb-

lichen Definition der Logarithmus des Verhältnisses der auf die geschwärzte Schicht fallenden Lichtintensität zur durchgelassenen. Sie wird durch die Ablesungen der Keilstellungen des Mikrophotometers bestimmt, so daß $\mathfrak{S} = f(\mathfrak{K})$ ist, wenn $\mathfrak{S}$ die Schwärzung, $\mathfrak{K}$ die Keilstellung bezeichnen. Die Intensität des Lichtes, das die Schwärzung hervorgebracht hat, ist $i_0 e^{-\gamma k y}$. Von dieser hängt die Schwärzung ab, so daß wir setzen können

$$\mathfrak{S} = F(k y) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{K} = \Phi(k y).$$

Ändern wir k in k_1, so wird $\mathfrak{K} = \Phi(k_1 y)$. Wir erhalten gleiche Werte für $\mathfrak{K}$, wenn wir für $k y$ setzen $k_1 y'$, wo $k y = k_1 y'$ ist. Wir erhalten also die Kurve $\Phi(k_1 y)$ aus $\Phi(k y)$, wenn wir in der letzteren die y durch

$$y' = y \frac{k}{k_1}$$

ersetzen. Bei dieser Transformation muß

$$i_0 e^{-\gamma k y} dy = i_0' e^{-\gamma k_1 y'} dy'$$

sein, was der Fall ist, wenn wir

$$i_0 e^{-\gamma k y} dy = i_0 e^{-\gamma k_1 (y' + l)} dy'$$

setzen, also

$$\frac{dy'}{dy} = e^{\gamma k_1 l} = \frac{k}{k_1} = \frac{i_0}{i_0'}.$$

Dies bedeutet nur eine Verlegung des Nullpunktes der y'.

Wenn daher die Schwärzungskurve der Vergleichslinie nicht mit der der Kanalstrahlenlinie übereinstimmt, so kann durch geeignete Wahl von k_1/k und entsprechender Veränderung der Abszissen eine neue Kurve erhalten werden. Vergleicht man diese mit der Kanalstrahlenkurve für gleiche Schwärzungen und stimmen dann beide überein, so ist anstatt γk zu setzen γk_1.

Zur Prüfung dieser Überlegungen wurde folgender Weg beschritten. Es wurden Aufnahmen mit den fünf Absorptionströgen gemacht, deren Abmessungen S. 606 gegeben sind. Dann wurde der Absorptionsindex so gewählt, daß die Schwärzungskurven der Spektrallinien der Kanalstrahlen von denen der Vergleichslinien eingeschlossen wurden. Dabei zeigte sich, daß die Genauigkeit der ganzen Beobachtung nicht wesentlich weiter zu treiben war, als dem Unterschiede der Tröge III gegenüber II und IV entspricht. Wenn die Schwärzungskurven für Trog III mit den der Kanalstrahlen übereinstimmt, so weichen die Kurven für Trog II nach der einen, für Trog III

nach der anderen Seite merklich ab, was einer Genauigkeit von etwa 20 Proz. entspricht. Eine größere Genauigkeit war bei den 8—12stündigen Belichtungszeiten und der Schwierigkeit, alle Verhältnisse unverändert zu lassen, nicht zu erreichen. Für die Beobachtungen wurden zwei Plattenarten verwendet: Hauff Ultrarapid und die rotempfindliche Platte von Wratten und Wrainwright, letztere zur Beobachtung von H_α.

Während des späteren Verlaufes des Krieges waren die englischen Platten nicht mehr zu erhalten. Doch war noch ein kleiner Vorrat vorhanden teils aus dem Jahre 1916, teils aus der Zeit vor dem Kriege. Sämtliche Platten erwiesen sich als durchaus brauchbar und ohne Neigung zu Schleierbildung.

Die besprochene Methode der photographischen Photometrie hat den Vorteil, daß sie von allen Platteneigenschaften unabhängig ist. Gelegentlich wurde absichtlich durch Hydrochinonentwickler starke Schleierbildung hervorgerufen, ohne daß ein Einfluß auf die Ergebnisse zu bemerken gewesen wäre. Im allgemeinen wurde mit Glycinentwickler gearbeitet.

8. Verlauf des Schwärzungsabfalls in den verschiedenen Spektrallinien.

Wenn der ganze Kanalstrahl von dem Austrittsspalt an durch den Spektrographen abgebildet wird, so sieht man bei Wasserstoffkanalstrahlen in unmittelbarer Nähe des Spalts einen, wie von einem kontinuierlichen Spektrum herrührenden, ganz schmalen Streifen, der von dem Viellinienspektrum stammt, das in der Nachbarschaft des Spalts wegen der dort vorhandenen größeren Gasdichte auftritt, Taf. I, Abb. V. Aber schon in kleiner Entfernung hört dieses Spektrum vollständig auf und man sieht von den Wasserstofflinien nur die Linie der Balmerserie mit schnell abnehmender Schwärzung. Außer diesen Linien tritt noch gewöhnlich die Quecksilberlinie 365 $\mu\mu$ auf, die trotz der Kühlung mit fester CO_2 selten ganz verschwindet. Immerhin ist die Linie erheblich schwächer als H_β, H_γ und selbst H_δ. Die Quecksilberlinie zeigt nun den starken Schwärzungsabfall der H-Linie nicht, sondern stellt nur einen allmählich etwas auseinandergehenden Strahl dar, dessen Hauptintensität aber doch in der Mitte vereinigt bleibt. Die Quecksilberlinie wird ja auch unter anderen Bedingungen erregt, wie die H-Linie. Während die letzteren von den bewegten

Wasserstoffatomen ausgesandt werden, die im dichten Gase erregt in der höheren Luftverdünnung abklingen, werden die Quecksilberlinien im Quecksilberdampf erregt, für den kein Dichtigkeitsunterschied zwischen Entladungs- und Beobachtungsraum besteht und bei dem daher kein bemerkbares Abklingen eintreten kann, weil die Linien immer wieder neu erregt werden. Man kann daher aus dem Verlauf der Schwärzung der Quecksilberlinien Anhaltspunkte über den Verlauf des Strahls gewinnen namentlich für die Frage, ob die Divergenz des Kanalstrahles bereits eine merkliche Abnahme der Schwärzung bedingt. Da die Quecksilberlinie 365 $\mu\mu$ bei der Kühlung mit fester CO_2 für Messungen zu schwach war, so wurde eine Aufnahme mit Wasserstoffkanalstrahlen ohne Kühlung gemacht, wobei diese Linie sehr stark auftrat, während die Linie 404,7 $\mu\mu$ wesentlich schwächer war. Man erkennt aus den beiden Schwärzungskurven Figg. 6 und 7, daß eine schwache Abnahme der Schwärzung infolge der Divergenz und der Zerstreuung des Kanalstrahles eintritt.

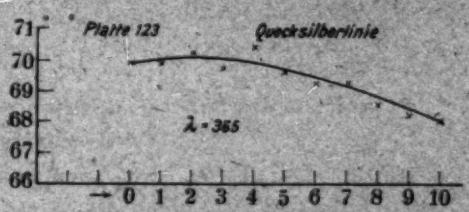


Fig. 6.

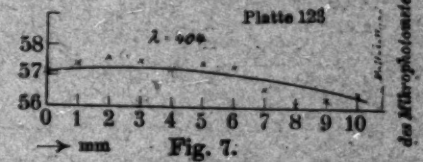


Fig. 7.

In Fig. 8 ist die Linie 365 der Platte 123 verglichen mit dem Schwärzungsabfall der Wasserstofflinie H_β einer anderen Platte, bei der die Schwärzung beim Austritt aus dem Spalt nahe die gleiche ist, wie bei der Quecksilberlinie. Der durch Vergleichung mit einer anderen Platte gemachte Fehler ist gering, wie durch Vergleich verschiedener Platten festgestellt werden konnte. Wenn man die Abszissen der Schwärzungskurve der Wasserstofflinie verzehnfacht, so erhält man eine Kurve, die nahe gleiches Schwärzungsgefälle hat, wie die Quecksilberlinie 365 $\mu\mu$. Man kann daher bei Wasserstoff, die durch die Divergenz und Zerstreuung bewirkte Abnahme der Intensität auf etwa 10 Proz. der durch das Abklingen hervorgerufenen schätzen. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß der Strahl durch den Quecksilberdampf diffus wird und da-

durch an Divergenz zunimmt. Ohne Kühlung beträgt der Druck des Quecksilberdampfes 0,001 mm Hg, also nicht viel weniger als der Druck bei Wasserstoffüllung und mehr als bei

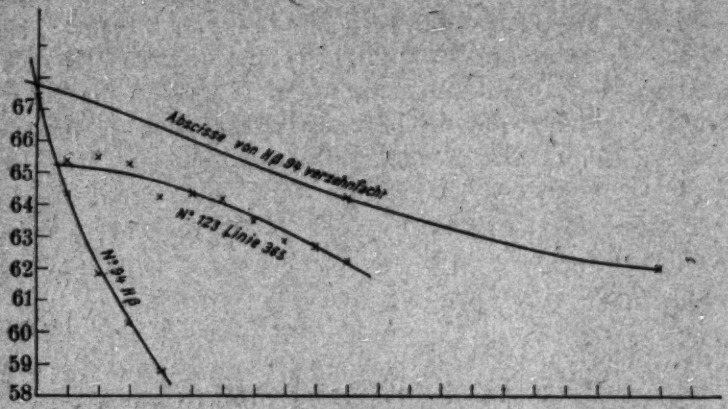


Fig. 8.

Sauerstoff- und Stickstoffüllung. Da nun die Zerstreuung der Kanalstrahlen bei schweren Atomen größer ist, so wirkt der Quecksilberdampf ohne Kühlung stärker zerstreuend als die Gasreste. Bei den Messungen war der Quecksilberdampf durch Kühlung vermindert und es ist die durch Divergenz eintretende Abnahme der Intensität unter 10 Proz. der durch das Abklingen hervorgerufenen zu veranschlagen.

Andererseits findet auch im Beobachtungsraum noch eine Lichterregung statt, da der Gasdruck immerhin einige Prozent des Druckes im Beobachtungsraum ausmacht. Hierdurch wird die Intensitätsabnahme wieder verringert. Da indessen diese Korrektionen kleiner sind als die Beobachtungsfehler, so wurde von ihnen ganz abgesehen.

Stärker ist der Schwärzungsabfall der Quecksilberlinien bei Sauerstoff- und Stickstoffstrahlen. Fig. 9 zeigt den Schwärzungsabfall der Hg-Linien 435,8 und 365 in Sauerstoffkanalstrahlen. Das Gefälle der O-Linie 464,9 stimmt bei verdreifachter Abszisse ungefähr mit den der Hg-Linie überein. Hier würde also die Intensitätsabnahme durch die Divergenz ungefähr 80 Proz. der durch das Abklingen der Sauerstoffatome hervorgerufenen ausmachen, eine Zahl, die jedoch auch mit Rücksicht auf den bei den Beobachtungen vorhandenen ge-

ringeren Quecksilberdampfdruck kleiner angenommen werden muß.

Eigentümlich ist noch das Auftreten zweier starker Linien im Ultraviolett bei Stickstoff- und Sauerstoffkanalstrahlen. Diese Linien sind ganz kurz, das Licht kommt also nur aus der unmittelbaren Nachbarschaft des Spaltes, Taf. I, Abb. VI. Sie unterscheiden sich jedoch von den ebenfalls nur ganz nahe am Spalt sichtbaren Linien des Viellinienspektrums des Wasserstoffes dadurch, daß sie diffus nach beiden Seiten sich verbreitern.

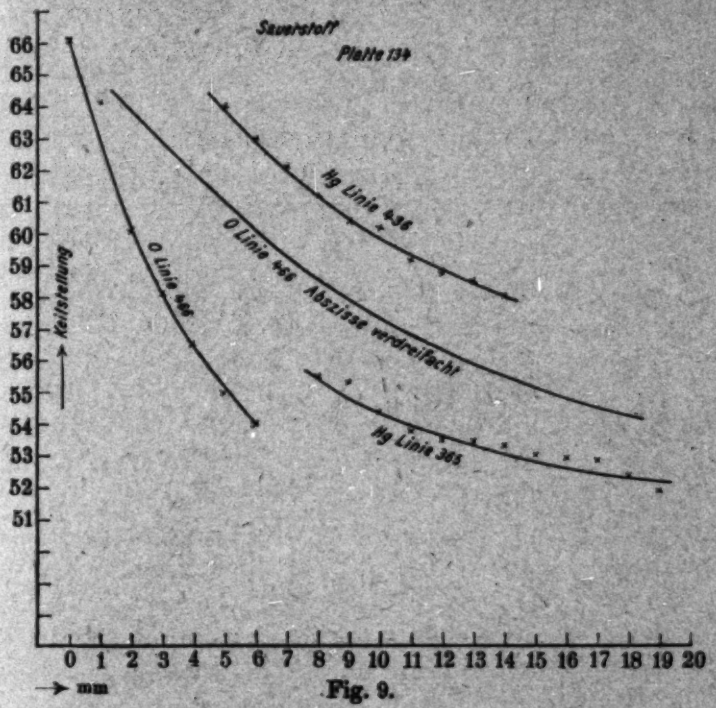


Fig. 9.

Um die Wellenlängen genauer festzustellen als bei den unscharfen Grenzen des Strahles möglich war, wurde der Quarzspektrograph wieder mit seinem Spalt versehen, der Spalt, aus dem die Kanalstrahlen austreten, anvisiert und dabei das Licht in der Nachbarschaft des Spaltes der Kanalstrahlen auf dem Spalt des Spektrographen mit einer Quarzlinse abgebildet. Hier zeigte sich, daß die beiden starken Linien die *Kupferlinien 327,4 μμ und 324,8 μμ* sind. Diese Linien entstehen dadurch, daß durch die Kanalstrahlen Kupfer aus dem Messing

Spaltes verdampft und durch die Kanalstrahlen zum Leuchten erregt wird. Nicht erklärt ist dabei die seitliche diffuse Ausbreitung, die beträchtlich stärker ist als bei den Sauerstofflinien. Ob es sich wirklich um bewegte Kupferatome handelt, deren Leuchten schnell abklingt, ist zweifelhaft.

9. Ergebnisse.

Wasserstoff.

Schon die Vorversuche hatten ergeben, daß keine merklichen Unterschiede in den Abklingungszeiten für die einzelnen Spektrallinien vorhanden sind. Die Länge der Linien mit größerer Gliednummer war niemals größer als die einer vorangehenden. Sie sind vielmehr der abnehmenden Intensität entsprechend kürzer. Wirklichen Aufschluß über die tatsächlichen Verhältnisse konnten nur die Messungen selbst geben.

Da der Strahl, der aus dem engen Spalt austritt, recht schwach ist, so waren lange Belichtungen erforderlich, bei Hauffplatten 6 Stunden bei engem Kanalstrahlspalt. Bei den rotempfindlichen Platten genügten aber bei engem Spalt 12 Stunden noch nicht, um ausreichende Schwärzung zu erhalten. Die Aufnahmen mit H_α mußten daher mit dem weiteren Spalt gemacht werden. Bei diesen Aufnahmen wurde dann gleich H_β erhalten. Mit engem Spalt sind Aufnahmen von H_β und H_γ gemacht. H_δ war für wirkliche Messungen

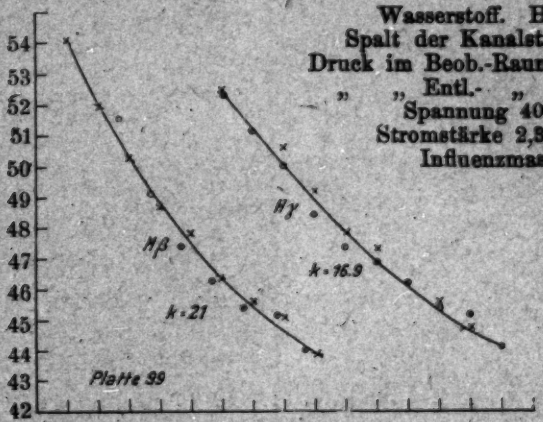


Fig. 10.

nicht stark genug. Das Vergleichsspektrum wurde gleichzeitig und mit gleicher Belichtungsdauer hergestellt. Fig. 10 gibt

ein Beispiel von Schwärzungskurven des Kanalstrahlenspektrums und des Vergleichsspektrums.

Durchweg sind die Punkte der Schwärzungskurven des Kanalstrahlenspektrums mit ×, die des Vergleichsspektrums mit ⊙ bezeichnet. Man sieht aus Fig. 10, daß beide Spektra sowohl für H_β wie für H_γ übereinstimmen für Trog III a'; k ist der Absorptionsindex der Flüssigkeit im Troge.

Figg. 11—20 geben andere Beispiele. Fig. 11 gibt eine

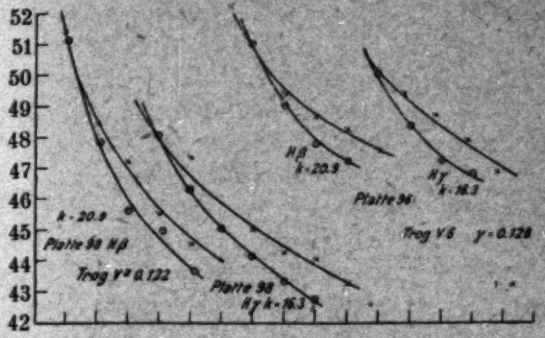


Fig. 11.

Aufnahme mit Trog V a' mit großem Keilwinkel. Man sieht, daß das Schwärzungsgefälle der Vergleichslinie H_β größer ist In Fig. 12 ist die Aufnahme mit einem Troge von kleinem

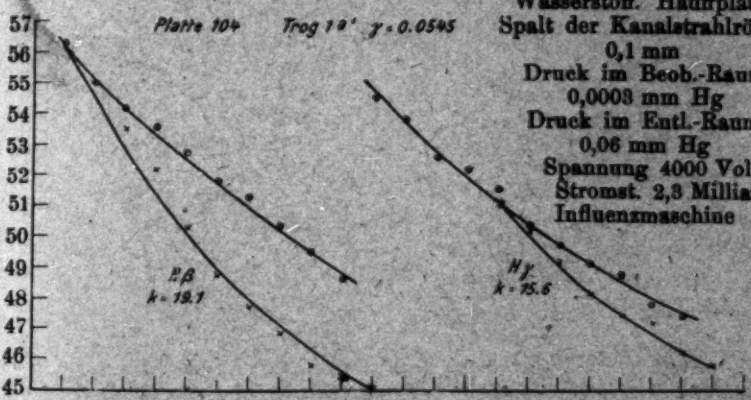


Fig. 12.

Keilwinkel gemacht. Hier ist das Schwärzungsgefälle der Vergleichslinien von H_β und H_γ erheblich geringer.

In Fig. 13 sind die Abweichungen schon kleiner, ebenso in Fig. 14, in beiden liegen sie nach entgegengesetzten Seiten.

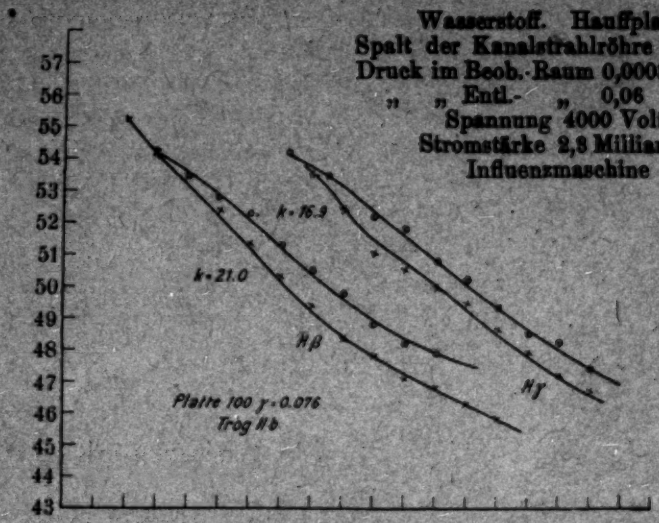


Fig. 13.

Man sieht, daß der Keilwinkel von Trog II a zu klein, von Trog IV b zu groß ist. Ebenso ist für H_α und H_β, wie aus

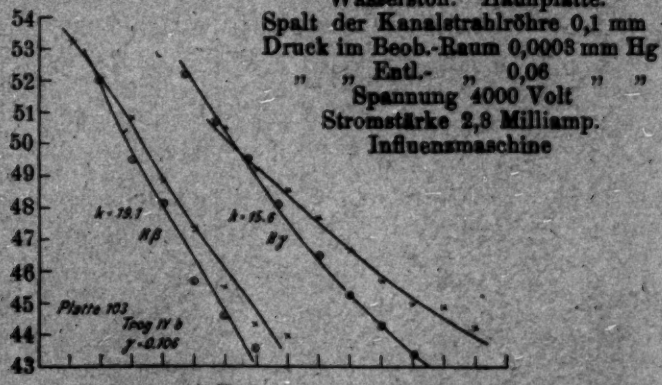


Fig. 14.

Fig. 15 hervorgeht, der Keilwinkel zu groß. Die Figg. 16—19 zeigen, daß der Keilwinkel von Trog III a nahe richtig ist. Die Aufnahme Fig. 20 ist mit Hydrochinon entwickelt und zeigt starken Schleier, was indessen trotz der starken absoluten Schwärzung auf die Messung keinen Einfluß hat.

Bei den Aufnahmen mit den Hauffplatten wurde als absorbierende Flüssigkeit verdünntes Triazolschwarz *G* benutzt,

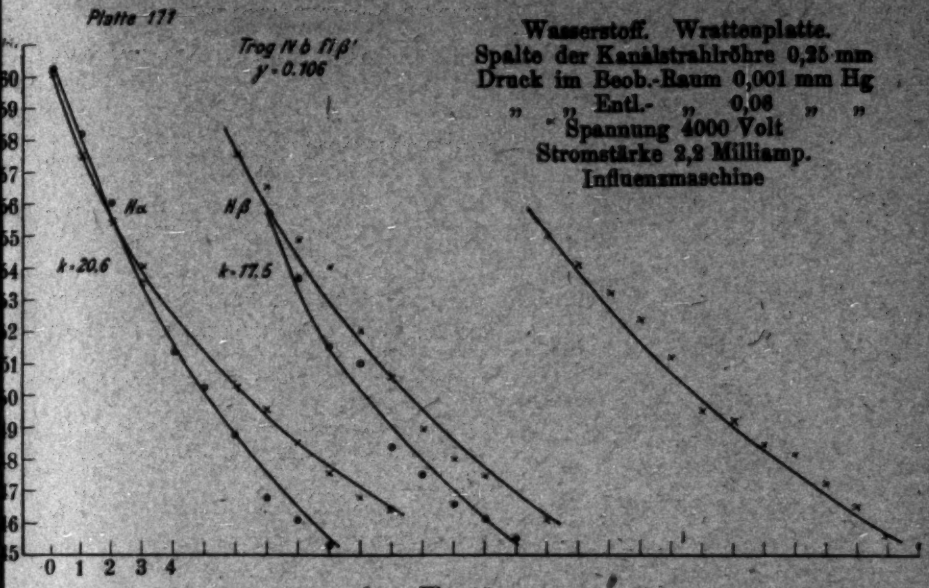


Fig. 15.

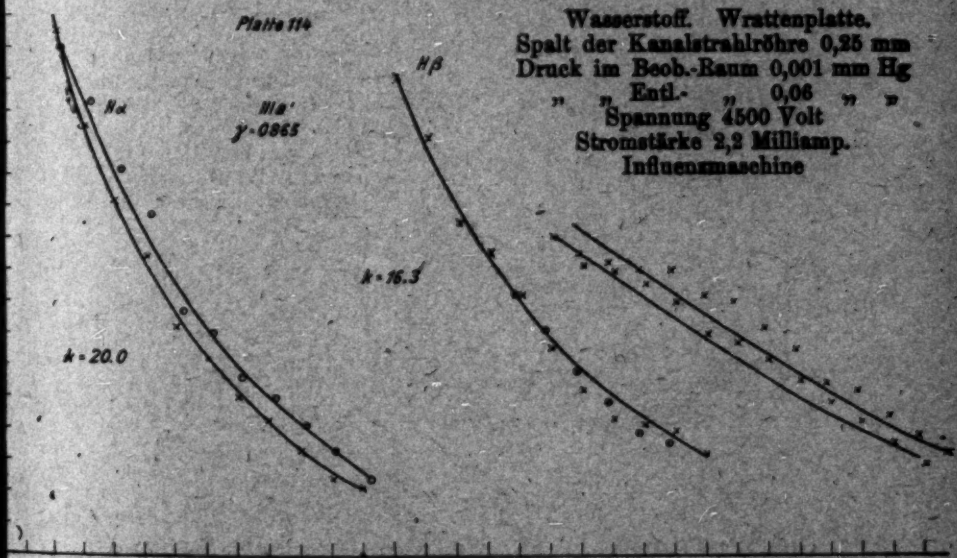


Fig. 16.

bei den Wrattenplatten die S. 606 beschriebene zusammengesetzte Flüssigkeit. In den Tabellen I und II sind die Ergebnisse der

Tabelle I.

Nr.	Spannung	Trog	Absorptionsindex k H_α	H_β	H_γ	Spaltbreite im Kanalstrahlrohr	Druck	γ	$k\gamma$ H_α	H_β	H_γ	
89	4000	Va′		20,2	16,8	0,1	0,0003	0,122		1,94		umgerechnet
91	4000	Ia′		20,3	17,2	0,1	0,0003	0,0545		1,88	2,06	„
94	4000	IIb		20,3	17,2	0,1	0,0003	0,076		1,82	1,70	„
95	4000	IIIa′		20,9	16,3	0,1	0,0003	0,0865		1,80		
96	4000	Vb		20,9	16,3	0,1	0,0003	0,128		1,68		umgerechnet
97	4000	IVb		20,9	16,3	0,1	0,0003	0,106		1,78		„
98	4000	Va′		20,9	16,3	0,1	0,0003	0,122		1,92	1,46	„
99	4000	IIIa′		21,0	16,5	0,1	0,0003	0,0865		1,80	1,46	
100	4000	IIb		21,0	16,9	0,1	0,0003	0,076		2,00	1,55	umgerechnet
101	4000	Ia′		19,1	15,6	0,1	0,0003	0,0545			1,92	„
102	4000	IVb		19,1	15,6	0,1	0,0003	0,106		1,70	1,65	„
103	4000	IVb		19,1	15,6	0,1	0,0003	0,106		1,60	1,40	„
104	4000	Ia′		19,1	15,6	0,1	0,0003	0,106		1,78	1,40	
									Mittel =	1,81	1,62	

Mittelwert der nicht umgerechneten Beobachtungen 1,80

Tabelle II.

Nr.	Spannung	Trog	Absorptionsindex k H_α	H_β	H_γ	Spaltbreite im Kanalstrahlrohr	Druck	γ	$k\gamma$ H_α	H_β	H_γ	
76	4500	IIIb		24,4	20,5	0,1	0,0003	0,088		2,14	1,80	
109	4500	IIIa′	20,2	27,7		0,25	0,0012	0,0865	1,75	1,55		
110	4500	IVb	20,0			0,25	0,0013	0,106	2,12			
111	4500	IVb	20,6	17,5		0,25	0,0012	0,106	1,73	1,48		umgerechnet
112	4500	IIIa′	20,0	16,3		0,25	0,0012	0,0865	1,73	1,41		
113	4500	IVb	20,0	16,3		0,25	0,0012	0,106	1,70	1,40		umgerechnet
114	4500	IIIa′	20,0	16,3		0,25	0,0012	0,0865	1,73	1,40		
115	4500	IIIa′	20,0			0,25	0,0012	0,0865	1,73			
117	4500	IIIa′	19,0			0,25	0,0012	0,0865	1,65			
119	4500	IIIa′	17,4	15,0		0,25	0,0012	0,0865	1,51	1,36		
120	4500	IIIa′	17,3			0,25	0,0012	0,0865	2,05			umgerechnet
125	4500	IIIa′	22,0	19,5		0,25	0,0012	0,0865	2,10	1,68		
126	4500	IIIa′	22,0	19,5		0,25	0,0012	0,0865		1,95		umgerechnet
130	4500	IIIa′	22,0	20,0		0,25	0,0012	0,0865	1,90	1,74		
131	4500	IIIa′	22,0	20,0		0,25	0,0012	0,0865	1,90	1,74		
132	4500	IIIa′	22,0	20,0		0,25	0,0012	0,0865	1,90	1,74		
137	4500	III	20,1	18,4		0,25	0,0012	0,092	2,20	2,02		umgerechnet
141	4500	III		19,4	20,2	0,25	0,0015	0,092		1,78	1,86	Hauffplatte
									1,84	1,67	1,83	
142	2000	Vb′		19,4	20,2	0,25	0,0025	0,128		2,5		
143	2000	Vb′		19,4	20,2	0,25	0,0025	0,128		2,5		
Mittelwert der nicht umgerechneten Beobachtungen									1,85	1,64		

Beobachtungen zusammengestellt, soweit sie auf wirklichen Messungen beruhen. Es sind nicht nur die Messungen ver-

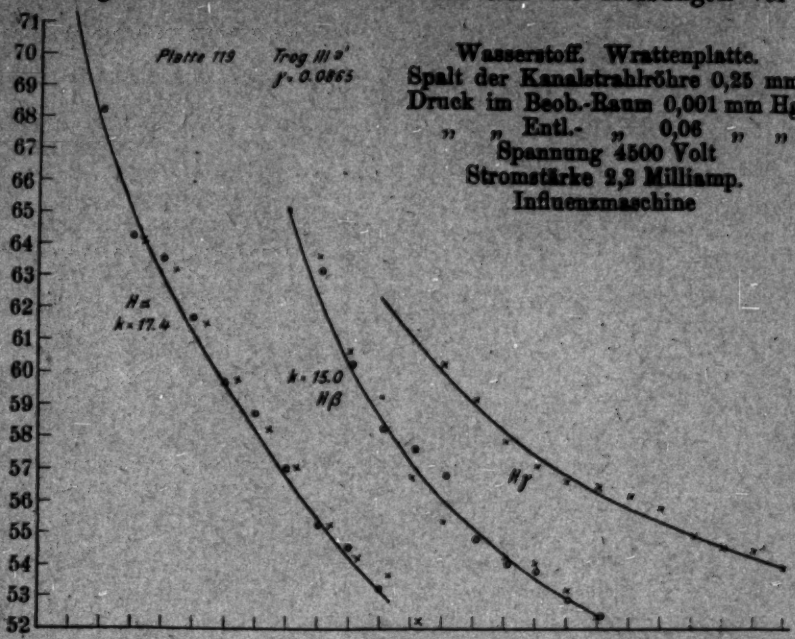


Fig. 17.

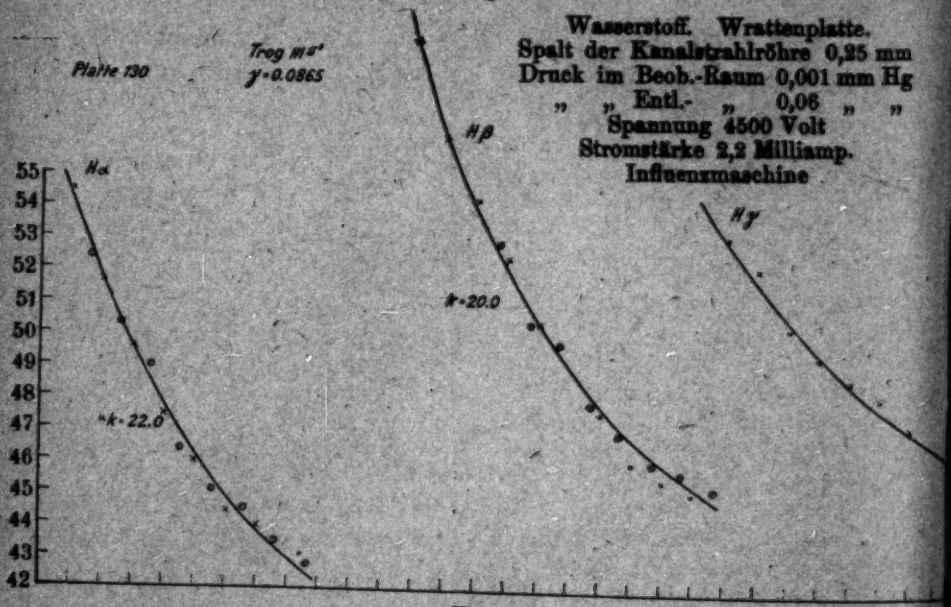


Fig. 18.

wendet, bei denen die Schwärzungskurven übereinstimmen. Es sind auch solche benutzt, bei denen Abweichungen vor-

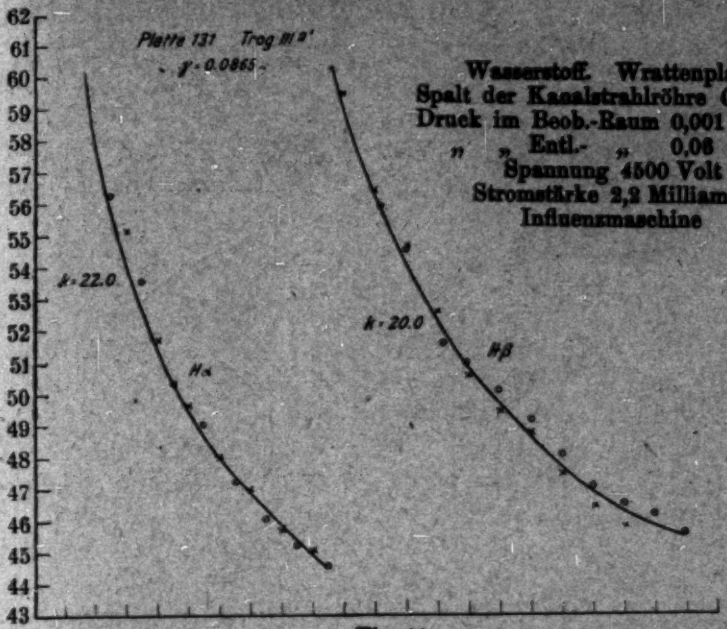


Fig. 19.

handen sind. Diese sind dann nach dem S. 612 besprochenen Verfahren umgerechnet. Diese sind mit dem Zusatz umge-

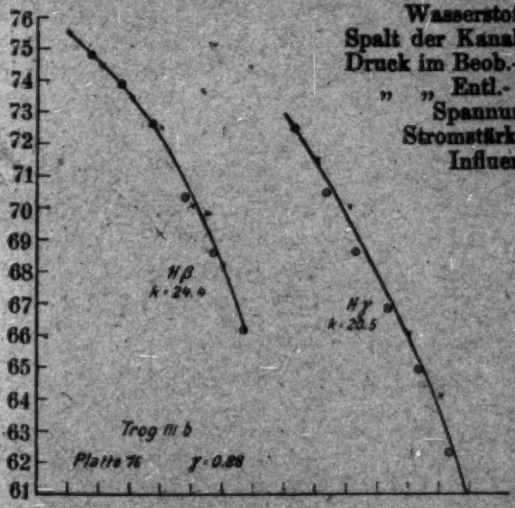


Fig. 20.

rechnet versehen. H_γ ist auf den Wrattenplatten nicht mit einer Vergleichslinie verglichen, weil die Intensitätsverhältnisse nicht bei allen drei Linien genügend in Übereinstimmung zu bringen waren.

Wenn wir zunächst in Tabelle II die für gleiche Spannung gefundenen Werte von $k\gamma$ für H_α und H_β vergleichen, so sind die Mittelwerte 1,84 und 1,67 durchaus innerhalb der Beobachtungsfehler voneinander verschieden. Auch dem etwas größeren Unterschied zwischen H_β und H_γ in Tabelle I möchte ich keine entscheidende Bedeutung beimessen. Fast genau die gleichen Werte erhalten wir, wenn wir nur die Beobachtungen verwerten, bei denen keine Umrechnung erforderlich ist.

Wir werden daher zu der Schlußfolgerung geführt, daß die zahlreichen Messungen zu Werten führen, die bei den Spektrallinien H_α, H_β, H_γ nahe gleich sind, so daß die Abweichungen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegen.

Da es möglich ist, die Schwärzungskurven der Kanalstrahllinien mit denen der Vergleichslinien zur Deckung zu bringen, so muß das Gesetz der Intensitätsänderung in beiden gleich sein. Das Abklingen erfolgt daher tatsächlich nach dem Gesetz e^{-2at}. Taf. I, Abb. III zeigt eine Wasserstoffaufnahme für H_β und H_γ (Hauffplatte), Taf. I, Abb. IV eine solche für H_α und H_β (Wrattenplatte) mit den Vergleichslinien.

10. Das Abklingen des Leuchtens bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Kanalstrahlen.

Aus Tabelle II, Platte 142 und 143 geht hervor, daß der Wert von $k\gamma$ für Kanalstrahlen von kleinerer Geschwindigkeit größer wird. Dies muß der Fall sein, wenn die Dämpfungskonstante $2a = k\gamma v$ von der Geschwindigkeit unabhängig ist.

Es wurden mehrere Aufnahmen mit Kanalstrahlen von einer Spannung von 2000 Volt und einer solchen von 4500 Volt gemacht und zwar auf derselben Platte, um den Schwärzungsabfall beider miteinander vergleichen zu können. Da die Intensität der Strahlen bei 2000 Volt erheblich kleiner ist, so wurden nur Aufnahmen mit Hauffplatten, also nur für die Linien H_β und H_γ gemacht. Damit die Schwärzung bei den zu vergleichenden Aufnahmen schon beim Strahlaustritt aus dem Spalt nahe dieselbe wäre, wurde die Geschwindigkeit der Influenzmaschine bei der Spannung 4500 Volt ermäßigt, so daß hier mit geringerer Stromstärke gearbeitet wurde.

Figg. 21 und 22 zeigen die Schwärzungskurven solcher Aufnahmen. Die Schwärzungskurve der höheren Spannung fällt weniger steil ab, wie die der niedrigeren. Rechnet man die Kurven ineinander um, so ergeben sich als Faktoren der Veränderung der Abszissen 1,58, 1,50, 1,43, während die $k\gamma$ sich umgekehrt wie die Geschwindigkeiten verhalten sollen. Da

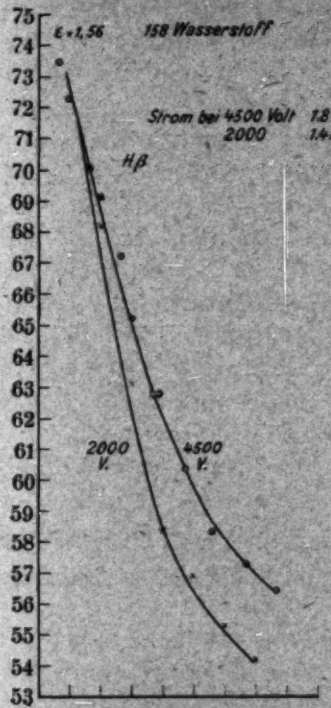


Fig. 21.

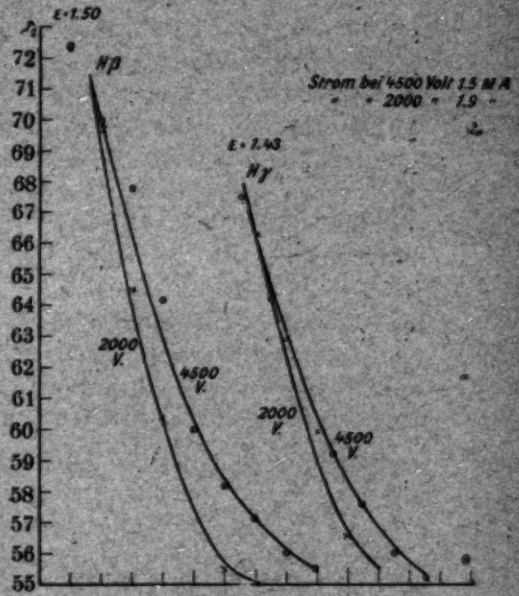


Fig. 22.

sich die Geschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Spannungen verhalten, so müßte der Faktor

$$\sqrt{\frac{4500}{2000}} = 1{,}5$$

sein.

Taf. I, Abb. V zeigt eine Vergleichsaufnahme für Wasserstoffstrahlen verschiedener Spannung.

11. Der absolute Wert der Dämpfungskonstante.

Die besprochenen Messungen ergaben den Wert von $k\gamma$ für die Wasserstofflinien H_α, H_β, H_γ. Der absolute Wert

$2\alpha = k\gamma v$ setzt daher noch die Kenntnis der Geschwindigkeit v der Kanalstrahlen voraus.

Die Messung der Geschwindigkeiten geschah mit Hilfe der Dopplerverschiebung der Spektrallinien. Dieselbe Röhre, wie sie für die bisherigen Versuche verwendet war, wurde horizontal aufgestellt. An die Kathode war ein kurzes Stück Messingrohr angesetzt, das durch ein Glasfenster geschlossen war, ein seitlich angesetztes weites Rohr vermittelte die Verbindung mit den Diffusionspumpen.

Die in den Raum von niedrigem Druck eintretenden Kanalstrahlen wurden durch eine Linse auf dem Spalt eines Steinheilschen Spektrographen abgebildet, so daß die Visierlinie den Strahlen parallel war. Es wurden die Verschiebungen des Dopplerstreifens für die Linien H_β und H_γ bei den Spannungen 4500, 4000 und 2000 Volt gemessen.

Aus den Dopplerverschiebungen $\delta\lambda$ ergeben sich dann die Geschwindigkeiten der Kanalstrahlen aus der Gleichung

$$v = \frac{\delta\lambda}{\lambda} c,$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. In Tabelle III sind die Messungen enthalten. Es ergeben sich für die

Tabelle III.

Dopplerverschiebungen der Wasserstofflinien H_β, H_γ.

Platte	Linie	Verschiebung mm	Dispersion in $\mu\mu$ auf 1 mm	Spannung	$\delta\lambda$	$\frac{\delta\lambda}{\lambda}$	$v = \frac{\delta\lambda}{\lambda} c$
D_3	H_β	0,11	5,2	4000	0,578	$1{,}18 \cdot 10^{-3}$	$3{,}55 \cdot 10^7$ cm/sec
D_3	H_γ	0,165	2,9	4000	0,480	$1{,}10 \cdot 10^{-3}$	$3{,}30 \cdot 10^7$ „
D_4	H_β	0,11	5,2	4000	0,578	$1{,}18 \cdot 10^{-3}$	$3{,}55 \cdot 10^7$ „
D_4	H_γ	0,165	2,9	4000	0,480	$1{,}10 \cdot 10^{-3}$	$3{,}30 \cdot 10^7$ „
D_5	H_β	0,11	5,2	4000	0,578	$1{,}18 \cdot 10^{-3}$	$3{,}55 \cdot 10^7$ „
D_5	H_γ	0,165	2,9	4000	0,480	$1{,}10 \cdot 10^{-3}$	$3{,}30 \cdot 10^7$ „
D_6	H_β	0,12	5,2	4500	0,62	1,27	$3{,}8 \cdot 10^7$ „
D_6	H_β	0,12	5,2	4500	0,62		
D_{6a}	H_γ	0,17	2,9	4500	0,50	1,15	$3{,}46 \cdot 10^7$ „
D_{6a}	H_γ	0,175	2,9	4500	0,50		
D_7	H_β	0,08	5,2	2000	0,416	0,86	$2{,}58 \cdot 10^7$ „
D_7	H_γ	0,125	2,9	2000	0,363	0,84	$2{,}52 \cdot 10^7$ „

Spannung 4000 Volt eine Geschwindigkeit
im Mittel $8{,}42 \cdot 10^7$ cm/sec

Spannung 4500 Volt eine Geschwindigkeit
im Mittel $3{,}63 \cdot 10^7$ cm/sec
Spannung 2000 Volt eine Geschwindigkeit
im Mittel $2{,}55 \cdot 10^7$ cm/sec

Unter Benutzung dieser Werte ergibt sich aus Tabelle I

für H_β $\quad 2\alpha = 6{,}20 \cdot 10^7\ \text{sec}^{-1}$
„ H_γ $\quad 2\alpha = 5{,}52 \cdot 10^7\ \text{sec}^{-1}$,

aus Tabelle II

für H_α $\quad 2\alpha = 6{,}68 \cdot 10^7\ \text{sec}^{-1}$
„ H_β $\quad 2\alpha = 6{,}06 \cdot 10^7\ \text{sec}^{-1}$
„ H_γ $\quad 2\alpha = 6{,}62 \cdot 10^7\ \text{sec}^{-1}$.

Aus den Beobachtungen bei 2000 Volt ergibt sich

für H_β $\quad 2\alpha = 6{,}38 \cdot 10^7\ \text{sec}^{-1}$,

Wenn man mit dieser Zahl den Wert vergleicht, der sich aus der Elektronentheorie für ein schwingendes Elektron ergibt nach der Formel

$$2\alpha = \frac{8\pi^2 e^2}{3mc\lambda^2}$$

(e Ladung, m Masse des Elektrons, λ Wellenlänge, c Lichtgeschwindigkeit), so ergibt sich für H_α ($\lambda = 656{,}8\ \mu\mu$)

$$2\alpha = 5{,}35 \cdot 10^7\ \text{sec}^{-1},$$

also in naher Übereinstimmung mit den gefundenen Werten. Andererseits sind die aus der Formel der Elektronentheorie folgenden Werte für

H_β $\quad 2\alpha = 9{,}77 \cdot 10^7\ \text{sec}^{-1}$
H_γ $\quad 2\alpha = 12{,}7 \cdot 10^7\ \text{sec}^{-1}$

gänzlich abweichend und zwar in viel höherem Grade als die Beobachtungsfehler es zulassen.

Das bemerkenswerte Ergebnis ist also, daß die drei beobachteten Wasserstofflinien H_α, H_β, H_γ alle die Dämpfungskonstante haben, die mit dem aus der Elektronentheorie für H_α folgenden Wert übereinstimmt.

Sauerstoff.

Es erschien wichtig, die Abklingungskonstante nicht nur für Wasserstoff zu bestimmen. Aussicht boten nur solche Gase, bei denen sich im Spektrum der Kanalstrahlen merkliche Dopplerverschiebungen zeigen. Denn das völlige Fehlen des

Viellinienspektrums des Wasserstoffes in dem Raum hoher Verdünnung liefert den Beweis, wenn ein solcher überhaupt nötig ist, daß nur bei solchen Atomen, die im bewegten Zustande leuchten, eine Abklingung beobachtet werden kann.

Die Funkenlinien des Sauerstoffs zeigen die Dopplerverschiebung sehr stark und zwar ergibt sich bekanntlich eine

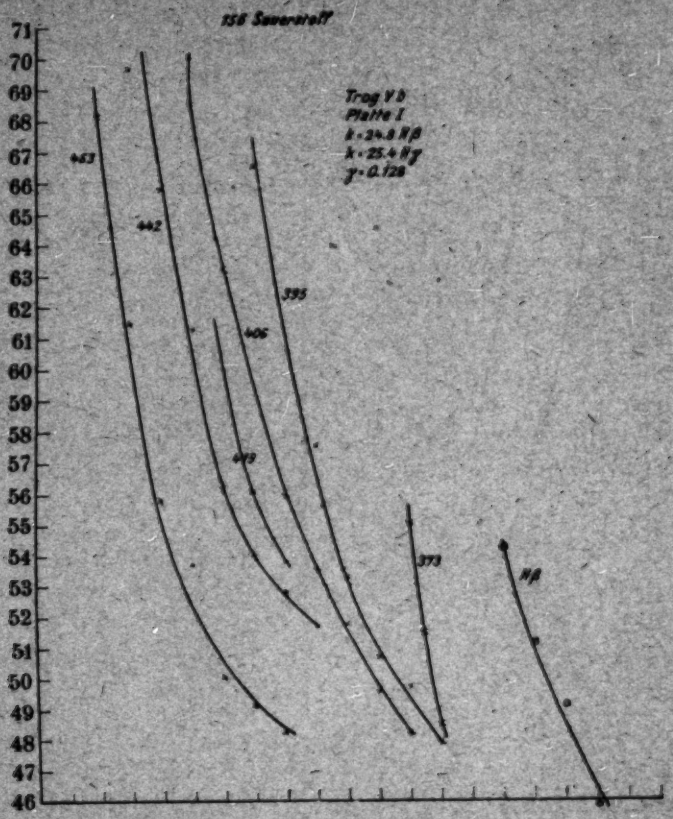


Fig. 23.

größere Geschwindigkeit, als bei der Beschleunigung einfach geladener Sauerstoffatome möglich wäre.

Die nächsten Beobachtungen wurden daher mit Sauerstoff ausgeführt, der einer gewöhnlichen Sauerstoffbombe entnommen wurde.

Die Ergebnisse waren denen bei Wasserstoff sehr ähnlich. Taf. I, Abb. V zeigt eine solche Sauerstoffaufnahme.

Verglichen wurde der Schwärzungsabfall nur mit den Vergleichslinien H_β und H_γ, die, wie bei den Wasserstoffaufnahmen durch einen Absorptionstrog eine exponentiell abnehmende Lichtintensität erhielten. Es hätte sich gezeigt, daß die Wellenlänge keinen erheblichen Einfluß auf den Schwärzungsabfall hat.

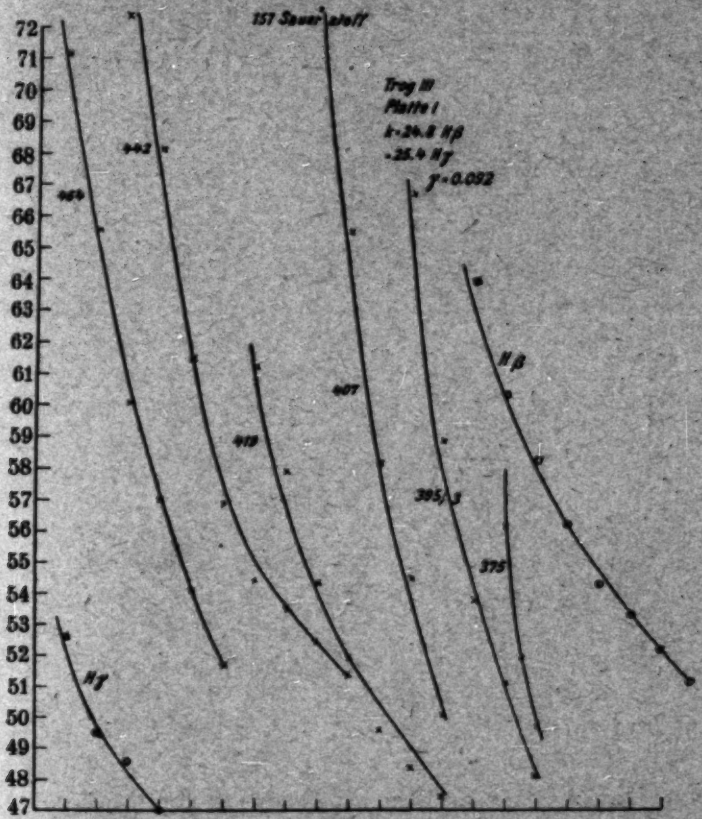


Fig. 24.

Messen ließ sich der Schwärzungsabfall an den Linien 464,8, 442, 437, 419, 407, 395, 375. Wie man aus Figg. 23 und 24 sieht, ist der Schwärzungsabfall aller Linien nahe gleich mit Ausnahme des steileren Abfalls von 375. Da nach Wilsar die Dopplerverschiebungen sämmtlicher Funkenlinien gleich groß sind, folgt, daß auch diese Linien gleiche Dämpfung haben.

Tabelle IV enthält die Werte von $k\gamma$ für die Linie, die mit Vergleichslinien verglichen sind.

Tabelle IV.

Sauerstoff.

Nr.	Spannung Volt	Trog	γ	k	$k\gamma$ für die Linie 464 $\mu\mu$	
135	9000	Vb	0,128	21,3	2,73	
138	9000	Vb	0,128	18,4	3,15	umgerechnet
139	9000	Vb	0,128	18,4	2,80	umgerechnet
156	9000	Vb	0,128	24,8	3,16	
157	9000	Vb	0,128	24,8	3,30	umgerechnet
					3,03	

Die Beobachtung der Dopplerverschiebung ist bei den Sauerstofflinien bekanntlich viel schwieriger als bei den Wasserstofflinien, weil die Linien vielfach sehr nahe beisammen liegen und den Dopplerstreifen überdecken. Es müssen daher immer außer den Längssichtaufnahmen Queraufnahmen gemacht werden, um sich vor Täuschungen zu sichern. Die Längssichtaufnahmen wurden teilweise durch Einstellen des Kollimators in die Verlängerung der Röhrenachse vorgenommen, in dem dann wieder der aus dem engen Spalt austretende Kanalstrahl auf dem Spalt des Spektrographen abgebildet wurde. Bei einigen Aufnahmen bildete die Kollimatorachse einen Winkel mit der Röhrenachse. Diese letztere Anordnung hat an sich den Vorteil, daß das Licht der Kanalstrahlen auf der anderen Seite des Spaltes, wo höherer Druck herrscht, gegenüber dem Licht, das in hoher Verdünnung ausgesandt wird, zurücktritt. Doch waren diese Aufnahmen für die Messung der Dopplerverschiebung zu lichtschwach. Die Queraufnahmen wurden an einem Kanalstrahlenbündel gemacht, bei dem der Spalt fortgenommen war, das daher in hohem Druck verlief.

Auch bei Aufstellung des Kollimators in der Verlängerung der Röhrenachse waren die Dopplerstreifen bei fast allen Sauerstofflinien bei der Spannung von 9000 Volt, bei der die Messungen des Schwärzungsabfalls gemacht waren, zu schwach. Nur bei der Linie 466,2 $\mu\mu$ war er stark genug und konnte zu 0,08 mm bestimmt werden. Um bei den anderen Linien die Dopplerverschiebungen beobachten zu können, wurden noch

Beobachtungen mit einem Induktionsapparat mit Gasturbinenunterbrecher angestellt.

Die Ergebnisse sind in Tabelle V zusammengestellt. Da namentlich bei den Linien, die eine nahe benachbarte Linie

Tabelle V.

Platten D_{14}, D_{15}, D_{16}. Dopplerverschiebungen bei Sauerstofflinien. Spektrograph von Steinheil. Drei Flintglasprismen.

Wellenlänge $\mu\mu$	Verschiebung in mm	Dispersion $\mu\mu$ auf 1 mm	$\delta\lambda$ $\mu\mu$	$\frac{\delta\lambda}{\lambda}$	v	
467,7	0,09	4,3	0,39	$0{,}83 \cdot 10^{-3}$	$2{,}52 \cdot 10^{7}$	
466,2	0,10	4,2	0,42	$0{,}95 \cdot 10^{-3}$	$2{,}72 \cdot 10^{7}$	
464,9	0,10	4,2	0,42	$0{,}95 \cdot 10^{-3}$	$2{,}72 \cdot 10^{7}$	
459,1	0,115	4,0	0,46	$1{,}00 \cdot 10^{-3}$	$3{,}00 \cdot 10^{7}$	Doppellinie
441,5	0,11	3,2	0,352	$0{,}79 \cdot 10^{-3}$	$2{,}38 \cdot 10^{7}$	„
425,4	0,14	2,6	0,365	$0{,}85 \cdot 10^{-3}$	$2{,}57 \cdot 10^{7}$	„
419,0	0,14	2,4	0,338	$0{,}805 \cdot 10^{-3}$	$2{,}42 \cdot 10^{7}$	„
407,2	0,20	2,0	0,40	$0{,}98 \cdot 10^{-3}$	$2{,}94 \cdot 10^{7}$	„
466,2	0,08	4,2	0,336	$0{,}72 \cdot 10^{-3}$	$2{,}17 \cdot 10^{7}$	Spannung 9000 Volt

haben (in der Tabelle als Doppellinie bezeichnet) die Messungen der Dopplerverschiebung unsicher sind, so liegt kein Anlaß vor, das Wilsarsche Ergebnis, daß die Dopplerverschiebungen gleich sind, anzuzweifeln. Alle die Linien, die bei den Messungen des Schwärzungsabfalles vorkommen, finden sich auch in der Tabelle der Dopplerverschiebungen. Die Linien 395 $\mu\mu$ und 375 $\mu\mu$ ließen sich mit den Flintglasprismen wegen zu starker Absorption nicht mehr beobachten. Auch mit dem Quarzspektrographen konnten die Dopplerverschiebungen wegen nicht genügender Dispersion nicht gemessen werden. Wenn wir die der Spannung von 9000 Volt, bei der die Aufnahme des Schwärzungsabfalls gemacht sind, entsprechende Geschwindigkeit von $2{,}17 \cdot 10^{7}$ cm/sec zugrunde legen, so ergibt sich

$$2a = k\gamma v = 6{,}55 \cdot 10^{7}\,\mathrm{sec}^{-1},$$

also in sehr naher Übereinstimmung mit dem Wert für die Wasserstofflinien. Über die Linie 375 läßt sich, solange die Dopplerverschiebung nicht beobachtet ist, nichts Bestimmtes auslegen.

Weitere Ergebnisse sollen in einer zweiten Abhandlung mitgeteilt werden.

Bei den schwierigen Glasarbeiten mit den Diffusionspumpen und der Beaufsichtigung der Apparate bei den langen Belichtungszeiten hat mir Hr. Hausmeister Knöllinger wertvolle Hilfe geleistet.

Theoretisches.

Wie bereits erwähnt, ergibt die Theorie eines um eine Gleichgewichtslage schwingenden Elektrons für die Dämpfungskonstante den Wert

$$(I) \qquad 2a = \frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3mc^3},$$

wenn $\nu = \frac{c}{\lambda}$, e Ladung, m Masse des Elektrons bezeichnen.

Die Bohrsche Theorie der Spektrallinien sagt bisher nichts bestimmtes über die Dämpfung aus, weil der Schwingungsvorgang unbekannt bleibt.

Neuerdings hat nun Hr. Bohr[1]) einen Weg beschritten um dem Mechanismus der Schwingungen näher zu kommen, indem er Bahnen betrachtet, die sehr weit vom Atom entfernt liegen. Wenn ein Elektron zwischen zwei solchen Bahnen übergeht, so ist der Energieunterschied klein und da dieser gleich $h\nu$ sein soll, so erhalten wir kleines ν, also große Wellenlänge. Für lange Wellen geht aber die Quantentheorie in die gewöhnliche elektromagnetische Theorie über. Der Schwingungsvorgang besteht dann einfach in der Kreisbewegung des Elektrons. Es muß nun aber verlangt werden, daß die aus dieser Kreisbewegung sich ergebende Umlaufszeit übereinstimmt mit der Schwingungsdauer $1/\nu$, die sich ergibt, wenn $h\nu$ gleich jener Energiedifferenz gesetzt wird.

Nach Sommerfeld[2]) ist die Umlaufszeit des Elektrons durch die große Achse a der Bahnellipse gegeben.

Es ist

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}(n + n')^2.$$

Ferner ist

$$b = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} n(n + n'), \qquad m a b \omega = \frac{n h}{2\pi},$$

1) N. Bohr, Dänische Akademie der Wissenschaften 8. IV 1. Teil I und II.

2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51. S. 21. 1916.

b ist die kleine Achse der Ellipse, h die Planck'sche Konstante, $\omega/2\pi$ der reziproke Wert der Umlaufszeit, n und n' die ganzen Zahlen der Serienreihen. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf Kreisbahnen, also die Fälle $b = a$.

Dann ergibt sich

$$\text{(II)} \qquad \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{4\pi^2 m e^4}{h^3 (n+n')^3} .$$

Andererseits folgt aus der Gleichung für die Spektralserie

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{(n+n')^2} - \frac{1}{(m+m')^2} \right) .$$

Wenn nach der Bohr'schen Voraussetzung $n + n'$ und $m + m'$ sehr groß sind, dagegen $(m + m') - (n + n')$ klein, so können wir

$$(m + m') - (n + n') = d\,n$$

setzen und es wird

$$\text{(III)} \qquad \nu = \frac{4\pi^2 m e^4}{h^3 (n+n')^3} \, d\,n .$$

Wir sehen, daß (II) und (III) nur übereinstimmen, wenn $d\,n = 1$ gesetzt wird, d. h., wenn das Elektron von einer Bahn zu einer benachbarten übergeht. Wird $d\,n$ gleich 2, 3, 4 usw gesetzt, so ist $1/T$ die Grundschwingung und die ν entsprechen den harmonischen Obertönen der Schallehre. Der Übergang des Elektrons zur Nachbarbahn stellt einen ausgezeichneten Fall vor, bei dem, wenigstens für lange Wellen, die normale Umlaufszeit der Zentralbewegung übereinstimmt mit der Schwingungsdauer, wie sie sich aus der Serienformel ergibt.

Die Ausstrahlung folgt den bekannten elektromagnetischen Gesetzen, wie es von Bohr angenommen ist. Ausgestrahlt wird der Energiebetrag $h\nu$. Diese Ausstrahlung soll nun nach unserer Annahme so erfolgen, als ob dieser Energiebetrag als Schwingungsenergie vorhanden wäre und durch die Bewegung in der Kreisbahn ausgestrahlt würde. Nach den bekannten Gesetzen ergibt sich dann für diese Ausstrahlung, wenn wir uns der Einfachheit halber auf die Kreisbahn beschränken,

$$-dE = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} j^2 \, dt ,$$

wenn j die zentripitale Beschleunigung bezeichnet, da diese gleich v^2/a ist

$$-dE = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{v^4}{a^2} \, dt , \qquad v = \frac{2\pi a}{T} .$$

Nach der Voraussetzung klingt die Energie $h\nu$ zeitlich ab wie $e^{-2\alpha t}$.[1]) Dann ist

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} 2\alpha = -\frac{1}{E}\frac{dE}{dt}, \\ \quad = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 \frac{a^2}{h\nu}. \end{cases}$$

Setzen wir hierin

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}(n+n')^2, \quad \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad T = \frac{1}{\nu},$$

$$\frac{e}{m} = 1{,}75 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{10}, \quad e = 4{,}7 \cdot 10^{-10}, \quad h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$$

und wenden die Formel auf H_α an, wo der Übergang zu einer Nachbarbahn erfolgt, so haben wir $n + n' = 2$, $\lambda = 6{,}56 \cdot 10^{-5}$, und es wird

$$2\alpha = 6{,}04 \cdot 10^7,$$

also in sehr naher Übereinstimmung mit unseren Beobachtungen und auch mit der Elektronentheorie.

Den Ausdruck (I) der Elektronentheorie erhalten wir auch, wenn wir in (III) einsetzen anstatt $h\nu$ die doppelte lebendige Kraft $m v^2$, wo $v = 2\pi a \nu$ ist. Es ergibt sich hieraus

$$2\alpha = 5{,}13 \cdot 10^7\,\text{cm}^{-1}.$$

Wenn sich demnach für H_α eine nahe Übereinstimmung zwischen $h\nu$ und $m v^2$ ergibt, so wird hiermit auch die Übereinstimmung der Beobachtung der Bohrschen Theorie und der elektromagnetischen Theorie für H_α bestätigt. Denn $h\nu$ verhält sich wie die Schwingungsenergie eines in der Endbahn der Balmerserie ($n + n' = 2$) mit der Umlaufszeit $1/\nu$ umlaufenden Elektrons, das von einer quasielastischen Kraft nach dem Mittelpunkt des Kreises gezogen wird. Die lebendige Kraft dieses Elektrons ist $\frac{m}{2} v^2$ und hierzu kommt noch der gleiche Betrag an potentieller Energie. Diese Energie, die ausgestrahlt wird, kann das umlaufende Elektron aber nicht in der gewöhnlichen Form von potentieller und kinetischer

1) Hr. Epstein hat in einer Abhandlung, die demnächst in den Berichten der Münchener Akademie erscheinen wird, die Annahme gemacht, daß die Abklingung nicht nach den Gesetzen der gedämpften Schwingung erfolgt. Seine Theorie steht aber mit meinen Beobachtungen im Widerspruch.

Energie besitzen. Denn da die Bahn sowohl als auch die Umlaufszeit $1/\nu$ unverändert bei der Ausstrahlung bleiben, so wird durch diese die gewöhnlichen Energie des Elektrons nicht beeinflußt. Die Energie $h\nu$, die ausgestrahlt wird, ist daher in einer noch unbekannten Energieform vorhanden, die sich für H_α wie eine Schwingungsenergie verhält.

Für die anderen Linien der Balmerserie ist die Energie $h\nu$ kleiner als $m v^2 = m 4\pi^2 a^2 \nu^2$; sie verhält sich daher nicht wie eine Schwingungsenergie für die Endbahn der Serie.

Aber auch für H_α besteht nicht mehr Übereinstimmung zwischen der Schwingungszahl der Linie und der Umlaufszeit T für $n + n' = 2$ in der Endbahn nach den Gesetzen der Zentralbewegung. Denn es ist

$$\nu_{H\alpha} = \frac{5}{18} \frac{\pi^2 e^4 m}{h^3}, \quad \text{dagegen} \quad \frac{1}{T} = \frac{\pi^2 e^4 m}{2h^3}.$$

Während für H_α die Werte der Dämpfungskonstante, die sich aus dem Energiebetrage $h\nu$, aus der Schwingungsenergie $m v^2$ und aus der Beobachtung ergeben, miteinander übereinstimmen, ist dies für die andere Linie nicht mehr der Fall.

Da die Beobachtung denselben Wert für die übrigen Linien ergibt wie für H_α, so sind auch für die Theorie einfache Beziehungen zu erwarten, die sich allerdings in den bisherigen Ansätzen noch nicht erkennen lassen.

Würzburg, Physik. Inst. der Universität, Juni 1919.

(Eingegangen 18. Juni 1919.)

2. *Strukturtheorie und Kohäsionserscheinungen;* *von W. Voigt.*

1. Die Verwertung der experimentellen Ergebnisse über den atomistischen Aufbau der Kristalle zu theoretischen Folgerungen über die Elastizitätsverhältnisse dieser Körper scheint sich gegenwärtig aussichtsreich zu entwickeln. So wenig noch völlig klare Resultate gewonnen sind, so geben doch die Ergebnisse der Untersuchungen der Herren Born und Landé[1]) Anlaß zu der Hoffnung, daß wenigstens der richtige Weg zu solchen gefunden ist. Die Berechnung von Zahlwerten für die kubischen Kompressibilitäten einiger regulärer Kristalle, die den beobachteten nahe kommen, ist jedenfalls ein bemerkenswerter Erfolg, nicht minder eine neuestens ausgeführte Berechnung der Elastizitätskonstante c_{11} für jene Körper, über die mir Hr. Born privatim Mitteilung gemacht hat, und deren Resultate in den wenigen Fällen, wo eine Vergleichung mit der Erfahrung möglich ist, eine erträgliche Übereinstimmung geliefert hat.

Es entsteht nun natürlich die Frage, ob und wie die bei den genannten Rechnungen benutzte Hypothese elektrostatischer Kräfte zwischen den Atomen über die Gesetze der Kohäsionserscheinungen *außerhalb* des Gebietes der Elastizität, also der Festigkeit in ihren verschiedenen Äußerungen (besonders auch der Spaltbarkeit), ferner der Schiebung und Translation, Aufklärung zu geben vermag. Die Schwierigkeit, die meines Erachtens hier vorliegt, wird in erster Linie durch den *Unstetigkeitscharakter* aller der genannten Vorgänge gegeben. Im Falle der einfachen Zerreißungs-, Biegungs- usf. -Festigkeit zeigt die Beobachtung bei einigermaßen spröden Kristallen bis fast an die Festigkeitsgrenze eine sehr nahe Proportionalität zwischen Deformation und Spannung, so daß der Zerfall in keiner Weise *vorbereitet* erscheint. Zu dieser Unstetigkeit tritt bei Spaltung,

1) M. Born u. A. Landé, Ber. d. Deutschen Phys. Ges. S. 210. 1918.

Schiebung, Translation noch eine andere, die in der Auszeichnung ganz bestimmter Ebenen im Kristall vor allen übrigen, auch den ihnen unendlich nahen, liegt. Diese Tatsachen scheinen mit der Wirkung elektrostatischer Kräfte zwischen den Atomen schwer vereinbar. Allerdings ist zuzugeben, daß die neuerdings von Hrn. Landé[1]) verfolgte Idee der Bewegung von Elektronen um die Atome in Bahnsystemen, die gewissen kristallographischen Symmetrien entsprechen, eine Möglichkeit der Erklärung solcher Unstetigkeiten in sich schließt, die geliefert wäre, wenn sich ein Labilwerden jener Systeme bei gewissen Deformationen des Kristalles nachweisen ließe. Indessen dürfte ein solcher Nachweis große Schwierigkeiten bieten, wie denn ja auch andere, einfachere Stabilitätsfragen bei den Kristallgittern noch nicht haben erledigt werden können.

Auf ganz anderem Gebiete liegen Ideen zur Erklärung speziell von Spaltung und Translation bei Kristallen, die Hr. Stark[2]) ausgesprochen hat. Bei der Spaltung eines Steinsalzkristalles nach einer Würfelfläche soll z. B. die parallel einer Würfelkante aufgesetzte Messerschneide eine durch Würfelflächen begrenzte Schicht um die Länge der Pfeile in Fig. 1 gegen die benachbarte Kristallmasse verschieben. Während ursprünglich *entgegengesetzt* geladene Atome einander beiderseits der Grenzebenen gegenüber lagen, würden nun *gleich* geladene einander gegenüber stehen. In der so erreichten Konfiguration würde dann die elektrostatische Abstoßung über die Anziehung überwiegen und den Zerfall bewirken. Ähnlich denkt sich Hr. Stark bei der Translation in Steinsalz längs einer Granatoederfläche durch die mechanische Einwirkung direkt die eine Schicht des Kristalles um die Pfeillänge in Fig. 2 an der anderen hingeschoben. Es soll dadurch eine labile Gleichgewichtslage erreicht werden, aus der das System bei geringster

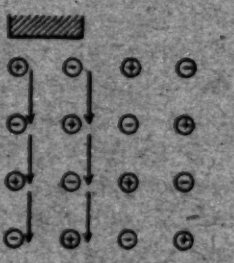


Fig. 1.

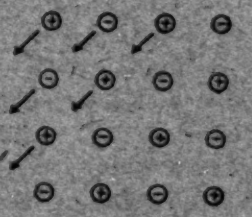


Fig. 2.

1) A. Landé, Berliner Ber. S. 101. 1919.
2) J. Stark, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 12. S. 293f. 1915.

Überschreitung in eine neue Lage umklappt, die einer Verschiebung um die doppelte Pfeillänge entspricht. Hr. Stark betont, daß dabei im Gegensatz zum Vorigen zu beiden Seiten der Grenzfläche nur entgegengesetzt geladene Atome liegen, infolge hiervon ein Zerfall nicht stattfindet.

Aber diese gewiß sehr beachtenswerten Vorstellungen berücksichtigen doch die wirklichen Deformationsverhältnisse bei den gedeuteten Vorgängen nicht genügend. Die aufgesetzte Messerschneide bewirkt (soweit sie nicht wirklich die Oberfläche des Kristalles *verletzt*, einen Spalt hervorbringt und diesen, als Keil eindringend, fortleitet — was Hr. Stark stillschweigend offenbar ausschließt —) einen Deformations- und Spannungszustand, der sich von der Druckstelle aus, stetig verlaufend, *nach allen Seiten* ausbreitet. Und analog handelt es sich bei der Erzeugung von Translationen nicht um Verschiebungen eines Kristallteiles, die durch eine Art Unstetigkeitsfläche gegen den anderen Teil abgegrenzt ist. In *beiden* Fällen kommen relative Verschiebungen zwischen Nachbarschichten, die mit den Atomabständen vergleichbar sind, durch die mechanischen Einwirkungen primär nicht zustande.

Ich möchte im Nachstehenden einiges Experimentelle und Theoretische zusammenstellen, was über wirklich *quantitative* Verhältnisse von Kohäsionserscheinungen vorliegt, und was mir geeignet scheint, die Probleme, die sich hier für eine theoretische Verwendung der Kristallstruktur bieten, schärfer zu umreißen. Der Vollständigkeit und Übersichtlichkeit wegen will ich dabei, obwohl in der Hauptsache Neues zu geben bemüht, auch manches Ältere reproduzieren, was von den Autoren, die sich seitdem mit diesen Fragen befaßt haben, zum Teil unbeachtet geblieben ist.

I. Kristallschiebung und Translation.

2. Unter *Kristallschiebung* versteht man den Vorgang, bei dem endliche Teile des Kristalles oder auch vollständige Kristalle durch mechanische Einwirkung eine dauernde Deformation erleiden, die sie in eine zu der ursprünglichen spiegelbildliche Konfiguration überführt. Als Repräsentant dieser Gattung von Strukturänderungen gilt die Schiebung, durch die ein Teil eines Spaltungsrhomboeders (r) von Kalkspat, begrenzt durch eine Ebene ($\frac{1}{2}r'$), die eine Polkante abstumpft,

in die Konfiguration übergeführt wird, die das Spiegelbild der ursprünglichen ist, relativ zu einer Ebene normal zu jener Polkante.

Die mechanischen Einwirkungen, durch die derartige Schiebungen zuerst hervorgerufen worden sind, und die ihrer Einfachheit halber zum Zweck von Demonstrationen auch gegenwärtig noch der Regel nach benutzt werden, sind nun allerdings einer Erfassung durch die Theorie nicht zugänglich. So das Verfahren von Baumhauer[1]), durch normalen Druck mit einer Messerschneide auf eine Endkante eines Spaltungsrhomboeders allmählich immer größere Teile des Kristalles gemäß Fig. 3 in Spiegelstellung überzuführen; so auch das Verfahren von Mügge[2]), durch Kompression eines (nicht zu großen) Spaltungsstückes längs der Verbindungslinie zweier gegenüberliegenden Mittelecken das ganze Präparat umzuwandeln. Immerhin kann man, da die Umwandlung in ihrem Resultat sich als eine sogenannte einfache Schiebung parallel einer Fläche $\frac{1}{2}r'$ darstellt[3]) (jede Schicht parallel dieser Fläche erfährt eine mit dem Abstand von dieser Fläche proportionale Verschiebung in der Richtung der Polkante), die Folgerung ziehen, daß bei den genannten Verfahren die erzeugte Scherung oder aber scherende Kraft parallel jener Fläche die in erster Linie maßgebende mechanische Einwirkung sein wird.

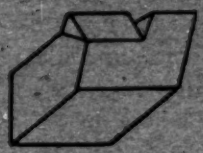


Fig. 3.

Gleiten nach Vorstehendem bei der Kristall*schiebung* Schichten parallel zu einer ausgezeichneten Ebene (Gleitfläche) um *ganz bestimmte*, mit dem Abstand von jener Ebene proportionale Strecken, so finden bei der sogenannten *Translation* derartige Gleitungen in beliebigen Abhängigkeiten von dem Abstand statt, und der deformierte Teil des Kristalles läßt keine Veränderung in der Konstitution erkennen. Die neue Struktur kann sich also von der alten nur dadurch unterscheiden, daß die Atome irgendeiner Art Plätze eingenommen haben, die zuvor von anderen Atomen *derselben* Art besetzt waren. Diese Translationen, welche an vielen natürlichen Kristallen sich durch Streifungen gewisser Begrenzungs-

1) H. Baumhauer, Zeitschr. f. Krist. 3. S. 588. 1879.
2) O. Mügge, N. Jahrb. f. Min. 1. S. 32, 81. 1883.
3) Th. Liebisch, N. Jahrb. f. Min. Beil.-Bd. 6. S. 105. 1888.

flächen andeuten, lassen sich künstlich erzeugen[1]), indem man einen geeigneten Kristall, von einem feinen Pulver (z. B. Schwefel) umgeben, in ein starkwandiges zylindrisches Gefäß bringt und in dasselbe unter hohem Druck einen Stempel eintreibt. Wesentlich für den Effekt werden dabei wieder Scherungen oder scherende Kräfte parallel zu den Translationsflächen sein, deren Größen natürlich bei der geschilderten Art der Beobachtung auch kaum einer rohen Abschätzung zugänglich sind.

Eine zu wirklichen *Messungen* brauchbare Methode der Hervorbringung von Kristallschiebungen und Translationen scheint einzig die zu sein, daß ein in geeigneter Orientierung aus einem Kristall geschnittenes rechtwinkliges Parallelepiped durch normalen Druck gegen eines seiner Flächenpaare homogen deformiert wird. Verlaufen dann die Gleit- oder Translationsflächen zum Teil von Seiten- zu Seitenfläche, so kann bei geeigneter Größe des Druckes längs derselben eine Scherung einsetzen, genügend, um die beabsichtigte Konfigurationsänderung hervorzurufen.

3. Die Theorie eines derartigen Vorganges ist sehr einfach. Der Kristall werde auf ein geeignetes Hauptkoordinatenkreuz $X^0 Y^0 Z^0$ bezogen, so gewählt, daß die Gleit- oder Translationsfläche normal zur $Y^0 Z^0$-Ebene steht. Jene Fläche selbst sei zur XY-Ebene gewählt (Fig. 4), und es sei $(Y, Y^0) = \varphi$, $\cos\varphi = \gamma$, $\sin\varphi = \sigma$ gesetzt. Die Transformationsformeln für die Koordinaten sind dann durch das Schema gegeben:

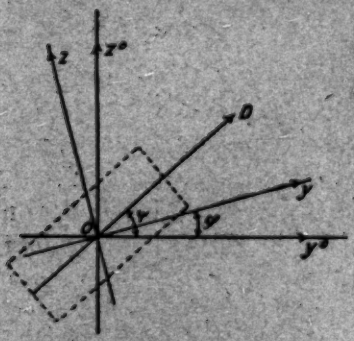


Fig. 4.

(1)

	x	y	z
x^0	1	0	0
y^0	0	γ	$-\sigma$
z^0	0	σ	γ

und die Deformationsgrößen $x_x, \ldots$ $y_z, \ldots$, die sich transformieren wie $x^2, \ldots, 2yz, \ldots$, folgen den Gleichungen:

1) Vgl. z. B. A. Johnsen, Centralbl. für Min. usw. 1917. S. 366 u. 439; 1918, S. 152.

$$(2)\quad \begin{cases} x_x = x_x^0, \quad y_y = y_y^0\,\gamma^2 + z_z^0\,\sigma^2 + y_z^0\,\gamma\,\sigma, \\ \qquad\qquad z_z = y_y^0\,\sigma^2 + z_z^0\,\gamma^2 - y_z^0\,\gamma\,\sigma, \\ \qquad\qquad y_z = -(y_y^0 - z_z^0)\,2\gamma\,\sigma + y_z^0\,(\gamma^2 - \sigma^2), \\ z_x = z_x^0\,\gamma - x_y^0\,\sigma, \quad x_y = z_x^0\,\sigma + x_y^0\,\gamma. \end{cases}$$

Das Präparat sei durch ein Flächenpaar parallel und zwei Flächenpaare normal zur Y^0Z^0- (und damit auch zur YZ-)Ebene begrenzt. Eines der letzteren Paare, dessen Normale den Winkel ψ mit der Y^0-Achse einschließt, erfahre den Druck D pro Kubikzentimeter. Setzen wir $\cos\varphi = \gamma'$, $\sin\psi = \sigma'$, dann gilt für die Druckkomponenten $X_x^0, \ldots X_y^0$:

$$(3)\quad \begin{cases} X_x^0 = 0, \quad Y_y^0 = D\,\gamma'^2, \quad Z_z^0 = D\,\sigma'^2, \quad Y_z^0 = D\,\sigma'\,\gamma', \\ \qquad\qquad Z_x^0 = 0, \quad X_y^0 = 0. \end{cases}$$

Endlich bestimmen die allgemeinen Formeln

$$(4)\quad -x_x^0 = s_{11}\,X_x^0 + s_{12}\,Y_y^0 + s_{13}\,Z_z^0 + s_{14}\,Y_z^0 + s_{15}\,Z_x^0 + s_{16}\,X_y^0$$

usf. mit Hilfe der Hauptelastizitätsmoduln s_{kk}, den Zusammenhang zwischen den Drucken und den Deformationen. So gewinnt man schließlich

$$(5)\quad \begin{cases} -x_x = D\,(s_{12}\,\gamma'^2 + s_{13}\,\sigma'^2 + s_{14}\,\sigma'\,\gamma'), \\ -y_y = D[\gamma^2\,(s_{22}\,\gamma'^2 + s_{23}\,\sigma'^2 + s_{24}\,\sigma'\,\gamma') \\ \qquad + \sigma^2\,(s_{32}\,\gamma'^2 + s_{33}\,\sigma'^2 + s_{34}\,\sigma'\,\gamma') \\ \qquad + \sigma\,\gamma\,(s_{42}\,\gamma'^2 + s_{43}\,\sigma'^2 + s_{44}\,\sigma'\,\gamma')], \\ -z_z = D[\sigma^2\,(s_{22}\,\gamma'^2 + s_{23}\,\sigma'^2 + s_{24}\,\sigma'\,\gamma') \\ \qquad + \gamma^2\,(s_{32}\,\gamma'^2 + s_{33}\,\sigma'^2 + s_{34}\,\sigma'\,\gamma') \\ \qquad - \sigma\,\gamma\,(s_{42}\,\gamma'^2 + s_{43}\,\sigma'^2 + s_{44}\,\sigma'\,\gamma')], \\ -y_z = D[-2\sigma\,\gamma\,((s_{22} - s_{32})\,\gamma'^2 + (s_{23} - s_{33})\,\sigma'^2 \\ \qquad + (s_{24} - s_{34})\,\sigma'\,\gamma') \\ \qquad + (\gamma^2 - \sigma^2)\,(s_{42}\,\gamma'^2 + s_{43}\,\sigma'^2 + s_{44}\,\sigma'\,\gamma')], \\ -z_x = D[\gamma\,(s_{52}\,\gamma'^2 + s_{53}\,\sigma'^2 + s_{54}\,\sigma'\,\gamma') \\ \qquad - \sigma\,(s_{62}\,\gamma'^2 + s_{63}\,\sigma'^2 + s_{64}\,\sigma'\,\gamma')], \\ -x_y = D[\sigma\,(s_{52}\,\gamma'^2 + s_{53}\,\sigma'^2 + s_{54}\,\sigma'\,\gamma') \\ \qquad + \gamma\,(s_{62}\,\gamma'^2 + s_{63}\,\sigma'^2 + s_{64}\,\sigma'\,\gamma')]. \end{cases}$$

Diese sehr allgemeinen Formeln gestatten in jedem Falle leicht die Deformationen des Präparates für jede Orientierung in der Y^0Z^0-Ebene, und zwar nach jedem Achsenkreuz YZ zu

übersehen. Natürlich sind sie nur auf solche Deformationen anwendbar, die dem fundamentalen Ansatz (4), und somit der Proportionalität mit dem Druck genügen. Indessen sind die Drucke, bei denen Schiebungen und Translationen einsetzen, wie es scheint, nicht so hoch, daß größere Abweichungen von dieser Proportionalität wahrscheinlich wären. (Ich habe sogar bei Steinsalzstäben für Biegungen die angenäherte Proportionalität des elastischen [also reversibeln] Anteiles bis hart an die Bruchgrenze feststellen können.)[1])

Das Hauptinteresse nimmt natürlich der Ausdruck für die Scherung y_z nach der XY-Ebene in Anspruch. Man kann aus ihm einmal allgemeine Auskunft darüber gewinnen, für welche Ebene XY *ein Druck* D *von gegebener Richtung* eine maximale oder eine minimale Scherung bewirkt, sodann, in welcher Richtung ein Druck ausgeübt werden muß, um *nach einer gegebenen Ebene* XY eine maximale oder minimale Scherung hervorzurufen. Diese Fragen haben natürlich *direkt* mit den Bedingungen für das Eintreten einer Schiebung oder Translation nichts zu tun, denn letztere Vorgänge selbst werden von den Formeln (5) in keiner Weise umfaßt; aber wenn etwa die *dauernden* Änderungen bei einer bestimmten Größe der Scherung nach der Gleitfläche einsetzen sollten, so würde das leichte Eintreten der ersteren bei einer gewissen Anordnung verständlich werden, wenn sich ergibt, daß die letztere hierbei einen besonders kleinen Druck erfordert.

4. Wenden wir die Formeln auf einen rhomboedrischen bzw. trigonalen Kristall an und beziehen denselben auf ein Achsensystem, dessen Z^0-Achse in die dreizählige Hauptachse, dessen X^0-Achse in eine zweizählige Nebenachse fällt, setzen also Gleitflächen in der Zone der zweizähligen Achse voraus, so ist in der Formel für y_z

$$s_{11} = s_{22},\quad s_{13} = s_{23},\quad s_{24} = -s_{14},\quad s_{34} = 0 \tag{6}$$

zu setzen. Der Ausdruck wird hierdurch zu

$$\begin{aligned} y_z = D\,[&2\sigma\gamma\,(s_{11}\,\gamma'^2 - s_{33}\,\sigma'^2 - s_{13}\,(\gamma'^2 - \sigma'^2) - s_{14}\,\sigma'\,\gamma') \\ &+ (\gamma^2 - \sigma^2)\,(s_{14}\,\gamma'^2 - s_{44}\,\sigma'\,\gamma')] \end{aligned} \tag{7}$$

oder

$$\begin{aligned} y_z = \tfrac{1}{4}D\,[&\sin 2\varphi\,(s_{11} - s_{33}) + (s_{11} + s_{33} - 2s_{13})\cos 2\psi - s_{14}\sin 2\psi) \\ &+ \cos 2\varphi\,(s_{14}\,(1 + \cos 2\psi) - s_{44}\sin 2\psi)]. \end{aligned} \tag{8}$$

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 7. S. 47. 1874.

Für Kalkspat ist, wenn man die $+Y^0$-Achse aus einer die $+Z^0$-Achse umgebenden Fläche des Spaltungsrhomboeders austreten läßt,

$$(9)\quad \begin{cases} s_{11} = 11{,}14 \cdot 10^{-12},\ s_{33} = 17{,}13 \cdot 10^{-12},\ s_{44} = 39{,}52 \cdot 10^{-12}, \\ s_{13} = -4{,}24 \cdot 10^{-12},\quad s_{14} = 8{,}98 \cdot 10^{-12}. \end{cases}$$

Die Formel (8) wird also hier zu

$$(10)\quad \begin{cases} y_x = \tfrac{1}{2} D [\sin 2\varphi\,(-6{,}0 + 36{,}75 \cos 2\psi + 8{,}98 \sin 2\psi) \\ \quad + \cos 2\varphi\,(8{,}98\,(1 + \cos 2\psi) - 39{,}52 \cdot \sin 2\psi)] \cdot 10^{-12}. \end{cases}$$

Für die Gleitfläche in der Zone der X^0-Achse ist $\varphi = 26^0 15'$ und die letzte Gleichung wird bei Einführung dieses Wertes zu

$$(11)\quad y_x = D^0\,(0{,}35_5 + 17{,}8_1 \cdot \cos 2\psi - 15{,}6_2 \sin 2\psi) \cdot 10^{-12}.$$

Extremwerte von y_x bei gegebenem Druck folgen hieraus für $\operatorname{tg} 2\psi = -0{,}903$, d. h. für $\psi_1 = -21^0$ und $\psi_2 = +69^0$ rund; die erstere Druckrichtung ist um etwa -47^0, die zweite um etwa $+48^0$ gegen die in der Gleitfläche liegende Y-Achse geneigt; der ersteren entspricht ein positives, der zweiten ein negatives y_x; letzterer Wert ist ein wenig kleiner als ersterer. Die bei der oben erwähnten Methode von Mügge zur Anwendung kommende Druckrichtung weicht nicht gar viel von der der ersten Zahl entsprechenden ab, und die leichte Wirkung dieser Methode hängt vermutlich damit zusammen.

Keinerlei Scherung nach der Gleitfläche bringt ein Druck hervor, der in einem Winkel von beiläufig 24,5° Neigung gegen die Y^0-Achse wirkt.

Größeres Interesse, als die vorstehenden theoretischen Resultate, nimmt die Feststellung in Anspruch, bei welchem Betrag der Scherung $\bar{y}_x$ die Gleitung nun tatsächlich einsetzt. Die von mir vor längerer Zeit angestellten Beobachtungen[1]) benutzten rechtwinklige Parallelepipede von Kalkspat, von denen *ein* Flächenpaar der $Y^0 Z^0$-Symmetrieebene parallel war; die Längsachse, parallel der der Druck ausgeübt wurde, war in einem Fall um rund $\psi_1 = +1^0 40'$, das andere Mal um rund $\psi_2 = -18^0 45'$ gegen die Y^0-Achse, also um bzw. $-24^0 36'$ und -45^0 gegen die Gleitfläche geneigt. Die Längen

1) W. Voigt, Wied. Ann. 67. S. 201. 1899. In den dort gegebenen Formeln befinden sich einige Schreib- oder Druckfehler, die oben berichtigt sind.

der Präparate waren so groß gewählt, daß in einem nicht zu geringen Bereich Gleitflächen von Seitenfläche zu Seitenfläche verliefen. In der Tat kann nur in einem solchen Falle eine Gleitung ungestört zustande kommen; laufen alle Gleitflächen gegen eine Grundfläche, so sind Störungen zu gewärtigen.

Die Ergebnisse der Beobachtungen stimmten für jede Gattung von Präparaten nicht besonders gut überein; da es sich aber bislang nur um Auskunft über die *Größenordnung* des Grenzwertes $\overline{y_s}$ handelt, so kommen Abweichungen um 10—20% nicht in Betracht. Für den Druck D fand sich im ersten Fall etwa $14 \cdot 10^5$ g, im zweiten $15 \cdot 10^5$ g pro cm^2, was als scherende Kräfte $\overline{Y_s} = D\sigma'\gamma'$ bzw. 3,2 und $7{,}5 \cdot 10^5$ g ergibt. Die entsprechenden Grenzscheerungen $\overline{y_s}$ lagen im ersten Falle in der Nähe von $2{,}4 \cdot 10^{-3}$, im zweiten bei $3{,}5 \cdot 10^{-3}$. Die Differenzen dieser Zahlen brauchen keineswegs auf Fehlerquellen zu beruhen; tatsächlich wissen wir gar nicht, ob der Wert der Scherung *allein* das Eintreten der Gleitung bedingt, oder ob das Verhalten der übrigen Deformationsgrößen, die in den beiden bezeichneten Fällen verschieden sind, dabei mitspielt.

Wesentlich ist das sichere Ergebnis, daß bei Kalkspat eine Scherung parallel der Gleitfläche in der Größenordnung von $3 \cdot 10^{-3}$ ausreicht, um die Gleitung, d. h. das Umklappen der deformierten Schicht in die spiegelbildliche Konfiguration zu bewirken. Die Schiebung, welche dieses Umklappen selbst repräsentiert, ist von einer ganz anderen Größenordnung; sie kann gemessen werden durch die Drehung, die eine in der YZ-Ebene liegende Gerade durch sie erfährt. Diese Drehung würde eine Gerade, die um -19^0 gegen die Z-Achse geneigt ist, in die um $+19^0$ geneigte Position bringen. Die Drehung, welche der Grenzschiebung y_s entspricht, würde eine um $-5'$ gegen die Z-Achse geneigte Gerade in die um $+5'$ geneigte Position bringen. Die Grenzschiebung bewirkt also für sich keineswegs etwa eine Konfiguration, die zwischen der ursprünglichen und der spiegelbildlichen in der Mitte liegt, und deren Überschreitung ist nicht erforderlich, um das vollständige Umklappen zu bewirken, sondern es besteht ein ganz außerordentlich enges Stabilitätsbereich für die ursprüngliche Konfiguration, und sein Überschreiten hat sogleich das vollständige Umklappen zur Folge.

5. Machen wir von den Überlegungen des § 8 weiter eine Anwendung auf einen *regulären* Kristall, den wir auf die Würfelachsen beziehen können, wenn seine Translationsflächen normal zu einer Würfelfläche stehen, so ist für diesen

$$(12) \qquad s_{11} = s_{22} = s_{33}, \quad s_{23} = s_{31} = s_{12}, \quad s_{24} = s_{34} = 0.$$

Die Formel für y_z nimmt demgemäß die Gestalt von

$$(13) \qquad y_z = D[(s_{11} - s_{23}) \sin 2\varphi \cos 2\psi - \tfrac{1}{2} s_{44} \cos 2\varphi \sin 2\psi].$$

Die Lage der Ebene, welcher bei gegebener Druckrichtung extreme Werte der Scherung entsprechen, ist bestimmt durch

$$(14) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi' = -\frac{2(s_{11} - s_{23})}{s_{44}} \operatorname{cotg} 2\psi'.$$

Umgekehrt findet sich für die bezügliche Druckrichtung bei gegebener Gleitfläche

$$(15) \qquad \operatorname{tg} 2\psi'' = -\frac{s_{44}}{2(s_{11} - s_{23})} \operatorname{cotg} 2\varphi''.$$

Keinerlei Scherung entsteht, wenn ψ und φ der Gleichung entsprechen

$$(16) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{s_{44}}{2(s_{11} - s_{23})} \operatorname{tg} 2\psi_0.$$

Bei isotropen Medien ist $2(s_{11} - s_{23}) = s_{44}$; hier werden die Beziehungen also von den elastischen Moduln des Körpers ganz frei.

Bei Steinsalz ist

$$s_{11} = 23{,}8 \cdot 10^{-10}, \quad s_{23} = -5{,}2 \cdot 10^{-10}, \quad s_{44} = 77{,}3 \cdot 10^{-10},$$

somit

$$(17) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi' = -0{,}75 \operatorname{ctg} 2\psi', \quad \operatorname{tg} 2\psi'' = -1{,}33 \cdot \operatorname{ctg} 2\varphi'.$$

Benutzt man in der zweiten Formel, daß die Gleitfläche in Steinsalz durch $\varphi'' = 45^0$ bestimmt wird, so ergeben sich die günstigsten Druckrichtungen durch $\psi'' = 0$ und $\psi'' = \frac{1}{2}\pi$. Keine Scherung entsteht bei einem Druck $D \parallel$ oder $\perp$ zur Gleitfläche, was hier nach Symmetrie selbstverständlich ist.

Messungen über die (homogenen) Spannungs- und Deformationsverhältnisse, welche in Steinsalz die Entstehung von Translationen bedingen, lagen bisher nicht vor. Eine beiläufige Wahrnehmung machte ich vor vielen Jahren[1]), als ich, im Ver-

1) W. Voigt, Göttinger Nachr. 1893. Nr. 13. S. 521; Drudes Ann. 53. S. 55. 1894.

lauf einer umfassenderen Untersuchung über die Festigkeitsverhältnisse von Steinsalz, versuchte, einen prismatischen Stab mit der Längsachse parallel einer Würfelnormale durch longitudinalen Druck zu zertrümmern. Um eine (merklich homogene) Druckverteilung zu bewirken, die *in der Mitte* des Stabes größte Drucke lieferte, war der Stab an den Enden verdickt hergestellt und mit diesen Enden in zylindrische Fassungen gekittet, die in einem starken Messingrohr gleiten konnten (vgl. Fig. 5). Gegen die gut zentrisch angebrachten Spitzen

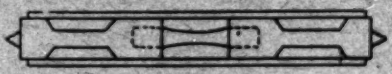


Fig. 5.

an den Enden dieser Fassungen wirkte der Druck. Bei sehr allmählicher Drucksteigerung bildete sich dann, lange bevor eine Zertrümmerung des Präparates durch Längssprünge erfolgte, in dessen Mitte eine sehr merkliche Verdickung, die sich bei Beobachtung im polarisierten Lichte auf Translationen nach Granatoederflächen beruhend erwies. Die experimentelle Anordnung war offenbar der Entstehung von Translationen keineswegs günstig, weil die Endstücke des Steinsalzstabes an jeder merklichen *seitlichen* Ausweichung verhindert waren; auch, daß *vier* Gleitflächen unter gleichen Neigungen gegen die Druckrichtung vorhanden waren, erschien nicht förderlich, da die ihnen entsprechenden gleichberechtigten vier Translationen sich sehr wohl gegenseitig stören konnten; trotzdem erfolgte die Translation bei ziemlich niedrigem Druck. Da dieselbe bei den Festigkeitsversuchen als störende Komplikation erschien, wurden bei einer späteren Wiederholung[1]) nahezu würfelförmige Präparate benutzt, bei denen Gleitflächen zwischen den seitlichen Begrenzungen kaum verliefen; da hierbei überdies die Drucksteigerung recht schnell vorgenommen wurde, so kamen merkliche Translationen kaum zustande.

Für die neuen Beobachtungen ließ ich von der Firma Steeg und Reuter in Homburg eine Anzahl Parallelepipede von Steinsalz herstellen von $5 \times 5 \times 12$ mm Kantenlänge, ein Flächenpaar mit Spaltungsflächen parallel, die anderen beiden um 10^0 gegen solche geneigt. Auf diese Weise war erreicht,

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 4. S. 589. 1901.

daß von den vier Translationsebenen zwei um (nahe) 45°, eine um 35°, eine um 55° gegen die Druckrichtung geneigt waren; alle verliefen weitgehend von Seiten- zu Seitenfläche, und ich nahm an, daß die am wenigsten gegen die Druckrichtung geneigte Gleitfläche bei dem Vorgang der Translation *begünstigt* werden würde. Indessen ergab schon der erste Vorversuch, daß, entgegen der Erwartung, die Translation im wesentlichen nach der Fläche stattfand, die am stärksten, nämlich um 55°, gegen die Druckrichtung geneigt war.

Um den Beginn der Translation möglichst frühzeitig wahrnehmen zu können, wurde bei den definitiven Versuchen so verfahren, daß das Spiegelbild einer vertikalen scharfen Linie (der Kante eines weißen Lineales) in einer derjenigen Seitenflächen des Präparates beobachtet wurde, gegen welche die effektiven Translationsflächen liefen. Auch wenn das Aussehen des Präparates selbst kein sichtbares Anzeichen für erfolgte Translation darbot, gab die Neigung und Knickung des bezeichneten Spiegelbildes unzweideutige Auskunft über deren Beginn.

Das Präparat wurde auf eine ebene metallische Unterlage gestellt und darauf ein parallelepipedisches Messingklötzchen (10 × 10 mm Querschnitt) gelegt. Von letzterem führten zu beiden Seiten des Präparates zwei Stahldrähte nach einem etwa 20 cm tiefer liegenden horizontalen Hebel, der den Druck auf das Präparat zu übertragen bestimmt war. Am Ende des Hebels hing ein Gefäß, in das man zur Erzeugung und Steigerung des Druckes Bleischrot in dünnem Strahl einfließen ließ. Das Präparat war oben und unten mit einem Stückchen Bleifolie armiert, das mit Fischleim darauf geklebt war; der noch weiche Fischleim stellte dabei ein Schmiermittel dar, wie solches zur Verhinderung von Unregelmäßigkeiten der Spannungsverteilung auch bei anderen Versuchen nützlich befunden worden ist.[1]) Dieser Art der Armierung schreibe ich es zu, daß bei meinen Beobachtungen die Präparate an den gedrückten ebenen, und zwar scharfkantig begrenzten Endflächen keinerlei Beschädigung erlitten. Ja sogar, als ich, um den Vorgang über die *ersten* Translationen hinaus zu verfolgen, bei einem Präparat den Hebel kräftig *mit der Hand* niederdrückte,

1) Vgl. z. B. A. Föppl, Mitt. a. d. techn. Lab. der techn. Hochschule in München. 27. Heft. 1900.

bis ein erster Sprung im Präparat auftrat, blieben die direkt gedrückten Partien des Präparates intakt; der erste Sprung entstand im Inneren des Präparates und verlief auffallenderweise nicht nach einer Spaltungsfläche, sondern nahezu parallel zu der um 10° gegen eine solche geneigte Seitenfläche.

Jene ersten durch das Reflexionsverfahren festgestellten Translationen waren, betr. Doppelbrechung, optisch unwirksam und hätten kaum gestattet, den *Charakter* der Translation festzustellen. Bei verstärktem Druck nahmen die Präparate eine Gestalt an, die — mit Übertreibung des Charakteristischen — durch Fig. 6 wiedergegeben ist. Zugleich ergab die Beobachtung im polarisierten Licht (bei Unterlegung einer Quarzplatte von empfindlicher Farbe) *einzelne* feine Streifen parallel den beiden um 35° und 55° gegen die Druckrichtung geneigten Gleitflächen, die erkennen ließen, daß die Translation jedenfalls *überwiegend* nach der letzteren Fläche stattgefunden hatte. Die beiden anderen Gleitflächen machten sich kaum merklich geltend; die zu Spaltungsebenen parallelen Begrenzungen erlitten keine wahrnehmbaren Deformationen, — die normal zu ihnen gemessene Dicke des Präparates erwies sich auch nicht nennenswert verändert, während die ihnen parallele merklich vergrößert war.

Fig. 6.

Es erscheint auf den ersten Blick befremdend, daß die bei einer bestimmten homogenen Spannungsverteilung entstehende Translation derartig *begrenzt* ist, wie die Erfahrung zeigt, und man wird fragen, wodurch jene Begrenzung bedingt ist. Unzweifelhaft liegt die Sache so, daß infolge der, wenn auch sehr kleinen, durch die ersten Translationen hervorgerufenen Deformation des Präparates im Sinne von Fig. 6 eine Änderung der Spannungsverteilung innerhalb des Präparates eintritt, so daß die letztere wieder unter die Grenze des für Eintritt der Translation erforderlichen Betrages herabsinkt. Erst bei einer Steigerung des äußeren Druckes wird jene Grenze wieder überschritten, und kann nun die Translation weitere Fortschritte machen.

Was schließlich das zahlenmäßige Ergebnis der (nicht sehr sicheren) Beobachtungen über die Größe des Druckes D betrifft, bei dem der Eintritt der Translation unzweifelhaft festgestellt werden konnte, so war das mittlere Gewicht, das dabei am Hebel wirkte, beträchtlich unter 1 kg; da das Ver-

hältnis der Hebelarme 1 : 10 war, und der Querschnitt der Präparate 0,25 cm² betrug, so ist $D < 4 \cdot 10^4$ g/cm² gewesen. Formel (18) nimmt für die von mir benutzten Präparate wegen $\varphi = 45^0$, $\psi = 10^0$ die Form an:

$$y_z = D \cdot (s_{11} - s_{22}) \cos 20^0,$$

und dies liefert mit den obigen Zahlen den Grenzwert der Scherung $\overline{y_z} < 1{,}1 \cdot 10^{-4}$; der Grenzwert der scherenden Kraft ergibt sich wegen $Y_z = D \sin 55^0 \cdot \cos 55^0$ zu $< 1{,}9 \cdot 10^4$.

Der gefundene Wert für $\overline{y_z}$ ist ganz außerordentlich klein, noch kleiner, als der für die Kristallschiebung in Kalkspat gefundene, und gestattet ganz analoge Folgerungen, wie jener. Die atomistische Struktur von Steinsalz hat gegenüber Scherungen nach der Granatoederfläche *eine überaus enge Stabilitätsgrenze*; das Gleiten in die neue Konfiguration tritt ein, längst bevor die Atome im regelmäßigen Gefüge die Mitte zwischen der ursprünglichen und der neuen Lage erreicht haben. Diese Mittellage würde eine Drehung der Verbindungslinie zweier über eine Translationsfläche einander benachbarter Atome um 45° verlangen; tatsächlich tritt Translation bereits bei einer Drehung um Bruchteile einer Minute ein.

6. Das beschriebene Ergebnis für Translation in Steinsalz geht somit dem früher erörterten für Schiebung in Kalkspat durchaus parallel. Für die theoretische Verwertung beider entsteht eine Schwierigkeit aus der Tatsache, daß die Atome der Kristalle nicht in den Knoten ihrer Raumgitter *ruhen*, sondern infolge der Wärmebewegung oszillieren; einzelne von ihnen erreichen dabei schon bei mittleren Temperaturen beträchtliche Elongationen, wie das auch die Diffusionserscheinungen erweisen. Es entsteht die Frage, ob diese Bewegungen bei Schiebungen und Translationen *wesentlich* mitwirken. Das Extreme würde dadurch gegeben sein, daß die Wärmebewegung für sich allein jene Veränderungen auch im undeformierten Kristall andauernd, aber (nach Wahrscheinlichkeiten) regellos in allen möglichen Richtungen hervorriefe, und daß die mechanische Deformation nur die Wirkung hätte, einen Richtungssinn zu bevorzugen.

Die Art, wie die Vorgänge sich in Wahrheit abspielen, spricht aber meines Erachtens nicht sehr dafür, daß es sich um eine reine Wahrscheinlichkeitswirkung handelt. Bei den Versuchen mit Kalkspat entstanden bei einer bestimmten Be-

lastung *mit einem Schlage* sehr zahlreiche Zwillingslamellen, die in sauberster Begrenzung das Präparat von einer zur anderen Säulenfläche durchsetzten. Dies weist gewiß darauf hin, daß das Präparat irgendwelche Inhomogenitäten enthalten hat, denn ein völlig homogenes Präparat bei homogener Druckverteilung hätte *als Ganzes* in die neue Konfiguration überspringen müssen. Diese Inhomogenitäten könnten auf Verschiedenheiten der Wärmebewegung beruhen, sie könnten aber auch durch strukturelle Störungen bedingt sein. Wie eine *reine* Wahrscheinlichkeitswirkung sieht der Vorgang indessen nicht aus; ein solcher würde sich doch vermutlich so darstellen, daß schon bei sehr kleinen Drucken *einzelne* Zwillingslamellen auftreten und deren Zahl mit wachsendem Druck zunimmt. Was die Beobachtung zeigt, scheint darauf zu deuten, daß *eine wirkliche Stabilitätsgrenze existiert*, daß aber, wenn dieselbe nahezu erreicht ist, einzelne Schichten infolge entweder struktureller Schwäche oder aber momentaner günstiger Konfiguration infolge der Wärmebewegung diese Grenze früher überschreiten, als die Gesamtheit. Es mag übrigens darauf aufmerksam gemacht werden, daß jedenfalls in Kalkspat die Bewegung der Atome bei der Schiebung allem Anschein nach[1]) eine sehr andere ist, als bei der Wärmebewegung, letztere also kaum die alleinige Ursache der ersteren sein dürfte.

Für die Translationen in Steinsalz liegen die bezüglichen Verhältnisse minder klar, weil die umgewandelten Teile sich nicht durch ihr optisches Verhalten von den ungeänderten unterscheiden, und weil deshalb der erste Beginn der Translation sich viel weniger deutlich markiert, als derjenige der Schiebung. Daß nicht das ganze Präparat gleichmäßig die Translation erleidet, liegt auch hier auf der Hand, im anderen Falle müßte es eben in seiner ganzen Ausdehnung die oben beschriebene *große* Deformation erleiden, während die Beobachtung einen Beginn der Translation mit einer *sehr kleinen* Deformation ergibt, die mitunter mit ziemlicher Regelmäßigkeit der (übertriebenen) Fig. 6 entspricht. In der Tat zeigte die nach S. 649 als Index benutzte vertikale Gerade unter Umständen im Anfang der Deformation in ihrer ganzen Ausdehnung eine merklich gleiche Neigung, ohne Verzerrung.

1) A. Johnsen, Phys. Zeitschr. 15. S. 712. 1914.

Dies deutet darauf hin, daß ähnlich, wie oben von Kalkspat berichtet, auch bei Steinsalz die transferrierten Schichten über das ganze Präparat nahe gleichzeitig und gleichförmig verteilt entstehen, und dies Resultat darf wohl in einem ähnlichen Sinne verwertet werden, wie dort geschehen. Wenn mitunter die Translation ungleichförmig *einsetzte* oder bei gleichförmigem Anfang ungleichförmig *fortschritt*, so brauchte das nicht auf der Wärmebewegung zu beruhen. Es könnten recht wohl ausgedehntere strukturelle Inhomogenitäten dabei maßgebend gewesen sein.

Schließlich darf vielleicht gegen eine *entscheidende* Wirkung der Wärmebewegung bei Schiebung und Translation noch generell die *ungemeine Kleinheit* der elastischen Deformation geltend gemacht werden, bei der die bezügliche Umwandlung faktisch einsetzt. Die Konfiguration des Raumgitters ist durch jene Deformation nämlich nur ganz verschwindend wenig geändert, daß (wenn wirklich eine so minimale Veränderung ausreichen sollte, um die Wahrscheinlichkeit einer Umwandlung entscheidend nach einer Richtung zu wenden und auffallendste Schiebungen und Translationen hervorzubringen) dann erwartet werden dürfte, es möchten auch im *undeformierten* Zustande solche Umwandlungen, wenngleich nur selten, doch an einzelnen Stellen in beobachtbarer Weise spontan entstehen und fortbestehen. Umgekehrt dürfte das Fehlen solcher spontanen Schiebungen und Translationen dahin zu deuten sein, daß diese Umlagerungen keine reinen Wahrscheinlichkeitsphänomene sind, daß vielmehr Stabilitätsgrenzen vorliegen, zu deren Überwindung eine (wenngleich kleine) mechanisch hervorgebrachte Deformation erforderlich ist.

Der Eintritt einer die Schiebung oder Translation begünstigenden Konfiguration besitzt ersichtlich größere Wahrscheinlichkeit bei Schichten von kleinerer, als von größerer Ausdehnung. Demgemäß müßten also z. B. die Stäbchen von Kalkspat, die mir im Jahre 1889 zu Messungen der Elastizitätskonstanten gedient haben, und in denen die Gleitflächen nur wenig über 6 mm² Ausdehnung haben, für das spontane Entstehen von Gleitschichten relativ günstige Bedingungen darbieten; auch darf die Zeitdauer von 30 Jahren ruhigen Liegens für den Eintritt eines Vorganges von selbst nur geringer Wahrscheinlichkeit als nicht unbeträchtlich gelten. Indessen hat

die genaue Untersuchung der ca. 20 hochpolierten Präparate im polarisierten Licht auch nicht die kleinste Andeutung einer Gleitschicht erkennen lassen.

Noch älter sind mir gehörige Stäbchen von Steinsalz, die s. Z. gleichfalls zur Bestimmung von Elastizitätskonstanten benutzt worden sind. Bei ihnen ist die Anwendung von polarisiertem Licht ausgeschlossen. Aber die genaue Betrachtung der (recht scharfen) Kanten einer großen Anzahl von diesen Präparaten mit der Lupe hat irgendwelche Merkmale einer spontanen Translation nicht ergeben. Ich möchte in diesem Befunde immerhin eine Art von Stütze für die Auffassung sehen, daß bei den Vorgängen der Schiebung und Translation faktisch Stabilitätsgrenzen vorliegen, und die Erklärung durch reine Wahrscheinlichkeit nicht angeht.

II. Spaltbarkeit.

7. Die *Spaltbarkeit* eines Kristalles stellt eine spezielle Äußerung seiner Kohäsion dar und fällt unter den allgemeinen Begriff der *Festigkeit*. Die mechanischen Bedingungen, die bei den gewöhnlichen Methoden, Spaltbarkeiten zu demonstrieren, vorliegen, sind dabei aber ganz besonders wenig durchsichtig, und wenn schon die Gesetze der Festigkeit isotroper Körper in den einfachsten Fällen der Dehnung, Biegung, Drillung noch ungeklärt sind, so ist es einleuchtend, daß für eine befriedigende Theorie der Spaltbarkeit von Kristallen gegenwärtig kaum Aussicht besteht.

Eine Art von Spaltung geschieht so, daß ein *zufällig schon vorhandener* Spalt durch eine eingedrückte Messerschneide erweitert und fortgeführt wird. So werden z. B. meist Glimmer- und Gipsplatten gespalten. Hierbei ist im Grunde das Wesentlichste, die Herstellung des ersten Spaltes, *schon gegeben*. In anderen Fällen, wie bei Spaltung von Steinsalz, kann gelegentlich das Messer zunächst eine Furche parallel einer Spaltungsfläche aufbrechen und mit dieser dann wie oben verfahren. Das sind Vorgänge, die einer theoretischen Bearbeitung zurzeit ganz unzugänglich erscheinen, und die auch Hr. Stark bei dem oben erwähnten Deutungsversuch von Spaltung nicht im Auge hat.

Man kann aber Steinsalz und ähnliche Kristalle auch spalten, ohne die Oberfläche zu verletzen, durch Andrückung

einer stumpfen Schneide oder eines Zylinders, deren Längserstreckung der Spaltfläche parallel liegt. Eine solche Einwirkung gehört zu denen, deren Theorie H. Hertz in seiner bekannten Arbeit über die Berührung elastischer Körper[1]) *für isotrope Medien* erledigt hat. Immerhin ist der bei dem Spaltungsproblem vorliegende spezielle Fall *zylindrischer* Berührung von Hertz nur gestreift, so daß es sich lohnt, ihm eine eigene Behandlung zu widmen. Freilich übersteigt das Problem *für kristallinische Medien* bislang anscheinend die Kraft der bekannten mathematischen Hilfsmittel. Indessen können sich die Spannungs- und Deformationsverhältnisse in Kristallen nur quantitativ von denen in isotropen Körpern bei gleichen mechanischen Bedingungen unterscheiden, und so wird die Aufklärung dieser Verhältnisse bei isotropen Körpern immerhin dazu dienen können, das Verständnis der Spaltungsvorgänge in Kristallen zu fördern. Ganz besonders wird das für den wohl wichtigsten speziellen Fall gelten, daß die Spaltungsebene kristallographische Symmetrieebene ist, die Begrenzung, gegen welche die Wirkung der stumpfen Schneide ausgeübt wird, zu ihr normal steht und gleichfalls Symmetrieebene ist. Die Spaltung eines Spaltungsstückes von Steinsalz oder Bleiglanz gehört hierher.

Wir benutzen das von Hertz eingeführte Koordinatensystem, das die XY-Ebene, in der gemeinsamen Tangentenebene der beiden Körper liegend, die Z-Achse vom Körper 2 in den Körper 1 gerichtet annimmt. Die X-Achse legt Hertz in die eine Achse der bei Druck entstehenden im allgemeinen elliptischen Berührungsfläche. In unserem Falle, bei dem, allgemein gesprochen, zwei parallele Zylinder (Schneide und Ebene) zur Berührung gebracht werden, und bei dem die Druckfigur ein den beiden Zylinderachsen *paralleler Streifen* ist, legen wir die X-Achse den Zylinderachsen parallel. Demgemäß sind nun alle Differentialquotienten nach x gleich Null. Die Verrückungskomponenten parallel zu den Koordinatenachsen mögen durch u, v, w bezeichnet werden; es ist dann bei unserem zylindrischen Problem $u = 0$ anzunehmen. Der merklich gespannte Teil des Kristalles ist nämlich so klein gegen das Ganze gedacht, daß eine merkliche Verschiebung

1) H. Hertz, Journ. f. reine und angew. Math. 92. S. 156. 1881; Verh. des Vereins zur Beförd. des Gewerbefleißes. Berlin, Nov. 1882.

parallel x als ausgeschlossen gelten kann. Die Ausdrücke für die Druckkomponenten lauten somit

$$(1)\begin{cases} -X_x = c_1(y_y + z_z), & -Y_y = c\,y_y + c_1 z_z, & -Z_z = c_1 y_y + c\,z_z, \\ -Y_z = c_2\,y_z, & -Z_x = 0, & -X_y = 0, \quad \text{bei } c_2 = \tfrac{1}{2}(c - c_1). \end{cases}$$

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen reduzieren sich auf

$$(2) \qquad \Delta_2 v + \varkappa \frac{\partial \delta}{\partial y} = 0, \qquad \Delta_2 w + \varkappa \frac{\partial \delta}{\partial z} = 0,$$

bei

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \delta = y_y + z_z, \qquad \varkappa = \frac{c + c_1}{c - c_1}.$$

Die den Körpern 1 und 2 zugeordneten Funktionen und Parameter mögen durch die oberen Indizes $'$ und $''$ unterschieden werden.

Die Gleichungen der Oberflächen beider Zylinder sollen im Bereiche der direkten gegenseitigen Einwirkung vor Ausübung des Druckes lauten:

$$(3) \qquad z' = B' y^2, \qquad z'' = B'' y^2,$$

für den Abstand entsprechender Punkte gelte

$$(4) \qquad z = z' - z'' = B\,y^2.$$

Da das Wirkungsgebiet auch bei ausgeübtem Druck als sehr klein gegen die Dimensionen der Zylinder gelten soll, so können die merklichen Begrenzungen der beiden Zylinder innerhalb desselben als nur unendlich wenig von der XY-Ebene abweichend gelten und die Grenzbedingungen für die Ebene $z = 0$ selbst formuliert werden.

Wenn, wie angenommen, die Reibung in der Zwischengrenze ignoriert wird, muß für $z = 0$ überall $Y_z' = 0$ und $Y_z'' = 0$ sein; ferner muß *außerhalb* der Berührungsfläche gelten $Z_z' = 0$, $Z_z'' = 0$, *innerhalb* derselben aber $Z_z' = Z_z'' = Z_z$, wobei der betreffende Wert Z_z erst durch die Theorie zu bestimmen ist. *Gegeben* ist mit dem Gesamtdruck p für die Längeneinheit parallel den Zylinderachsen nur das Integral

$$(5) \qquad p = \int_{-b}^{+b} Z_z\,dy,$$

unter $2b$ die Breite des Druckstreifens verstanden.

In diesen Bedingungen kommt die ursprüngliche Form der Zylinder nächst der Druckstelle nirgends vor; die Formulierung ist dieselbe, als wenn der Körper 1 den Halbraum z 0, derjenige 2 den Halbraum $z < 0$ vollständig erfüllte; das Problem ist also *demgemäß* in Angriff zu nehmen.

Hertz konstruiert nun seine Lösung mit Hilfe der Funktion, welche das Potential P einer elektrischen Verteilung auf der (bei ihm elliptischen) Berührungsfläche von der Dichte

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \tag{6}$$

darstellt, wobei a und b die Halbachsen der Berührungsellipse bezeichnen. Dies Potential stimmt überein mit dem einer homogenen räumlichen Verteilung innerhalb eines $\| z$ unendlich abgeplatteten Ellipsoides.

Aus diesem Potential P gewinnt Hertz die weitere Hilfsfunktion

$$\Pi = -\frac{zP}{c_2} + \frac{1}{\varkappa c_2}\left(\int_z^i P\,dz - J\right), \tag{7}$$

in der i eine unendliche Länge und J eine unendliche Konstante bezeichnet, die Π *endlich* machen soll, und bildet mit ihr die Lösungen

$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + 2\vartheta P \tag{8}$$

bei

$$\vartheta = (1+\varkappa)/\varkappa c_2 = \frac{4c}{c^2 - c_1^2}.$$

8. Das uns beschäftigende zylindrische Problem folgt aus dem allgemeinen, indem man die a-Achse der Berührungsellipse unendlich werden läßt; die zur Bildung von P herangezogene elektrische Verteilung ist hier also die auf einem Streifen $-b < y < +b$ mit der auf die Länge 1 bezogenen Dichte

$$\sigma = \sigma_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \tag{9}$$

Zugleich wird

$$\Delta_2 \Pi = -\frac{2}{c_2}\frac{\partial P}{dz}. \tag{10}$$

Setzt man dann für den Körper 1 ($z > 0$)

$$(11)\qquad v' = \frac{\partial \Pi'}{\partial y}, \qquad w' = \frac{\partial \Pi'}{\partial z} + 2\vartheta' P,$$

so erhält man

$$(12)\quad \begin{cases} -Y_y' = 2\left(\dfrac{\partial P}{\partial z} + z\dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right), & -Z_z' = 2\left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - z\dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right), \\ & -Y_z' = -2z\dfrac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z}, \end{cases}$$

also *alle drei Ausdrücke von den Elastizitätskonstanten des Körpers unabhängig.*

Gleicherweise gibt sich für den Körper 2 ($z < 0$) bei

$$(13)\qquad v'' = -\frac{\partial \Pi''}{\partial y}, \qquad w'' = -\frac{\partial \Pi''}{\partial z} - 2\vartheta'' P$$

das System

$$(14)\quad \begin{cases} +Y_y'' = 2\left(\dfrac{\partial P}{\partial z} + z\dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right), & +Z_z'' = 2\left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - z\dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right), \\ & +Y_z'' = -2z\dfrac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z}. \end{cases}$$

Da $\partial^2 P/\partial y\,\partial z$ und $\partial^2 P/\partial z^2$ (nach der physikalischen Bedeutung von P) in der Grenze $z = 0$ nicht unendlich werden, so verschwindet daselbst sowohl Y_z', als Y_z'', und es wird

$$\overline{Z_z'} = -2\frac{\overline{\partial P}}{\partial z}, \qquad \overline{Z_z''} = +2\frac{\overline{\partial P}}{\partial z}.$$

Nun ist $-\partial P/\partial z = Z$ die von der supponierten elektrischen Belegung σ herrührende Feldstärke parallel Z. Es gilt demgemäß nach Symmetrie

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z>0} = \left(-\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z<0},$$

dazu nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie

$$\left(-\frac{\overline{\partial P}}{\partial z}\right)_{z>0} + \left(\frac{\overline{\partial P}}{\partial z}\right)_{z<0} = 4\pi\sigma.$$

Da weiter σ nur auf dem Berührungsstreifen von Null verschieden ist, so ist für das äußere Bereich Z_z' und Z_z'' gleich Null, für das innere sind sie von Null verschieden und einander gleich. Der gemachte Ansatz für u, v, w liefert also Spannungen, die in der Grenze $z = 0$ allen dort bestehenden Bedingungen genügen.

Die Formeln (12) geben sogleich allgemein über einen für uns sehr wesentlichen Punkt Auskunft. Nach ihnen wird für $z = 0$: Y_y' mit Z_z', Y_y'' mit Z_z'' *identisch*, d. h. aber, da gleich-

zeitig Y_z' und Y_z'' verschwinden: *die der Grenze $z = 0$ anliegenden Volumenelemente erfahren in der YZ-Ebene von allen Seiten gleichgroße Drucke.* Diese Drucke sind außerhalb der Berührungsfläche gleich Null, innerhalb derselben nehmen sie vom Rande nach der Mitte hin zu. Was die einzige weitere von Null verschiedene Druckkomponente X_z angeht, so gilt für dieselbe nach (1) und (11)

$$(15) \qquad -X_z' = \frac{4c_1'}{c'+c_1'}\frac{\partial P}{\partial z}, \quad -X_z'' = -\frac{4c_1''}{c''+c_1''}\frac{\partial P}{\partial z},$$

wobei auch $4c_1/(c+c_1) = 2(1-\varkappa)/\varkappa$.

Diese Ausdrücke zeigen, daß in der Grenze $z = 0$ die $\overline{X_z}$ mit den bezüglichen $\overline{Y_y}$ und $\overline{Z_z}$ proportional sind, die Proportionalitätskonstanten aber von der Substanz der Körper 1 und 2 abhängen. Da diese Konstanten erfahrungsgemäß positiv sind[1]), so ergeben sich die Volumenelemente, die der Berührungsfläche anliegen, als nach allen Richtungen komprimiert, die den freien Teilen der Grenze anliegenden aber als in der yz-Ebene ringsum ungespannt und parallel x komprimiert. Das ist ein Resultat, das von den nach Hertz allgemein bei elliptischen Berührungen gefundenen auffallend abweicht. Es liefert für unser Spaltungsproblem ein sehr merkwürdiges Ergebnis, auf das unten zurückzukommen sein wird.

Ferner enthalten die Formeln (12) eine bemerkenswerte allgemeine Aussage über den Verlauf der Spannungslinien in den gedrückten Körpern. Bezeichnet man die Winkel, welche die *Hauptdrucke* Y_y^0, Z_z^0 (definiert durch $Y_z^0 = 0$) bzw. mit den Achsen Y und Z einschließen, mit φ, so gilt nämlich

$$(16) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2Y_z}{Y_y - Z_z}.$$

Zugleich bestimmen sich diese Hauptdrucke selbst durch

$$(17) \qquad \left.\begin{matrix} Y_y^0 \\ Z_z^0 \end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left[Y_y + Z_z \pm \sqrt{(Y_y - Z_z)^2 + 4Y_z^2}\right].$$

Nun ist für den Körper 1

$$(18) \qquad Y_y - Z_z = -4z\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \quad Y_z = 2z\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z}, \quad Y_y + Z_z = -4\frac{\partial P}{\partial z};$$

also gilt, wenn kurz $\partial P/\partial z = f$ gesetzt wird,

$$(19) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z} = -\operatorname{tg}(n, z),$$

---

1) Ist, wie in vielen Fällen, c angenähert $= 3c_1$, so ist $\overline{X_z}$ angenähert die Hälfte von $\overline{Y_y}$ und von $\overline{Z_z}$.

wobei n die Normale auf der Kurve $f = \text{konst.}$ bezeichnet, dazu

$$\left.\begin{matrix} Y_y^0 \\ Z_z^0 \end{matrix}\right\} = -2f \pm z\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \tag{20}$$

Formel (19) enthält das Resultat, daß von den beiden Systemen von Drucklinien die eine Art mit ihren Linienelementen an jeder Stelle den Winkel zwischen der Normalen n und der Z-Achse, die andere den Winkel zwischen dem Linienelement der Kurve $f = \text{konst.}$ und der Y-Achse halbiert.

9. Um die Hilfsfunktion P bis zu diskutabler Form der interessierenden Resultate zu entwickeln, kann man sie einerseits als das logarithmische Potential eines Streifens $-b < \eta < +b$, $\zeta = 0$ mit der Belegung

$$\sigma = \sigma_0\sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2}$$

auffassen, also setzen

$$P = -\int_{-b}^{+b} \sigma \cos(\varrho^2)\, d\eta \quad \text{bei} \quad \varrho^2 = (y-\eta)^2 + z^2. \tag{21}$$

Der Ausdruck läßt sich für Punkte außerhalb eines Kreises vom Radius b um den Anfangspunkt in eine gut konvergierende Reihe entwickeln. Führt man nämlich den Winkel ϑ zwischen dem Radiusvektor $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ und der y-Achse ein, setzt also

$$\varrho^2 = \eta^2 + r^2 - 2\eta r \cos\vartheta,$$

so kann man schreiben

$$P = -\sigma_0 \int_{-b}^{+b} \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2} \left[\ln(r^2) - \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{h}\left(\frac{\eta}{r}\right)^h \cos h\vartheta\right] d\eta, \tag{22}$$

wobei in der Summe die Glieder mit ungeraden Zahlwerten h verschwinden. Führt man einen Hilfswinkel ψ durch die Substitution $\eta = b\cos\psi$ ein, so resultiert

$$\left\{\begin{aligned} P = -b\sigma_0 \int_0^\pi (1 - \cos^2\psi) \Big[&\ln(r^2) \\ &- 2\sum_1^\infty \frac{1}{h}\left(\frac{b}{r}\right)^h \cos^h\psi \cos h\vartheta \Big] d\psi. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Nun gilt für *gerade* Zahlwerte q

$$(24)\qquad \int_0^{\pi} (\cos^q \psi - \cos^{q+2} \psi)\, d\psi = \frac{(q-1)(q-3)\ldots 3\cdot 1}{(q+2)\,q(q-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot \pi = Q_q,$$

wobei Q_q eine Abkürzung ist; für *ungerade* q hat das Integral den Wert Null. Somit erhalten wir

$$(25)\qquad P = -\pi b \sigma_0 \left\{ \frac{1}{2} \ln (r^2) - \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{b}{r}\right)^{2n} Q_{2n} \cos 2n\vartheta \right\},$$

und daraus

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\pi b \sigma_0 \left\{ \dfrac{\sin \vartheta}{r} + 2 \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{b^{2n}}{r^{2n+1}} Q_{2n} \sin (2n+1)\vartheta \right\}, \\ z \dfrac{\partial P}{\partial x} = -\pi b \sigma_0 \left\{ \sin^2 \vartheta + \displaystyle\sum_1^{\infty} \left(\frac{b}{r}\right)^{2n} Q_{2n} \right. \\ \qquad\qquad \left. (\cos 2n\vartheta - \cos 2(n+1)\vartheta) \right\}; \end{cases}$$

somit wird für den Körper 1

$$(27)\qquad \begin{cases} Y_y = -2 \dfrac{\partial}{\partial x} \left(z \dfrac{\partial P}{\partial x} \right) = +2\pi b \sigma_0 \left\{ \dfrac{\sin 2\vartheta \cos \vartheta}{r} \right. \\ \qquad \left. - \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{(2n+1) b^{2n}}{r^{2n+1}} Q_{2n} (\sin (2n+1)\vartheta - \sin (2n+3)\vartheta) \right\} \\ Y_z = 2 \dfrac{\partial}{\partial y} \left(z \dfrac{\partial P}{\partial x} \right) = +2\pi b \sigma_0 \left\{ \dfrac{\sin 2\vartheta \sin \vartheta}{r} \right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{(2n+1) b^{2n}}{r^{2n+1}} Q_{2n} (\cos (2n+1)\vartheta - \cos (2n+3)\vartheta) \right\} \\ Z_z = -\left(Y_y + 4 \dfrac{\partial P}{\partial x} \right) = +2\pi b \sigma_0 \left\{ \dfrac{2\sin^2 \vartheta}{r} \right. \\ \qquad + \displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{b^{2n}}{r^{2n+1}} Q_{2n} ((2n+5) \sin (2n+1)\vartheta \\ \qquad\qquad \left. - (2n+1) \sin (2n+3)\vartheta) \right\}. \end{cases}$$

Zieht man innerhalb des Körpers 1 um den Nullpunkt einen Halbkreis mit einem beliebigen Radius $r > b$ und bildet für denselben

$$(28)\qquad (Z) = \int (Y_z \cos \vartheta + Z_z \sin \vartheta)\, r\, d\vartheta,$$

so bestimmt (Z) den auf die Längeneinheit der X-Achse bezogenen Druck, der die Zylinder 1 und 2 gegeneinander preßt. Die einfache Rechnung ergibt

$$(29) \qquad (Z) = 2\pi^2 b\, \sigma_0.$$

Hiernach findet sich der in Y_y, Y_z, Z_z auftretende Faktor $2\pi b\, \sigma_0 = (Z)/\pi$ und ist somit durch eine physikalisch bestimmbare Größe ausgedrückt.

Für so große Entfernungen r von der Druckstelle, bzw. dem Koordinatenanfang, daß eine Beschränkung je auf die ersten Glieder der Ausdrücke (27) zulässig ist, werden die Resultate sehr einfach. Insbesondere findet sich aus (16) $\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\vartheta$, d. h. der Verlauf der Spannungslinien parallel und senkrecht zu dem Radiusvektor r nach der Druckstelle, und für die Größe der Hauptdrucke ergibt sich

$$(30) \qquad Y_y^0 = 4\pi b\, \sigma_0 \frac{\sin\vartheta}{r} = \frac{2(Z)\sin\vartheta}{\pi r}, \qquad Z_z^0 = 0,$$

wobei Y_y^0 radial wirkt. Im übrigen ist die vorstehende Darstellung naturgemäß mehr für die Berechnung einzelner Zahlwerte, als für eine allgemeine Diskussion geeignet.

Für das Innere des Kreises vom Radius b kann man eine Entwicklung nach steigenden Potenzen der Koordinaten y und z bilden; indessen konvergiert dieselbe schon längs des die Druckstelle darstellenden Durchmessers nicht gut.

10. Man wird daher im allgemeinen besser tun, trotz gewisser Unbequemlichkeiten den Weg beizubehalten, den Hertz bei dem Problem der *elliptischen* Druckflächen gegangen ist, also P als das Newtonsche Potential eines dreiachsigen Ellipsoides von parallel Z unendlich kleiner Achse zu behandeln, nun aber die der X-Achse parallele Ellipsoidachse unendlich werden zu lassen. Dem entspricht der Ansatz

$$(31) \qquad P = \pi b \gamma \int_{\mu}^{\infty} \frac{1 - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}}{\sqrt{\lambda(b^2+\lambda)}}\, d\lambda = \pi b \gamma (L - y^2 K - z^2 J);$$

dabei steht γ an Stelle des Produktes εc aus der Raumdichte ε und der zur Z-Achse parallelen Halbachse c; μ ist, da nur Punkte außerhalb der Querschnittsellipse in Betracht kommen, stets die positive Wurzel der Gleichung

$$(32) \qquad \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{\mu} = 1;$$

L, K, J sind Abkürzungen, die nicht besonders erklärt zu werden brauchen. Die bezüglichen Integrale sind leicht zu berechnen.

Bezeichnet K_0 eine unendliche Konstante, so gilt

$$(33)\quad \begin{cases} L = K_0 - \ln\left(\dfrac{\sqrt{b^2+\mu}+\mu}{\sqrt{b^2+\mu}-\mu}\right), \qquad K = \dfrac{2}{b^2}\left(1-\sqrt{\dfrac{\mu}{b^2+\mu}}\right), \\ J = \dfrac{2}{b^2}\left(\sqrt{\dfrac{b^2+\mu}{\mu}}-1\right); \end{cases}$$

nur der letztere Wert kommt für unsere Zwecke direkt in Betracht. Es gilt nämlich (streng und allgemein)

$$(34)\qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -2\pi b\gamma z J,$$

also im Medium 1 bei Fortlassung des Index (′)

$$(35)\quad \begin{cases} Y_y = 4\pi b\gamma\left(zJ + z\dfrac{\partial zJ}{\partial z}\right) = 4\pi b\gamma \dfrac{\partial z^2 J}{\partial z}, \\ Z_z = 4\pi b\gamma\left(zJ - z\dfrac{\partial zJ}{\partial z}\right) = -4\pi b\gamma z^2 \dfrac{\partial J}{\partial z}, \\ Y_z = -4\pi b\gamma z^2 \dfrac{\partial J}{\partial y}. \end{cases}$$

Für die Neigung der Spannungslinien gegen die Y-Achse liefert (16) die Beziehung

$$(36)\qquad \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\dfrac{\partial zJ}{\partial y}}{\dfrac{\partial zJ}{\partial z}} = -\operatorname{tg}(n, z);$$

dabei bezeichnet n die Normale auf der Kurve $zJ = \text{konst.}$, — zJ steht an Stelle von h in Formel (19); die Linienelemente der Spannungslinien halbieren die Winkel (n, z) bzw. $(n, -z)$. Zur Konstruktion der Spannungslinien benutzt man im allgemeinen am bequemsten diese geometrische Beziehung; denn die Gleichung $zJ = \text{konst.}$ ist (auch ohne Vernachlässigungen) relativ einfach. Aus

$$(37)\qquad z\left(\sqrt{\frac{b^2+\mu}{\mu}}-1\right) = k$$

gewinnt man nämlich bei Benutzung des aus (32) folgenden Wertes von μ leicht

$$(38)\qquad k^2(k+2z)^2 = (b^2 - r^2)\,k\,(k+2z) + b^2 z^2,$$

oder wenn man für numerische Berechnung $y/b = \eta$, $z/b = \zeta$, $r/b = \varrho$, $k/b = \varkappa$ setzt,

$$\varkappa(\varkappa + 2\zeta) - \frac{\zeta^2}{\varkappa(\varkappa + 2\zeta)} = 1 - \varrho^2 . \tag{39}$$

Berechnet man hier zu gegebenen $\varkappa$ und ζ gehörige Werte ϱ, so kann man sich leicht von dem Verlauf der Kurven in der ganzen Halbebene $\zeta > 0$ eine Vorstellung bilden. Überdies ergibt (39) für $\varkappa \gg \zeta$, wie für $\varkappa \ll \zeta$ zwei Scharen von Kreisen, welche Tatsache auch bei der Konstruktion verwertet werden kann.

Übrigens läßt sich die Differentialgleichung der Spannungslinien

$$dz/dy = \operatorname{tg}\varphi, \tag{40}$$

die der allgemeinen Integration (wegen der komplizierten Abhängigkeit von μ mit y und z) Schwierigkeiten bietet, in speziellen extremen Fällen leicht integrieren, und die Heranziehung dieser Resultate fördert den Einblick in den Verlauf der Spannungslinien.

So ergibt sich für $\mu \gg b^2$, d. h. also für große Entfernungen von der Druckstelle, aus $z\,J = z/r^2$ das Resultat, daß die eine Schar von Spannungslinien parallel dem Radiusvektor, die andere normal dazu verläuft. Für $\mu \ll b^2$ und $b^2 - y^2 \gg z^2$, d. h. in nächster Nähe der Mitte der Druckstelle, folgt

$$z\,J = \frac{2}{b^2}\left(\sqrt{b^2 - y^2} - z\right),$$

und daraus

$$y\,dz = \left(\sqrt{b^2 - y^2} \pm b\right) dy$$

und

$$z = \sqrt{b^2 - y^2} \pm b \ln\left(b \mp \sqrt{b^2 - y^2}\right) + \text{konst.} \tag{41}$$

Dies gibt eine Schar von Kurven, die durch Verschiebung $\parallel z$ ineinander übergehen.

Besonders ist der Fall von Interesse, daß y sehr nahe bei b liegt und $z \ll b$ ist. Setzt man dann $y = b + u$, $u^2 + z^2 = a^2$, dann wird in erster Annäherung

$$\mu = b(u + a), \qquad J = \frac{2}{b^2}\left(\sqrt{\frac{b}{u + a}} - 1\right),$$

somit

$$\frac{\partial \varkappa J}{\partial y} - \frac{-\varkappa}{a\sqrt{(u + a)\,b^3}}, \qquad \frac{\partial \varkappa J}{\partial z} = \frac{1}{u\sqrt{b^3}}\sqrt{u + a}. \tag{42}$$

Hieraus folgt schließlich in gleicher Annäherung

$$\text{(43)} \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{z}{\sqrt{u+a}}.$$

Dies ergibt, daß, wenn die Stelle $y = b$, $z = 0$, von einem Punkt $y > b$, $z = 0$, d. h. $u = a$, ausgehend, im nahen Halbkreise bis $y < b$, $z = 0$, d. h. $u = -a$ umgangen wird, dann $\operatorname{tg} 2\varphi$ von 0 bis ∞ zunimmt, also φ für die eine Schar Spannungslinien von 0 bis $^1/_4\pi$, für die andere von $\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{4}\pi$ geht.

Mit Hilfe dieser Angaben ist das in der Fig. 7 wiedergegebene System von Spannungslinien gewonnen und auch

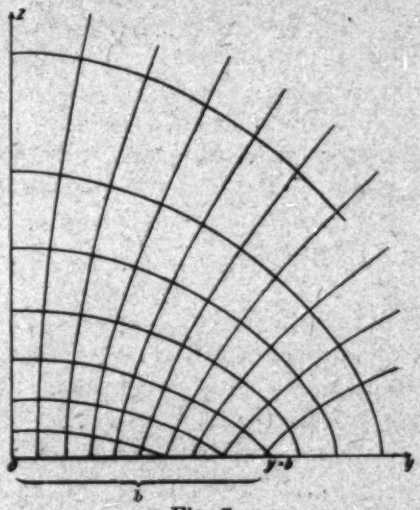


Fig. 7.

für die Betrachtung verständlich. Die Kurven sind für einen Teil des Quadranten $y > 0$, $z > 0$ gezeichnet; auf der Y-Achse ist die halbe Breite b der Druckfläche aufgetragen. Es ist daran zu erinnern, daß für die Y-Achse selbst die beiden Hauptdrucke Y_y^0 und Z_z^0 einander gleich werden, dort also die Spannungslinien ihre Bedeutung verlieren, nämlich alle Richtungen Hauptdrucken entsprechen.

11. Was die Größen der Druckkomponenten nach dem Achsensystem $X\,Y\,Z$ angeht, so ergibt sich in dem Fall größerer Entfernung von der Druckstelle, wo in Annäherung $\mu = r^2$ und $J = 1/r^2$ ist, das System von Werten

$$\text{(44)} \qquad Y_y = 8\pi b\gamma \frac{x y^2}{r^4}, \qquad Z_z = 8\pi b\gamma \frac{x^3}{r^4}, \qquad Y_z = 8\pi b\gamma \frac{y x^2}{r^4},$$

wozu noch kommt

$$X_x = \frac{8\pi b\gamma c_1}{c+c_1}\,\frac{x}{r^2}. \tag{45}$$

Die Summe aller zur Z-Achse parallelen Druckkomponenten, berechnet für die Längeneinheit eines halben Kreiszylinders um die X-Achse, also

$$\int_0^\pi \frac{Z_y y + Z_z z}{r}\cdot r\,d\varphi = (Z), \tag{46}$$

bestimmt wiederum den auf die Längeneinheit bezogenen Gesamtdruck (Z), der die Körper 1 und 2 gegeneinander preßt. Das Einsetzen der Ausdrücke (44) liefert

$$4\pi^2 b\gamma = (Z), \tag{47}$$

womit nun auch γ bzw. der in (44) und (45) auftretende Faktor $8\pi b\gamma$ durch diesen als gegeben zu denkenden Druck (Z) bestimmt ist.

Von den Hauptdrucken hat in dem oben bezeichneten Bereich der radiale den Wert

$$R_r = 8\pi b\gamma\,\frac{z}{r^2} = \frac{2z}{\pi r^2}(Z), \tag{48}$$

der dem Bogenelement parallele den Wert Null. Dazu kommt als dritter

$$X_x = \frac{8\pi b\gamma c_1}{c+c_1}\,\frac{x}{r^2} = \frac{2c_1 z}{\pi(c+c_1)r^2}(Z). \tag{49}$$

Diese Resultate stimmen mit den in § 8 auf anderem Wege gewonnenen überein und sind nur zur Bestätigung angeführt.

Für Bereiche nahe der Z-Achse, wo nach Anschauung die Spannungen extreme Werte annehmen werden, kann man y als klein neben b betrachten und erhält dann

$$\mu = z^2\left(1+\frac{y^2}{b^2+z^2}\right),\quad J = \frac{2}{b^2}\left(\frac{\sqrt{b^2+z^2}}{z} - \frac{b^2y^2}{2z\sqrt{b^2+z^2}^3} - 1\right). \tag{50}$$

Für Punkte der Z-Achse selbst folgt

$$\left\{\begin{aligned} Y_y &= \frac{2}{\pi b^2}\left(\frac{b^2+2z^2}{\sqrt{b^2+z^2}} - 2z\right)(Z), \qquad Z_z = \frac{2}{\pi\sqrt{b^2+z^2}}(Z),\\ X_x &= \frac{4c_1}{\pi(c+c_1)b^2}\left(\sqrt{b^2+z^2} - z\right)(Z), \end{aligned}\right. \tag{51}$$

während $Y_z = 0$ ist.

Diese Formeln zeigen, daß *längs der ganzen Z-Achse alle drei Hauptdrucke positiv sind.* Daß gleiches auch längs der Y-Achse, insbesondere auch innerhalb der Berührungsfläche gilt, ist bereits oben gezeigt worden, ebenso für den ganzen Umkreis in großer Entfernung von der Berührungsfläche. Es kann als sicher gelten, daß überhaupt in dem ganzen, zylindrisch gedrückten Körper keine Zugspannungen auftreten. Dies steht in bemerkenswertem Gegensatz zu den Folgerungen, die Hertz speziell für den Fall *kreis*förmiger Berührungsflächen gezogen hat, dahingehend, daß nahe der Grenzebene $z = 0$ *radiale Zug*spannungen wirken, die ungefähr am Rande der Berührungsfläche die größten Werte annehmen. Hertz[1]) hat dieses Ergebnis durch Beobachtungen bestätigt, bei denen durch den Druck einer Kugelfläche von kleinem Radius gegen eine ebene Platte aus sprödem Material in letzterer Sprünge entstanden, die von einer die Berührungsfläche konzentrisch umgebenden Kreislinie in das Innere der Platte gingen. Er hat auf diesen Vorgang bekanntlich eine neue Definition der Härte spröder Materialien gegründet, die von Auerbach[2]) in umfänglichen Messungen geprüft worden ist, allerdings mit einigermaßen zweifelhaftem Erfolg.

12. Nachdem hiermit die Resultate der Hertzschen Theorie für zylindrische Berührung zweier isotropen Körper so weit entwickelt sind, daß die Spannungs- und damit auch die Dilatationsverhältnisse in den gedrückten Körpern klar gestellt erscheinen, handelt es sich noch um ihre Anwendung auf das Spaltungsproblem. Wie schon oben bemerkt, darf als sicher gelten, daß die Spannungsverhältnisse in einem *Kristall* mit drei Symmetrieebenen, die in die früheren Koordinatenebenen YZ, ZX, XY fallen, bei einer Einwirkung von der Art der oben behandelten sich *nur quantitativ* von den durch die Hertzsche Theorie für isotrope Körper bestimmten unterscheiden. Insbesondere darf das Resultat des positiven Vorzeichens aller drei Hauptdrucke für die ganze Z-Achse (bzw. XY-Ebene) auf einen solchen Kristall übertragen werden, und vor allem auf einen *regulären* Kristall, wie Steinsalz. Hiernach muß man aber den Vorgang der Spaltung dort wesentlich anders auffassen, als die Erzeugung des Sprunges

1) H. Hertz, Verh. d. Vereins usf. Nov. 1882.
2) F. Auerbach, Wied. Ann. 43. S. 61. 1891.

bei dem erwähnten Hertzschen Versuch. *Die Spaltung entsteht nicht in einem einseitig gedehnten, sondern in einem allseitig gedrückten Volumenelement.* Der Vorgang gewinnt damit eine gewisse Analogie zu dem des Zerreißens von Steinsalzstäben, die unter einem Seitendruck stehen, über welchen ich Beobachtungen angestellt habe.[1]) Die Stäbe, normal zu einer Würfelfläche orientiert, wurden zum Teil im Luftraum, zum Teil in einer stark komprimierten Kohlensäureatmosphäre einem longitudinalen Zug ausgesetzt. Sie zerrissen im ersten Falle bei einem gemessenen Zug von 578 g pro mm², im letzteren Falle bei 562 g, während der Gasdruck bzw. 10 und 516 g betrug; der *effektive* Zug war im letzten Falle also nur 46 g gegen 568 g im ersten, und es konnte als ganz unzweifelhaft bezeichnet werden, daß bei noch höherem Gasdruck (den hervorzubringen die Einrichtung nicht gestattete) die Zerreißung auch bei einem *negativen* Effektivzug eingetreten sein würde. In der Tat haben spätere Beobachtungen[2]) mit einem (isotropen) Material von geringerer Zugfestigkeit diese Folgerung bestätigt, desgleichen die andere, daß bei verschiedenen Gasdrucken immer nahezu *dieselbe gemessene Zugkraft* zur Zerreißung erforderlich ist. Man kann sich dieses mit manchen der früher aufgestellten Festigkeitsbedingungen unvereinbare Resultat dadurch verständlich machen, daß man berücksichtigt, daß allseitige Drucke, auch von beträchtlicher Größe, die *Konstitution* eines Körpers nicht erheblich ändern werden, und daß demgemäß die Festigkeitsversuche innerhalb Atmosphären von verschiedenem Druck zu nahe gleichen Resultaten führen müssen.

Leider kann aber aus diesen Beobachtungen keine *direkte* Folgerung für den hier vorliegenden Fall gezogen werden, denn es handelt sich bei dem Spaltungsproblem um einen wesentlich komplizierteren Vorgang. Einmal sind hier im allgemeinen nicht (wie bei den beschriebenen Beobachtungen) zwei von den drei Hauptdrucken einander gleich, und außerdem ist der Spannungszustand nicht homogen. Eine Untersuchung über Festigkeit bei homogener Spannung mit drei verschie-

1) W. Voigt, Göttinger Nachr. 1893. S. 521; Wied. Ann. 53. S. 43. 1894.

2) W. Voigt u. L. Januszkiewicz, Göttinger Nachr. 1898, S. 107; Wied. Ann. 67. S. 452. 1899.

denen Hauptspannungen steht noch aus; sie wäre von allergrößter Wichtigkeit, dürfte aber sehr große Schwierigkeiten bieten. Von dem Gesetz des Einflusses einer Inhomogenität der Spannungsverteilung auf die Festigkeit wissen wir überhaupt noch so gut wie nichts; nur allein, daß solch ein Einfluß von beträchtlichem Betrage besteht, ist festgestellt.

Immerhin kann man vielleicht eine rohe Beziehung der Spaltungen zu den genannten Zerreißversuchen an Steinsalz herstellen, wenn man ein Volumelement $dx\,dy\,dz$ in Parallele setzt zu den in komprimiertem Gas zerrissenen Präparaten. Die Y-Richtung entspricht dann (da die Spaltung nach einer Würfelfläche geschieht) der Längsrichtung der früher untersuchten Präparate; die Querdrucke sind X_x und Z_z, der Längsdruck ist Y_y. Natürlich bleibt es zweifelhaft, welche Funktion der Seitendrucke X_x und Z_z man zu dem Gasdruck p in Parallele setzen soll; vermutlich wird eine Beziehung

$$p = (a X_x + b Z_z)/(a + b)$$

zulässig sein, wobei man aber über die Parameter a und b bisher nichts aussagen kann. Indessen ist diese Frage nicht

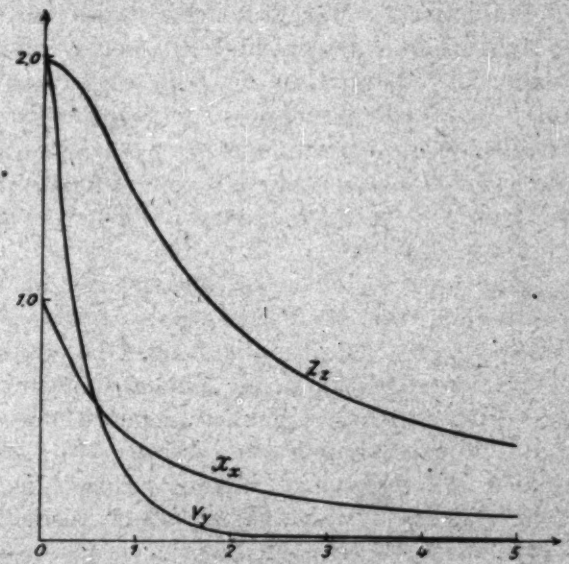


Fig. 8.

von sonderlicher Bedeutung. Faßt man nun den Verlauf von X_x, Y_y, Z_z ins Auge, wie er in Fig. 8 bei X_x unter der Voraus-

setzung der Poissonschen Relation $c = 3c_1$ zwischen den Elastizitätskonstanten dargestellt ist (Ordinaten sind $X_s \pi b$, $Y_s \pi b$, $Z_s \pi b$), dann sieht man, daß $p - Y_s$ seinen größten Wert nicht in der Oberfläche $z = 0$, sondern ein wenig darunter annimmt. Man möchte danach folgern, daß bei der Spaltung auch der erste Sprung nicht in der Oberfläche selbst, sondern ein wenig darunter entsteht.

Im Vorstehenden ist nur von einer *statischen* Theorie der Spaltung gesprochen. Wird die Schneide nicht durch einen konstanten Druck, sondern durch einen *Schlag* gegen den Kristall getrieben, so liegen die Dinge für eine Theorie noch schwieriger. Vermuten kann man indessen, die besondere Wirkung des Schlages möchte darauf beruhen, daß sich die erzeugte Spannungsverteilung wellenartig in den Kristall fortpflanzt, in den ersten Zeitelementen auf ein sehr kleines Bereich beschränkt ist, dort aber dafür viel höhere Drucke hervorruft, als bei statischer Wirkung einer ähnlichen Kraftwirkung gegen die Schneide.

III. Zerreißungsfestigkeit.

Das Problem der Zerreißungsfestigkeit von Kristallen, das auf den ersten Blick viel einfacher erscheint, als die ihm hier vorangestellten der Schiebung bzw. Translation und Spaltbarkeit, enthält dennoch ein Element der Komplikation, das bei jenen fehlt oder doch wahrscheinlich im Einfluß stark zurücktritt: eine spezifische *Oberflächenwirkung*. Nach von mir gemeinsam mit meinem (längst verstorbenen) Schüler A. Sella durchgeführten Beobachtungen[1]) besitzen Stäbe von Steinsalz, die mit quadratischem Querschnitt und in einer durch Fig. 5 dargestellten Form hergestellt waren, bei gleicher Orientierung der Längsachse, bzw. Zugrichtung, eine ungemein verschiedene Zerreißungsfestigkeit, je nach der Orientierung der (angenähert prismatischen) Seitenflächen gegen den Kristall.

So lieferten drei Gattungen von Präparaten, deren Längsachsen in einer Würfelnormalen lagen, während die Normalen auf den Seitenflächen mit den anderen Würfelnormalen Winkel von 0°, 22,5° und 45° einschlossen, Festigkeitsgrenzen von 572, 714 und 917 g/mm². Ferner ergaben vier Gattungen von

1) A. Sella u. W. Voigt, Ann. d. Phys. u. Chem. 48. S. 636. 1893.

Präparaten, deren Längsachsen in eine Granatoedernormale fielen, während die Seitenflächen mit der durch die Längsachse gehenden Würfelebene die Winkel 0°, 19°, 38°, 45° einschlossen, die Festigkeitszahlen 1150, 1620, 1780, 1840 g/mm². Dabei stimmten die an jeder Gattung ausgeführten Messungen untereinander sehr befriedigend überein.

Auch diese Resultate verlangen nach einer theoretischen Erklärung aus der Struktur des bezüglichen Kristalles, die aber vorläufig Schwierigkeiten bieten dürfte.

Immerhin läßt sich schon jetzt ein Oberflächeneinfluß der beschriebenen Art wenigstens verständlich machen, wenn man von der (gut begründeten) Vorstellung ausgeht, daß die Wechselwirkungen *zwischen den unmittelbar benachbarten* Atomen des Raumgitters die für die Kohäsionserscheinungen *in erster Linie maßgebenden* sind. Zieht man nur die in den Kanten und Diagonalen der würfelförmigen Zellen des Gitters liegenden Kräfte in Betracht, so ergibt sich folgendes.

Eine jede Begrenzung des Kristalles läßt für die in der Oberfläche liegenden Atome eine gewisse Anzahl derartiger Wechselwirkungen *ausfallen*, so daß dieselben durch geringere Kräfte gehalten werden, als die im Inneren des Kristalles liegenden Atome, und diese ausfallenden Kräfte sind für verschiedene Orientierungen der Begrenzungsfläche verschieden. Man kann danach verstehen, einmal, daß die Oberflächenschicht an sich geringere Kohäsion besitzt, als eine gleiche Schicht im Inneren des Kristalles, sodann, daß diese Differenz von der Orientierung der Schicht abhängt.

Um dies näher zu erläutern, sei der erste oben erwähnte Fall von Präparaten betrachtet, die mit ihrer Längsachse sämtlich einer Würfelnormalen parallel liegen. In Fig. 9 ist in früherer Weise das Raumgitter für Steinsalz angedeutet. Es mag die Kohäsion zwischen dem gezeichneten Atomnetz und dem (mit vertauschten Atomgattungen) unmittelbar darunter liegenden betrachtet werden.

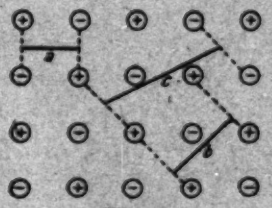


Fig. 9.

Die Strecke *a* mag ein Stück einer zu einer Würfelfläche parallelen Begrenzung (normal zur Figurenebene) andeuten. Indem längs derselben die eine Hälfte des Kristalles beseitigt wird, kommen

eine Anzahl der zwischen den beiden Atomnetzen wirkenden Kräfte in Wegfall, und zwar, auf die Elementarstrecke a bezogen, je *eine* (in einer Flächendiagonale der würfelförmigen Zelle liegende) Wechselwirkung $(+, +)$ und $(-, -)$, aber vier (in einer Würfeldiagonale liegende) Wechselwirkungen $(+, -)$ oder $(-, +)$. Dies gibt auf die Längeneinheit bezogen: $[(+, +) + (-, -) + 4(-, +)]/a$.

Die Strecke $b = a\sqrt{2}$ stelle ebenso ein Stück einer zu einer Granatoederfläche parallelen Begrenzung dar. Die, auf die Längeneinheit bezogenen, ausfallenden Wechselwirkungen sind hier: $[2(+, +) + 2(-, -) + 4(-, +)]/a\sqrt{2}$. Endlich gibt $c = a\sqrt{5}$ eine Begrenzung, die (angenähert) um 22,5° gegen eine Würfelfläche geneigt ist. Der den vorigen entsprechende Ausdruck wird hier:

$$[3(+, +) + 3(-, -) + 6(-, +)]/a\sqrt{5}.$$

Die Ausfälle an Kohäsionskräften sind also für die drei Begrenzungsarten verschieden, und es ist damit das Resultat der Beobachtung immerhin dem Verständnis einigermaßen näher gebracht.

Göttingen, im Juli 1919.

(Eingegangen 29. Juli 1919.)

3. *Quantentheorie und Adiabatenhypothese;* *von K. Försterling.*

§ 1. Einleitung.

Die Quantentheorien von Planck[1]) und Sommerfeld[2]) gehen beide von den Vorstellungen der statistischen Mechanik aus, indem sie die Größe des Volumenelements gleicher Wahrscheinlichkeit durch die Quantenbedingung festlegen, und zwar soll, wenn wir wie Boltzmann mit p die verallgemeinerten Koordinaten, mit q die Impulse bezeichnen, nach der spezielleren Sommerfeldschen Formulierung

$$\iint d p_i d q_i = h \tag{1}$$

sein oder

$$\int q_i d p_i = m h \qquad m = 1, 2, 3 \ldots \tag{2}$$

Zweifellos bietet diese an den abstrakten Begriff der Einteilung des Phasenraumes anknüpfende Einführung der Quantentheorie der physikalischen Vorstellung erhebliche Schwierigkeiten, zumal die Wahl der Koordinaten durch eine weitere Regel[3]) besonders festgelegt werden muß. Es hat daher der Versuch gewiß etwas für sich, die an der Erfahrung so gut bestätigten Quantenregeln mit Hilfe der Identität

$$\sum \int q_k d p_k = \int q_k \frac{d p_k}{d t} d t = 2 \int \mathsf{T} d t \tag{3}$$

(worin T die kinetische Energie bedeutet) mit dem Wirkungsintegral des Prinzips der kleinsten Wirkung zu verknüpfen.

---

1) M. Planck, Ann. d. Phys. **50**. S. 385. 1916.
2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **51**. S. 1. 1916.
3) K. Schwarzschild, Berl. Berichte S. 548. 1916; P. S. Epstein, Ann. d. Phys. **50**. S. 489. 1916.

Soll diese Verknüpfung indessen nicht rein äußerlich sein[1]), so stößt man bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden auf folgende Schwierigkeit: Beim Prinzip der kleinsten Wirkung:

$$\delta \sum \int_1^2 q_i \, d p_i = 0 \tag{4}$$

(mit den bekannten Nebenbedingungen) ist das Integral von einem festen Punkte $\underline{1}$ zu einem anderen Punkte $\underline{2}$ der Bahnkurve zu erstrecken. Die Integrale

$$\int_1^2 q_i \, d p_i$$

sind dann aber keineswegs diejenigen Größen, die der Quantelung zu unterwerfen sind.[2])

Ferner lassen sich die Quantenbedingungen für jeden Freiheitsgrad nicht in eine einzige Beziehung wie in Gleichung (1) zusammenfassen, sondern stellen immer eine Reihe von Gleichungen in der Form der Gleichungen (2) dar, die den Quantenansatz bei weitem weniger einheitlich erscheinen lassen.

§ 2. Formulierung der Quantenbedingung im Anschluß an die Ehrenfestsche Adiabatenhypothese.

Im folgenden soll zunächst gezeigt werden, auf welche Weise sich einmal diese Schwierigkeiten lösen und dann, wie sich aus einer allerdings etwas allgemeineren Quantenforderung die „richtige" Koordinatenwahl ergibt. Der Weg hierzu ist durch die Ehrenfestsche Adiabatenhypothese angedeutet. Mit P. Ehrenfest betrachten wir ein mechanisches System, dessen Koordinaten zum Teil rasch veränderlich seien (wir bezeichnen sie mit p_h und die dazu gehörigen Impulse mit q_h), während der andere Teil (p_a) sich stets so langsam ändern soll, daß $d p_a / d t$ und die entsprechenden Momente q_a verschwindend klein sind. Die durch langsame Veränderung der p_a geleistete Arbeit sei δA, die Gesamtenergie E, die kinetische Energie wieder T. Dann ist

$$\delta Q = \delta E - \delta A \tag{5}$$

die den p_h direkt zugeführte Energie.

1) P. Debeye, Götting. Nachr. 1916 u. Phys. Ztschr. 1916, S. 507.
2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51. S. 7. 1916.

Vergleichen wir die Bahn eines Systems, welche mit der konstanten Energie E in der Zeit $(t_2 - t_1)$ durchlaufen wird, mit einer benachbarten Bahn, die das System mit der ebenfalls konstanten Energie $(E + \delta E)$ in der Zeit $(t_2 + \delta t_2) - (t_1 + \delta t_1)$ beschreibt, so findet sich[1])

$$\delta Q = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[2\,\delta \int_{t_1}^{t_2} T\,dt - \left|\sum q_k\,\delta p_k\right|_1^2\right]. \tag{6}$$

Eine mechanische Veränderung des Systems, bei welcher dauernd

$$\delta Q = 0$$

ist, nennen wir eine adiabatische. Alle derartigen adiabatischen Veränderungen lassen sich, soweit unsere Kenntnis reicht, nach den Gesetzen der klassischen Mechanik und Maxwellschen Elektrodynamik berechnen.

Die Ehrenfestsche Adiabatenhypothese besagt:

„Bei adiabatisch-reversibler Beeinflussung eines Systems gehen (quantentheoretisch) ‚erlaubte' Bewegungen stets wieder in ‚erlaubte' über."

Freilich ist wohl bei unserer Kenntnis der betreffenden Vorgänge noch nicht mit voller Sicherheit in allen Fällen zu entscheiden, ob eine Koordinate zu den p_k oder den p_k zu rechnen ist und ob eine Einwirkung adiabatisch ist oder nicht. Jedenfalls findet die Adiabatenhypothese eine starke Stütze in den Versuchen von W. Wien[2]), beim Starkeffekt das elektrische Feld bei einer bewegten Lichtquelle durch ein magnetisches gemäß dem Biot-Savartschen Gesetz zu ersetzen, sowie durch die Resultate der Behandlung der Dispersion und magnetischen Drehung, welche Sommerfeld[3]) unter Anlehnung an die Adiabatenhypothese gegeben hat. Auch haben P. Ehrenfest[4]) und J. M. Burgers[5]) die Harmonie der Adiabatenhypothese mit den Sommerfeldschen Quantenansätzen bei periodischen und bedingt periodischen Systemen zu erweisen vermocht. Bei allgemeineren Bewegungen, wie

1) Boltzmann, Prinzipe der Mechanik II, S. 162; P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. **51**. S. 346. 1916.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. **49**. S. 842. 1916.

3) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **52**. S. 497. 1917.

4) P. Ehrenfest, a. a. O.

5) J. M. Burgers, Ann. d. Phys. **52**. S. 195. 1917.

sie z. B. von Epstein[1]) in Hinblick auf den lichtelektrischen Effekt untersucht sind, scheint mir eine solche Übereinstimmung nicht mehr zu existieren. Betrachten wir z. B. ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad, so würde die Quantenbedingung lauten:

$$\int_1^2 q\, d\, p = m\, h \qquad m = 1, 2, 3 \ldots$$

wobei die Punkte 1 und 2 gegeben sind. Eine Einwirkung, welche die Quantenbedingung nicht verletzt, müßte also der Gleichung genügen:

$$\delta \int_1^2 q\, d\, p = 0\,.$$

Da nun aber im allgemeinen die Grenzglieder in der Gleichung (6) nicht verschwinden, stellt die durch die letzte Gleichung gegebene Zustandsänderung *keine* adiabatische dar. Man wird in diesen allgemeineren Fällen also vor die Wahl gestellt, entweder in der Sommerfeldschen Formulierung der Quantenansätze noch nicht die allgemeinste gültige Form zu sehen oder die Ehrenfestsche Adiabatenhypothese fallen zu lassen. In der vorliegenden Arbeit soll die Ehrenfestsche Adiabatenhypothese als allgemein gültig angesehen werden. Die allgemeine Form der Quantenansätze ist uns dann noch unbekannt; wir wollen über sie nur folgende Annahme machen:

Die Quantenbedingung sondert aus den mechanisch möglichen Bewegungen eine bestimmte Bewegung und alle, die sich aus dieser adiabatisch ableiten lassen, als „erlaubte" Bewegungen aus (verallgemeinerte Ehrenfestsche Adiabatenhypothese).

Von adiabatischen Zustandsänderungen setzen wir voraus, daß sie den Gesetzen der Elektrodynamik und Mechanik folgen.[2]) Also eine adiabatisch erfolgende elektrische Schwingung strahlt nach den Gesetzen der Maxwellschen Theorie ihre Energie aus.[3])

---

1) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 50. S. 815. 1916.

2) P. Ehrenfest, Verh. Amsterdam 1914; K. Försterling, Ann. d. Phys. 47. S. 1127. 1915.

3) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 53. S. 504. 1917.

§ 3. **Bewegungen mit Quantenbedingung in spezieller Form.**

Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Sommerfeldsche Quantenbedingung im allgemeinen keine adiabatischen Zustandsänderungen definiert. Wir werden im Gegenteil annehmen müssen, daß im allgemeinsten Falle das Auswahlgesetz ebensowenig wie die Adiabate in geschlossener Form angebbar ist. Um also die Fälle abzugrenzen, in denen die allgemeine Quantenbedingung z. B. in die Sommerfeldsche Form übergehen kann, haben wir die Bedingungen für die Existenz einer Adiabatengleichung in geschlossener Form aufzusuchen. Die Gleichung

$$\delta Q = 0$$

ist aber nur dann auf die Form

$$\eta = \text{const}$$

zu bringen, wenn δQ einen integrierenden Nenner ϑ hat, also

$$\frac{\delta Q}{\vartheta} = \delta \eta$$

ist. In diesem Falle hat man es also gerade mit denjenigen Bewegungen zu tun, welche die bekannten Analogien mit dem II. Hauptsatz der Thermodynamik zeigen. L. Boltzmann hat sich mit diesem Problem eingehend beschäftigt und nach solchen mechanischen Vorgängen gesucht, wo die störenden Grenzglieder in Gleichung (6) wegfallen. Es scheint, daß nur periodische Systeme diese Bedingung erfüllen.

Haben wir ein System mit einem Freiheitsgrad, wo die Koordinate $\mathfrak{p}$ nach Ablauf der Periode τ ihren Anfangswert wieder annimmt, und ist auch die variierte Bewegung periodisch, so daß nach der Zeit $\tau + \delta\tau$ die Koordinate $(\mathfrak{p} + \delta\mathfrak{p})_2$ den Ausgangswert $(\mathfrak{p} + \delta\mathfrak{p})_1$ gerade wieder erreicht, so heben sich die Grenzglieder weg, falls das Integral über die volle Periode erstreckt wird und es gilt:

$$\delta Q = \delta 2 \oint \mathfrak{T}\, dt = \delta \oint \mathfrak{q}\, d\mathfrak{p}\,.$$

Hier bezeichnet:

$$w = 2 \oint \mathfrak{T}\, dt = \oint \mathfrak{q}\, d\mathfrak{p} = \text{const}$$

in der Tat die Gleichung einer Adiabate.

Bei einem System von mehreren (n) Freiheitsgraden dagegen gelangt man selbst dann, wenn jeder Freiheitsgrad für sich periodisch ist, nicht zu einer integrablen Beziehung

für die Adiabate (abgesehen von dem „entarteten" Falle, daß alle n-Perioden der n-Freiheitsgrade in rationalem Verhältnis stehen sowohl bei der unvariierten wie bei jeder variierten Bewegung). Damit nämlich die Grenzglieder verschwinden, muß sich eine Zeit t_2 finden lassen, zu welcher alle Freiheitsgrade zugleich zu ihrem Wert zurückgekehrt sind, den sie zur Zeit t_1 hatten.

Für die Anwendung der Quantenbedingung in endlicher Form bleibt somit — vielleicht abgesehen von noch nicht näher bekannten Spezialfällen — nur der triviale Fall übrig, daß das vorliegende System sich in n-periodische Einzelsysteme zerlegen läßt, die sich in keiner Weise beeinflussen und voneinander vollständig unabhängig variiert werden können, kurz die sich wie n räumlich getrennte periodische Systeme mit einem Freiheitsgrade verhalten. In diesem Falle kann jedes Einzelsystem für sich gesondert behandelt werden. In der Gleichung (6)

$$\delta Q = \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_h \left[\delta \int_1^2 q_h \, d p_h - \left| q_h \, \delta p_h \right|_1^2 \right]$$

darf also jedes Glied unter der Summe nur von einer schnell veränderlichen Koordinate abhängen, d. h. q_h darf nur von p_h und keinem anderen der übrigen p_i abhängen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, lassen sich bekanntlich die Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichungen des Systems separieren. Hier folgt also aus allgemeinen Betrachtungen die Schwarzschild-Epsteinsche Regel in der Form:

Auf ein System von n-Freiheitsgraden ist die spezielle (z. B. Sommerfeldsche) Quantenforderung nur dann anwendbar, wenn sich ein Koordinatensystem der Quantelung zugrunde legen läßt, in dem sich die Jacobi-Hamiltonschen Differentialgleichungen separieren lassen.

§ 4. Formulierung der speziellen Quantenbedingung.

Für den Fall, daß

$$w = \text{const}$$

eine Adiabate definiert, wollen wir unserer allgemeinen im Anschluß an die Ehrenfestsche Adiabatenhypothese aufgestellten Quantenforderung folgende spezielle Form geben:

Der Zustand

$$w = h \,,$$

wobei das Integral w über das kleinste Zeitintervall zu erstrecken ist, in dem das System seinen Anfangszustand wieder erreicht, und alle aus ihm adiabatisch ableitbaren Bewegungen sind die allein „zugelassenen". Diese Fassung steht an Einfachheit der durch Formel (1) gegebenen Planck-Sommerfeldschen Formulierung nicht nach. Es ist jedoch noch zu zeigen, daß aus unserer Formel sich die Zustände

$$\oint q_i \, d\, p_i = m\, h \qquad m = 2, 3 \ldots,$$

ebenfalls als „erlaubte" ergeben.

Erstrecken wir nämlich das Integral

$$\int q \, d\, p$$

über m-Perioden, so hat es den Wert $w' = m\, h$.

Wir fassen nun die Bewegung als periodisch mit der Periode $\tau' = m\, \tau$ auf und denken uns adiabatisch eingewirkt — es bleibt also w' unverändert —, wobei immer darauf zu achten ist, daß die Bewegung, wenn auch mit variierter Periode, eine geschlossene bleibt. Dagegen ist es nicht nötig, daß zuvor wie bei der ursprünglichen Bewegung der Ausgangspunkt passiert wird. Aus einer Bewegung mit der Periode τ wird eine solche von der Periode $m\,(\tau + \delta\tau)$. Alle die hierdurch charakterisierten Bahnen sind nach unserer Annahme ebenfalls „zugelassene" Bahnen. Die Gesamtheit aller erlaubten Bewegungen läßt sich also durch

$$\oint q \, d\, p = m\, h \qquad m = 1, 2, 3 \ldots$$

definieren, was mit Gleichung (2) übereinstimmt.

Wir denken uns nun zwei periodische Systeme mit je einem Freiheitsgrad, ihre Wirkungsgrößen seien w_1 und w_2, die Perioden τ_1 und τ_2. Diese beiden Systeme sollen in Wechselwirkung treten, so daß zwar adiabatische gegenseitige Beeinflussung nicht stattfindet, aber doch die Koordinaten p_1 und p_2 miteinander gekoppelt sind.

Wir vergleichen die Bewegungen zu Anfang und am Abschluß des unendlich kleinen Energieaustausches. Es gilt dann

$$\delta Q_1 = \frac{\delta w_1}{\tau_1}, \qquad \delta Q_2 = \frac{\delta w_2}{\tau_2}, \qquad \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0.$$

Wenn z. B. w_1 zu Anfang einen Minimalwert hat, so kann nur sein

$$\delta w_1 > 0,$$

also ist δQ_1 positiv, δQ_2 und ebenso δw_2 negativ. Das System mit größerer Quantenzahl erniedrigt also bei dem Austausch seine Quantenzahl und gibt Energie an das System mit kleinerer Quantenzahl ab.

Wir wollen den Zustand, welcher der kleinsten möglichen Quantenzahl entspricht, als stabil ansehen; die übrigen „erlaubten" Zustände als metastabil. Ist T nicht gleich Null, so ist $w = h$ der stabile Zustand. Man sieht sogleich ein, in wie enger Beziehung diese Überlegungen zu dem Bohrschen Atommodell und den Sommerfeldschen Quantenungleichungen[1]) stehen.

§ 5. Die Bohrsche Frequenzbedingung.[2])

Bereits am Schluß des vorigen Paragraphen haben wir auch nichtadiabatische Vorgänge herangezogen. Wir wollen jetzt auf diese näher eingehen und speziell die Lichtemission gemäß den Bohrschen Vorstellungen untersuchen. Es handelt sich hierbei um die Aussendung einer Welle von der Periode τ in den Äther. Während der Zeit der Emission selbst ist der Zustand im Äther freilich nicht streng periodisch, da seine Energie innerhalb einer Periode wächst. Indessen folgt aus den Interferenzerscheinungen bei sehr hohen Gangunterschieden, daß die Emission sich über eine außerordentlich große Zahl von Perioden erstreckt, so daß die Veränderung innerhalb einer Periode ganz außerordentlich klein ist. Daher können, wenn wieder wie in Gleichung (6) das Integral $\int T\,dt$ über eine Periode erstreckt wird, die Grenzglieder fortgelassen werden, da sie sich nahezu aufheben.

Vergleichen wir den Zustand zwischen den Zeiten t_1 und $(t_1 + \tau)$ mit demjenigen zwischen t_2 und $(t_2 + \tau)$, wobei der Zeitraum $(t_2 - t_1)$ bei der Langsamkeit des Emissionsvorganges sich über sehr viele Perioden erstrecken mag, so gilt

$$\delta Q = \frac{\delta w}{\tau},$$

wo δQ die dem Äther während $(t_2 - t_1)$ zugeführte Energie ist. Die Energie des Äthers mag während des gesamten

---

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51. S. 23. 1916.

2) Über andere Versuche, die Bohrsche Frequenzbedingung abzuleiten, vgl. A. Einstein, Verhandl. d. D. Phys. Ges. 18. S. 318. 1916. L. Flamm, Phys. Ztschr. 19. S. 116. 1918.

Emissionsvorganges von Null bis ε wachsen, während w von Null bis $\bar{w}$ zunehmen mag. Bei der Emission von Spektrallinien ist τ zu allen Zeiten dasselbe. Daher folgt durch Summation aller δQ, da

$$\sum \delta Q = \varepsilon \quad \text{und} \quad \sum \delta w = \bar{w}$$

ist,

$$\varepsilon = \frac{\bar{w}}{\tau} . \tag{7}$$

Da die ausgesandte Welle für sich einen stabilen Zustand[1]) darstellt, muß sein

$$\bar{w} = h .$$

Die Energie ε wird nach den Bohrschen Vorstellungen durch den Übergang eines Elektrons aus einer Quantenbahn von der Energie E_1 in eine solche mit der Energie E_2 geliefert. Nach dem Energieprinzip muß sein

$$\sum \delta Q + \sum \delta A = E_2 - E_1 .$$

Bei einem Wasserstoffatom soll ein einzelnes Elektron sich um eine einzelne Kernladung bewegen. Adiabatische Vorgänge sind bei diesem einfachen Falle nur durch äußere Eingriffe (Einschalten elektrischer oder magnetischer Felder usw.) zu erwarten. Schließen wir diese aus, so ist

$$\sum \delta A = 0 \qquad \sum \delta Q = \varepsilon = E_2 - E_1 .$$

Wir gelangen also in Übereinstimmung mit Bohr zu der Frequenzbedingung

$$E_2 - E_1 = \frac{h}{\tau} .$$

Sind in dem Atom dagegen zahlreiche in mehreren Ringen angeordnete Elektronen vorhanden, so wird der Übergang eines Elektrons von einer Quantenbahn zu einer anderen im allgemeinen die Konfiguration des gesamten Ringsystems ändern. Hierbei können sehr wohl adiabatische Schwingungen der Ringe auftreten, welche von einer Energieausstrahlung

---

1) Es ist vielleicht nicht ganz ausgeschlossen, daß w auch die Werte $m \cdot h$ annehmen kann. Doch ist diese Möglichkeit nach unserer oben dargelegten Auffassung sehr unwahrscheinlich. Ihr würden Linien von der doppelten Wellenlänge als die der gewöhnlichen Serien entsprechen, die aber, wenn sie überhaupt vorhanden sind, sehr schwach sein müßten.

begleitet sind, die nach unserer Grundannahme gemäß der Maxwellschen Theorie vor sich geht. Es ist dann also

$$\sum \delta A \neq 0 ,$$

und

$$\sum \delta Q < E_2 - E_1 .$$

Ein solcher Übergang würde also in Analogie mit den allgemeinen, eventuell auch irreversiblen Vorgängen der Wärmelehre treten, wo der I. Hauptsatz die gleiche Form wie unsere Energiegleichung

$$\sum \delta A + \sum \delta Q = E_2 - E_1$$

hat. An Stelle der Bohrschen Frequenzbedingung tritt dann die Ungleichung

$$\frac{h}{\tau} < (E_2 - E_1) .$$

Um das Verhältnis von $\delta Q / \delta A$ angeben zu können, müßte eine ins einzelne gehende Verfolgung des Vorganges möglich sein.

Indessen lassen sich doch mit Hilfe der von Sommerfeld[1]) gewonnenen Ergebnisse über die Wechselwirkung der verschiedenen Ringe aufeinander qualitative Folgerungen ziehen. Nach Sommerfeld üben auf den $n$ten Ring die weiter außerhalb liegenden Ringe keinen merklichen Einfluß aus. Die Wirkung der inneren Ringe kann man annähernd einfach dadurch in Rechnung setzen, daß man ihre gesamte Ladung zu der Kernladung addiert. Ein Elektronenaustausch zwischen dem $n$ten und $m$ten Ringe ($n < m$) wird also auf alle Ringe $i < n$, $i > m$ keine merkliche Wirkung ausüben. Die Zahl der in Mitleidenschaft gezogenen Ringe ist also gleich der Zahl des Quantensprunges ($m - n$) beim Übergang des Elektrons vom $m$ten zum $n$ten Ringe.

Sicherlich dürfen wir nun annehmen, daß der adiabatisch ausgestrahlte Anteil der Energie

$$\frac{\sum \delta A}{\sum \delta Q} = \alpha$$

um so größer ist, je mehr Ringe in Bewegung gesetzt werden. Fassen wir also z. B. die drei Übergänge ins Auge von 2 auf 1, von 3 auf 2, von 3 auf 1, so wird für die zugehörigen α gelten:

(8) $$\alpha_{21} < \alpha_{31} ; \qquad \alpha_{32} < \alpha_{31} .$$

1) A. Sommerfeld, Phys. Ztschr. 19. S. 297. 1918.

Wenden wir nun unsere Frequenzgleichung an, indem wir

$$\frac{1}{\tau} = \nu$$

setzen, so haben wir, da

$$\sum \delta Q = \frac{\sum \delta E}{1+\alpha}$$

ist,

$$\begin{aligned} E_2 - E_1 &= h\,\nu_{21}\,(1+\alpha_{21}) \\ E_3 - E_2 &= h\,\nu_{32}\,(1+\alpha_{32}) \\ E_3 - E_1 &= h\,\nu_{31}\,(1+\alpha_{31})\,. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich

$$E_3 - E_1 = h\,[\nu_{21}\,(1+\alpha_{21}) + \nu_{32}\,(1+\alpha_{32})]$$

und durch Einsetzen in die dritte Gleichung findet man die Beziehung:

$$\nu_{31} = \nu_{21}\,\frac{1+\alpha_{21}}{1+\alpha_{31}} + \nu_{32}\,\frac{1+\alpha_{32}}{1+\alpha_{31}}\,.$$

Da ihrer Definition nach die α positive Zahlen sind, so sind nach Formel (8) die beiden Brüche < 1. Es ist also jedenfalls

$$\nu_{31} < (\nu_{21} + \nu_{32})\,.$$

Diese Ungleichung, die eine Abweichung von Kombinationsprinzip darstellt, entspricht den experimentellen Tatsachen, wie von Sommerfeld[1]) als im Widerspruch mit der Bohrschen Regel hervorgehoben worden ist.

§ 6. Zusammenfassung und hydrodynamische Analogien.

Die Grundlage für die vorstehenden Überlegungen bildete die Gleichung (6) zusammen mit der Ehrenfestschen Adiabatenhypothese. Es zeigte sich dann, daß der Sommerfeldsche Quantenansatz im allgemeinen nicht mit der Adiabatenhypothese vereinbar ist und kaum die endgültige allgemeinste Form der Quantentheorie darstellt. Hierauf läßt auch der Umstand schließen, daß die Sommerfeldschen Ansätze nur bei Zugrundelegung bestimmter Koordinatensysteme ausgesprochen werden können, also eine für ein so allgemeines physikalisches Prinzip recht unwahrscheinliche Form haben.

1) A. Sommerfeld, Phys. Ztschr. 19. S. 300. 1918. Hier wird auch die Vermutung einer Irreversibilität beim Strahlungsvorgang ausgesprochen.

Wir stellten umgekehrt die Frage: Wann können die Quantenbedingungen bei Gültigkeit der Adiabatenhypothese überhaupt eine geschlossene Form haben als notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Sommerfeldschen Ansatzes? Wir fanden als Bedingung gerade die Schwarzschild-Epsteinsche Regel.

Die Anwendung der Gleichung (6) auf den Übergang eines Elektrons von einer Quantenbahn zu einer anderen des Bohrschen Atommodells führte zusammen mit der Quantenregel für einfach gebaute Atome wie Wasserstoff direkt zu der Bohrschen Frequenzbedingung. Bei komplizierteren Atomen sind dagegen vielleicht Abweichungen infolge Auftretens von adiabatischen Schwingungen möglich in einer Richtung, so daß hierdurch wohl die beobachteten Abweichungen vom Kombinationsprinzip im Gebiete der Röntgenstrahlen ihre Erklärung finden könnten.

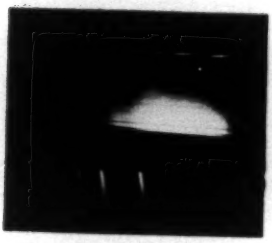
Eine Schwierigkeit für das physikalische Verständnis der Bohrschen Ausstrahlung bietet scheinbar zunächst das Mißlingen des Versuches, für die Emission der periodischen Ätherwelle eine entsprechend periodische Bewegung des Elektrons verantwortlich zu machen. Demgegenüber kann man indessen auf eine analoge Erscheinung in der Hydrodynamik hinweisen: Bewegt sich ein Körper gleichförmig durch eine Flüssigkeit, so entsteht hinter ihm eine periodische Wirbelanordnung, die bekanntlich von v. Kármán eingehend untersucht ist. F. Krüger und A. Lauth[1]) haben auf diese Weise die Entstehung der Hiebtöne erklären können. Hier haben wir eine Entstehung periodischer (akustischer) Schwingungen durch eine nichtperiodische Bewegung, also etwas Analoges wie bei der Bohrschen Emission. Der adiabatisch ausgestrahlten Welle dagegen würde als Analogon die Erregung von Schwingungen durch eine Stimmgabel entsprechen. In beiden Fällen hat die erregende Bewegung dieselbe Periode wie die ausgesandte Schwingung.

Danzig-Langfuhr, Techn. Hochschule, Physikal. Institut.

1) F. Krüger u. A. Lauth, Ann. d. Phys. 44. S. 801. 1914.

(Eingegangen 10. Juli 1919.)

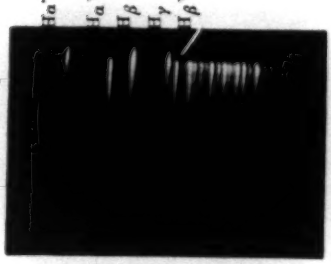
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.



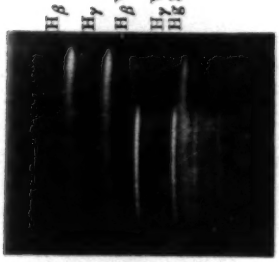
II

Ib.

Ia.

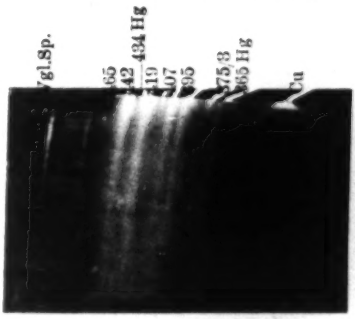


IV. Platte 132 Wasserstoff
Trog IIIa



III. Platte 101 Wasserstoff
Trog Ia

V. 2000 V Wasserstoff 4500 V.



VI. Platte 155 Sauerstoff.
Sp. 9000 V. Trog Vb

W. Wien.

Inhalt.

		Seite
1.	Hans Th. Wolf. Atomkern und α-Strahlung	685
2.	F. Krüger und E. Schmidtke. Theorie der Spalttöne. (Hierzu Tafel II.)	701
3.	E. Schmidtke. Zur Hydrodynamik der Schneidentöne. (Hierzu Tafel III.)	715
4.	J. Wallot. Der senkrechte Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Schicht räumlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante	784
Namenregister zum Jahrgang 1919		768

Die Redaktion der Annalen wird von den unterzeichneten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

1919. № 24.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 60.

1. *Atomkern und α-Strahlung;* *von Hans Th. Wolff.*

Die vorliegende Arbeit liefert eine Anschauung von der Struktur des Atomkernes und den in ihm wirksamen Kräften, welche eine Erklärung des Ursprunges der α-Strahlen radioaktiver Körper ermöglicht. Zunächst sollen die Annahmen, die den nachfolgenden Berechnungen zugrunde liegen, aufgeführt und begründet werden.

I. Begründung der Voraussetzungen.

§ 1. *Der Zusammenhalt der positiven Teilchen des Kerns.* Es liegt nahe, daß man sich den materiellen Atomkern eines radioaktiven Elementes aus den Kernen von Wasserstoff- und Heliumatomen zusammengesetzt denkt. Es fragt sich nun, wodurch der Zusammenhalt dieser sämtlich positiv geladenen Teilchen bewirkt wird. Dieser könnte durch die Annahme eingelagerter Elektronen erklärt werden, indem zugleich vorausgesetzt wird, daß die elektrischen Ladungen aufeinander nur die bekannten Kräfte ausüben.

Gegen diese letztere Voraussetzung spricht folgende Überlegung. Ein α-Strahlteilchen würde bei Ra die beobachtete Geschwindigkeit von $1{,}5 \cdot 10^9$ cm sec^{-1} bereits erlangen, wenn es von einem $5{,}4 \cdot 10^{-12}$ cm vom Atomzentrum entfernten Punkte aus sich bis ins Unendliche bewegte. Nun ist aber anzunehmen, daß es dem Kern selbst entstammt, dessen Radius nach Rutherford höchstens von der Größenordnung 10^{-12} cm ist. Hierbei würde es somit eine zu große Geschwindigkeit erreichen. Dieser Schwierigkeit kann man durch die Annahme entgehen, daß ein α-Strahlteilchen beim Verlassen des Kernes ein oder mehr Elektronen mit sich nimmt, die es später wieder abgibt. Hiergegen macht sich jedoch besonders folgendes Bedenken geltend: Wenn die α-Strahlpartikel eine so starke Kraft auf die Elektronen ausübt, daß sie imstande ist, diese von dem positiv geladenen Kern zu entfernen, so

ist es schwer einzusehen, wodurch ihr sodann die Elektronen wieder entzogen werden könnten.

Ferner ist in Betracht zu ziehen, daß der Kern nur eine bestimmte Höchstzahl von Elektronen enthalten kann, wenn seine Gesamtladung gleich $N\varepsilon$ (N = Atomnummer, ε = elektrisches Elementarquantum in elektrostatischem Maße) sein soll. Die Zahl dieser Elektronen ergibt sich aus folgender Rechnung. Der Kern enthalte $\varkappa_1$ einfach positiv geladene Wasserstoffatome und $\varkappa_2$ doppelt geladene Heliumatome, ferner $\varkappa_3$ Elektronen. Das Atomgewicht sei A. Dann ist:

$$(1) \qquad \varkappa_1 + 2\varkappa_2 - \varkappa_3 = N\,, \quad \varkappa_1 + 4\varkappa_2 = A\,.$$

Hieraus folgt:

$$\varkappa_3 = A - N - 2\varkappa_2\,.$$

$\varkappa_3$ ist um so größer, je kleiner $\varkappa_2$ ist. Für Ra muß $\varkappa_2$ mindestens gleich 5, der Zahl der α-Umwandlungen der Ra-Familie sein. Es ergibt sich nun bei Verwendung der Konstanten des Radiums $A = 226$ und $N = 88$ der Wert $\varkappa_3 = 128$. Der zugehörige Betrag $\varkappa_1 = 206$, so daß die rein negative Kernladung ungefähr die Hälfte der rein positiven Ladung beträgt. Zur Erklärung der schnellsten β-Strahlen dürfte es erforderlich sein, daß man sich außerhalb des positiven inneren Teiles des Kernes eine größere Zahl von Elektronen, etwa in Ringen angeordnet, denkt.[1]) Hierdurch verringert sich die Zahl von Elektronen, welche den Zusammenhalt der positiven Teilchen bewirken.[2])

Da man somit annehmen muß, daß die positiven Teilchen des Kerns ohne Vermittlung eingelagerter Elektronen in gegenseitiger Nähe verweilen, so soll den folgenden Betrachtungen die Voraussetzung zugrunde gelegt werden, daß in einer gewissen hinreichend kleinen Entfernung voneinander befindliche positive Ladungen keine gegenseitige Abstoßung aufeinander ausüben.

---

1) Siehe unten § 8.

2) Das Modell eines Kernes, der in seinem Innersten negative Ladungen enthält, schlägt eine Arbeit von A. W. Stewart, Phil. Mag. **36**. S. 326. 1918, vor; desgl. E. Kohlweiler, Zeitschr. f. phys. Chem. **92**. S. 685. 1918 und **93**. S. 1. 1918. Vgl. auch A. Haas, Physik. Zeitschr. **18**. S. 400. 1917.

§ 2. *Abänderung der Formel für das Potential positiv elektrischer Ladungen.* Damit die Abstoßung, welche ein positiv elektrisch geladener Punkt P_1 auf einen anderen P_2 ausübt ($P_1 P_2 = R$), bei hinreichend kleinem Werte von R verschwinden kann, werde angenommen, daß in dem Ausdruck für das Potential von P_1 neben dem $1/R$ proportionalen Gliede noch eines mit einer höheren Potenz von $1/R$ auftritt, welches einer Anziehung der Ladungen entspricht. Bei fortschreitender Verkleinerung von R würden dann schließlich die beiden Ladungen eine immer stärker zunehmende Anziehung aufeinander ausüben. Es erscheint nun geboten, ein drittes Glied mit einer noch höheren Potenz von $1/R$ einzuführen, welches bei größter Annäherung der Ladungen wiederum eine gegenseitige Abstoßung derselben bedingt, denn sonst könnte wohl der Fall eintreten, daß diese einander so nahe kommen, daß sie dauernd aneinander haften oder ineinander übergehen.

Im folgenden werden die beiden nächstliegenden Ausdrücke für das Potential eines mit einer positiv elektrischen Ladung L versehenen Punktes verwendet, das dieser im Bereiche des Atomkernes ausüben möge:

(I) $$P = L\left(\frac{1}{R} - \frac{a_2}{R^2} + \frac{a_3}{R^3}\right)$$

und

(II) $$P = L\left(\frac{1}{R} - \frac{a_3}{R^3} + \frac{a_5}{R^5}\right).$$

Diese abgeänderten Formeln mögen sich in erster Linie auf die gegenseitige Wirkung *positiver* Ladungen beziehen. Inwieweit sie auch für die auf negative Elektronen ausgeübten Kräfte in Betracht kommen, möge dahingestellt sein.[1]) Man kann die Zusatzglieder vielleicht auch als eine nichtelektrische Wirkung ansehen, welche die mit den positiven Ladungen verbundenen gravitierenden Massen aufeinander ausüben.

§ 3. *Die scheibenförmige Gestalt des Kernes.* Es liegt die Annahme sehr nahe, daß die positiv geladenen Teilchen des Kernes sich in Bewegung befinden, denn letztere kann gelegentlich eine Anordnung der Partikeln herbeiführen, welche

1) Wir werden unten (§ 8) bei einer die β-Strahlelektronen betreffenden Rechnung von den Zusatzgliedern absehen.

bewirkt, daß deren eines den Kern als α-Strahl verläßt. Die einfachste Vorstellung ist nun die, daß die einzelnen Teilchen sich in konzentrischen Kreisbahnen bewegen, welche alle in derselben Ebene liegen. Man gelangt somit zu der Hypothese, daß der Atomkern eine Scheibe bildet. Zu äußerst würde diese die in § 1 erwähnten Elektronen enthalten. Als vorläufige Annahme sei festgesetzt, daß auf jedem der Kreise eine Anzahl positiver Partikeln sich bewegt, deren Gesamtladung annähernd dem Radius des Kreises proportional ist. Der größte positive Ring jedoch möge so viel α-Teilchen enthalten, als in der betreffenden radioaktiven Zerfallsreihe von dem betrachteten Körper an gerechnet zur Aussendung gelangen. Das gegebene Bild schließt sich dem Bohrschen Atommodell an.[1])

II. Allgemeine Berechnungen.

§ 4. *Potential und Kraftwirkung einer Kreisladung bei dem Potentialgesetz* $P = -L\frac{a_2}{R^2}$. Der Kreis habe den Radius ϱ (Fig. 1) und die auf ihm gleichmäßig verteilte Ladung $s\,\varepsilon$. Im Punkt P, dessen Abstand vom Kreiszentrum $v\varrho$ $(v > 1)$ ist, hat das Potential des Kreises den Wert

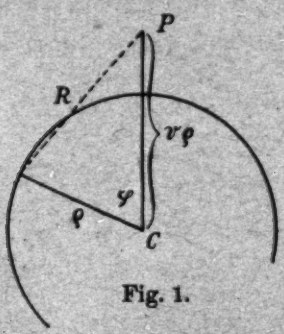


Fig. 1.

$$P_2 = -a_2 \cdot \frac{s\,\varepsilon}{2\pi\varrho} \cdot 2\int_0^{\pi} \frac{\varrho\, d\varphi}{R^2}$$

$$= \frac{-a_2 s\,\varepsilon}{\pi\varrho} \cdot \frac{1}{\varrho}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + v^2 - 2v\cos\varphi}\,.$$

Nach Ausführung der Integration ergibt sich

$$P_2 = \frac{-a_2 s\,\varepsilon}{\varrho^2(v^2-1)}\,. \tag{3}$$

Die auf eine im Punkte P befindliche Einheitsladung ausgeübte Anziehung, der ein negatives Vorzeichen zukommt, beträgt somit:

$$\mathfrak{E}_2 = -\frac{dP_2}{d(v\varrho)} = -\frac{dP_2}{dv}\cdot\frac{1}{\varrho} = \frac{-2a_2 v\, s\,\varepsilon}{\varrho^2(v^2-1)^2}\,. \tag{4}$$

1) In Arbeiten von Born und Landé (vgl. A. Landé, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 21. S. 2. 1919) wird neuerdings eine räumliche Anordnung der Elektronen des Atoms angenommen. Die Übertragung einer solchen Anschauung auf den Kern wäre vielleicht denkbar.

§ 5. *Potential und Kraftwirkung einer Kreisladung bei dem Potentialgesetz* $P = L\frac{a_3}{R^3}$. Das Potential ist jetzt durch den Ausdruck gegeben (vgl. Fig. 1):

$$P_3 = \frac{s\,\varepsilon\,a_3}{2\pi\varrho}\cdot\frac{2}{\varrho^3}\int_0^{\pi}(1+v^2-2v\cos\varphi)^{-3/2}\,d\varphi\,.$$

Bei der Auswertung des Integrales ist die Beziehung

$$\int(1-b\cos\varkappa)^{-3/2}\,d\varkappa = \frac{2b\sin\varkappa}{(1-b^2)\sqrt{1-b\cos\varkappa}} + \frac{1}{1-b^2}\int\frac{d\varkappa}{\sqrt{1-b\cos\varkappa}}$$
$$= \frac{1}{1-b^2}\left(\frac{2b\sin\varkappa}{\sqrt{1-b\cos\varkappa}} + \int\sqrt{1-b\cos\varkappa}\,d\varkappa\right)$$

zu verwenden. Setzt man

$$z = \frac{\varkappa}{2} - \frac{\pi}{2}\,,$$

so kann man schreiben:

$$\int\sqrt{1-b\cos\varkappa}\,d\varkappa = 2\sqrt{1+b}\int\sqrt{1-\frac{2b}{1+b}\sin^2 z}\,dz\,.$$

Bedeutet $E(\varkappa)$ ein vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung vom Modul $\varkappa$, so ergibt sich:

$$P_3 = \frac{2\,s\,\varepsilon\,a_3\,E\left(\frac{2\sqrt{v}}{1+v}\right)}{\pi\varrho^3(v+1)(v-1)^2}\,. \tag{5}$$

Diese Gleichung gilt auch für $v < 1$. Aus ihr folgt für die auf eine positive Einheitsladung ausgeübte Kraft die Formel

$$\mathfrak{E}_3 = \frac{a_3\left[(1+7v^2)\,E\left(\frac{2\sqrt{v}}{1+v}\right) - (v-1)^2\,K\left(\frac{2\sqrt{v}}{1+v}\right)\right]\cdot s\,\varepsilon}{\pi\varrho^4 v(v+1)^2(v-1)^2}\,, \tag{6}$$

wobei unter $K(\varkappa)$ ein vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung vom Modul $\varkappa$ zu verstehen ist.

§ 6. *Potential und Kraftwirkung einer Kreislinie bei der Potentialformel* $P = L\frac{a_5}{R^5}$. Das Potential ist jetzt durch den Ausdruck gegeben (vgl. Fig. 1):

$$P_5 = \frac{a_5\,s\,\varepsilon}{2\pi\varrho}\cdot\frac{2}{\varrho^4}\int_0^{\pi}(1+v^2-2v\cos\varphi)^{-5/2}\,d\varphi\,.$$

Bei der Auswertung des Integrales ist die Formel zu verwenden[1]):

$$\int_0^{\pi}(1-b\cos x)^{-3/2}\,dx = \frac{4}{3(1-b^2)}\int_0^{\pi}(1-b\cos x)^{-1/2}\,dx - \frac{1}{3(1-b^2)}\int_0^{\pi}(1-b\cos x)^{-3/2}\,dx.$$

Die weitere Ausrechnung ergibt:

$$\int_0^{\pi}(1-b\cos x)^{-3/2}\,dx = \frac{2}{3(1-b^2)\sqrt{1+b}}\left[\frac{4}{1-b}E\left(\sqrt{\frac{2b}{1+b}}\right) - K\left(\sqrt{\frac{2b}{1+b}}\right)\right].$$

Schließlich findet man:

$$(7)\qquad P_s = \frac{2\,s\,s\,a_s\,\bullet}{3\pi\varrho^5(1+v)^3(1-v)^3}\cdot\left[\frac{4(1+v^2)}{(1-v)^2}E\left(\frac{2\sqrt{v}}{1+v}\right) - K\left(\frac{2\sqrt{v}}{1+v}\right)\right].$$

Hieraus läßt sich für die Kraft $\mathfrak{E}_s$ die Gleichung ableiten:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{E}_s = \frac{s\,s\,a_s}{3\pi\varrho^6 v(v+1)^4(v-1)^5}\Big[&(3+82v^2+43v^4)E\left(\frac{2\sqrt{v}}{1+v}\right)\\ &-(3+13v^2)(v-1)^2\cdot K\left(\frac{2\sqrt{v}}{1+v}\right)\Big].\end{aligned}\right.$$

Die Formeln (7) und (8) gelten für $v \gtrless 1$.

§ 7. *Stabilitätsbetrachtungen.* Ein Punkt von der Masse m bewege sich auf einem Kreis vom Radius r mit der Geschwindigkeit w, indem auf ihn eine Zentralkraft K wirkt (K ist eine negative Größe, denn eine vom Zentrum weg gerichtete Kraft soll positives Zeichen haben). Es gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{m w^2}{r} + K = 0.$$

Eine verschwindend kleine Kraft veranlasse den Punkt, auf einer benachbarten, in derselben Ebene befindlichen konzentrischen Kreisbahn umzulaufen. Da die Gleichung besteht:

$$K\,dr = d\frac{m w^2}{2} = m w\,dw,$$

1) Vgl. G. Petit Bois, Tafeln unbestimmter Integrale. Leipzig 1906. S. 124.

so ist die Änderung der Zentrifugalkraft

$$d\frac{mw^2}{r} = -\frac{mw^2}{r^2}dr + \frac{2mw}{r}\cdot\frac{K}{mw}dr.$$

Unter Hinzuziehung der Gleichgewichtsbedingung findet man:

$$d\frac{mw^2}{r} = \frac{3K}{r}dr.$$

Damit der Punkt auf der neuen Bahn festgehalten werde, muß auf ihn die radiale Zusatzkraft

$$-\Delta dr = -\frac{dK}{dr}dr - \frac{3K}{r}dr$$

wirken. Im Falle stabilen Gleichgewichts ist diese von der ursprünglichen Bahn weggerichtet, hat also dasselbe Vorzeichen wie dr. Somit lautet die Stabilitätsbedingung für radiale Verschiebungen

$$\Delta = \frac{dK}{dr} + \frac{3K}{r} < 0. \tag{9}$$

Die vorstehende Rechnung dürfte diese Ungleichung mit voller Strenge nur als notwendige, nicht auch als hinreichende Bedingung für die Stabilität begründen.

a) Potentialgesetz $P = L\frac{1}{R}$. Wird P von einem Punkt hervorgerufen, so hat Δ den Wert

$$\Delta_1^{(0)} = L\frac{1}{r^3}. \tag{10}$$

Wird P von einer gleichmäßig verteilten Kreisladung von der Größe 1 erzeugt, so erhält man unter Verwendung der für die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ gültigen Beziehung (Kreisbahn und Kreisladung konzentrisch und in derselben Ebene):

$$\mathfrak{E} = \frac{2}{\pi r^2}\cdot\frac{E(v')}{1-v'^2}\ ^1) \quad \text{(Radius der Kreisladung} = \varrho = rv' < r) \tag{11}$$

für Δ den Ausdruck

$$\Delta_1 = \frac{2[K(v')\cdot(1-v'^2) - 2v'^2E(v')]}{\pi r^3(1-v'^2)^2} \qquad (v' < 1). \tag{12}$$

b) Potentialgesetz $P = -L\frac{a_2}{R^2}$. Für die Wirkung eines Punktes gilt jetzt:

$$\Delta_2^{(0)} = 0. \tag{13a}$$

1) Vgl. H. Th. Wolff, Ann. d. Phys. 52. S. 631. 1917, Formel (3b) auf S. 633. Diese Arbeit wird im folgenden mit a. a. O. bezeichnet.

Im Falle des mit der Ladung 1 belegten Kreises ist auf Grund von (4)

$$\Delta_2 = \frac{8 a_2 v'^2}{r^4 (1 - v'^2)^3} \qquad (v' < 1). \tag{13}$$

c) Potentialgesetz $P = L \frac{a_3}{R^3}$. Es ergibt sich aus (6):

$$\Delta_3^{(0)} = -\frac{3 a_3}{r^5}, \tag{14a}$$

$$\begin{cases} \Delta_3 = \frac{-2 a_3}{\pi r^5 (1+v')^3 (1-v')^4} \cdot \left[(5 + 18 v'^2 + v'^4) E\left(\frac{2\sqrt{v'}}{1+v'}\right) \right. \\ \left. + (-2 + 4v' - 3v'^2 + 2v'^3 - v'^4) K\left(\frac{2\sqrt{v'}}{1+v'}\right) \right] \quad (v' < 1). \end{cases} \tag{14}$$

d) Potentialgesetz $P = L \frac{a_5}{R^5}$. Man findet [nach (8)]:

$$\Delta_5^{(0)} = -\frac{15 a_5}{r^7}, \tag{15a}$$

$$\begin{cases} \Delta_5 = \frac{2 a_5}{3\pi r^7 (1+v')^5 (1-v')^6} \\ \cdot \left[(-3v'^6 - 194 v'^4 - 371 v'^2 - 72) E\left(\frac{2\sqrt{v'}}{1+v'}\right) \right. \\ \left. + (3v'^6 - 6v'^5 + 53 v'^4 - 100 v'^3 + 77 v'^2 - 54 v' + 27) K\left(\frac{2\sqrt{v'}}{1+v'}\right) \right] \\ (v' < 1). \end{cases} \tag{15}$$

III. Die Elektronen des Kernes und die β-Strahlen.

§ 8. Nach der erwähnten früheren Arbeit des Verfassers ist zur Erklärung des Entstehens der schnellsten β-Strahlen anzunehmen, daß der Atomkern eine Anzahl Elektronen enthält. Jene Betrachtungen beziehen sich auf Ra B. Die vorgenommenen Rechnungen sind bei Annahme einer scheibenförmigen Gestalt des Kernes abzuändern, denn es wurde vorausgesetzt, daß man diesen als punktförmig betrachten darf. Es kommt hier darauf an, daß man die Anzahl der Elektronen ungefähr abschätzen kann. Wir nehmen an, daß die in der vorliegenden Abhandlung neu eingeführten Glieder der Potentialformel bei Bestimmung der auf die *Elektronen* ausgeübten Kräfte nicht in Rechnung zu ziehen sind. Nimmt man die nachfolgende Auswertung der Elektronenzahl unter der Voraus-

setzung vor, daß die Konstanten a_2 usw. Werte haben, wie sie uns die Betrachtung der α-Strahlen liefern wird, so gelangt man zu einem unmöglichen Resultat. Wir machen die einfache provisorische Annahme, daß bei Ra B s Elektronen sich auf einem Kreis vom Radius $r_1 \frac{1}{\varrho}$, der mit den positiven Ringen konzentrisch ist und in einer Ebene liegt, in gleichmäßiger Verteilung befinden und fast mit Lichtgeschwindigkeit umlaufen. Ein einzelnes Elektron bewege sich auf einem entsprechend gelegenen etwas kleineren Kreise vom Radius r_1 mit einer der Lichtgeschwindigkeit c sehr nahe kommenden Geschwindigkeit βc. Auf dieses wirke das von den positiven Ladungen ausgeübte Feld $\mathfrak{E}_0$. Indem man diese Bezeichnung auf der linken Seite von Gleichung (10) (a. a. O. S. 689) an Stelle des von der Punktladung hervorgerufenen Feldes einsetzt und berücksichtigt, daß statt r_1 daselbst $v\varrho$ geschrieben ist, so erhält man für das Elektron von der Ruhmasse m die Gleichgewichtsbedingung:

$$\varepsilon \mathfrak{E}_0 = \frac{m c^2}{r_1 \sqrt{1-\beta^2}} + \frac{2 s \varepsilon^2 v}{\pi r_1^2} \left[K(v) - \frac{E(v)}{1+v} \right]. \tag{16}$$

Der Wert, den das Potential der positiven Ladungen auf der Bahn des Elektrons besitzt, werde mit P_0 bezeichnet. Das Elektron möge die Geschwindigkeit $c\beta_1$ erlangen, wenn es das Atom als β-Strahl verläßt. Dann tritt jetzt an Stelle der a. a. O. S. 689 unten angeführten Gleichung die Beziehung:

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \varepsilon P_0 + \frac{2 s \varepsilon^2 v K(v)}{\pi r_1}. \tag{17}$$

Für β_1 wählen wir den beobachteten Höchstwert 0,998.[1]) $\mathfrak{E}_0$ ist mit Hilfe von Gleichung (11) zu bestimmen, und nach der a. a. O. S. 693 als Formel (2a) angeführten Beziehung ist

$$P_0 = \frac{2 \cdot v'}{\pi \varrho} K(v') \qquad (v' < 1). \tag{18}$$

Die wirksame Ladung ist hier gleich 1 gesetzt. Führt man die für $\mathfrak{E}_0$ bzw. P_0 gefundenen Ausdrücke in (16) bzw. (17) ein

1) J. Danysz, Ann. chim. phys. **30**. S. 241. 1913.

und nimmt für r_1 den Wert $\frac{5}{4}r$ (r = Radius der positiven Scheibe), so ergibt sich:

$$(19) \qquad s_{5/4} = \frac{r \cdot 110 \cdot 10^{13} - 36{,}1}{0{,}383 + \frac{v\,E(v)}{1+v}} \cdot ^{1})$$

In Tab. 1 sind für einige Beträge von r und v die zugehörigen Werte von s, abgerundet auf ganze Zahlen, aufgeführt.

Tabelle 1.

$r \cdot 10^{13} =$	4	5	6	8
	$s =$			
$v = 0{,}5$	9	22	34	60
$v = 0{,}7$	9	20	32	55
$v = 0{,}9$	9	20	32	56

Nimmt man an, daß das β-Strahlelektron auf einer Bahn vom Radius $r\,10/6$ umläuft, so findet man für s die Formel (nur 6 positive Ringe im Kern angenommen):

$$(20) \qquad s_{10/6} = \frac{r \cdot 147 \cdot 10^{13} - 13}{0{,}15 + \frac{v\,E(v)}{1+v}} .$$

Zu $r = 6 \cdot 10^{-13}$ und $v = 0{,}8$ gehört jetzt $s = 104$.

IV. Anwendung der Potentialformel $P = L\left(\frac{1}{R} - \frac{a_2}{R^2} + \frac{a_3}{R^3}\right)$.

§ 9. *Das Potential.* Allen folgenden Berechnungen soll als strahlender Körper Ra zugrunde gelegt werden. Seine gesamte Kernladung nehmen wir zu $88\,\varepsilon$ an. Gemäß der in § 8 angegebenen Vorstellung werde vorausgesetzt, daß der äußerste positive Ring vom Radius r aus $5\,\alpha$-Strahlteilchen besteht. Zunächst betrachten wir den Fall, daß der Kern 10 positive Ringe enthält, deren $n$ter den Radius $r\frac{n}{10}$ hat. Im Zentrum möge sich die Ladung $2\,\varepsilon$ befinden. Um einen

1) Um anderweit benutzte Zahlenwerte verwenden zu können, wurden bei der Berechnung von $\mathfrak{E}$ und P im Kern nur acht positive Ringe angenommen.

Überblick über den Einfluß der einzelnen Ringe zu gewähren, gibt Tab. 2 die Potentiale an, welche die einzelnen Kreisladungen in einem Punkte des 10. Ringes ausüben, unter der Voraussetzung, daß die Ladung des $n$ten Kreises gleich $n\,\varepsilon$ ist. P_1 ist nach Gleichung (18), P_2 nach (8) und P_3 nach (5) berechnet. Bei der Bestimmung des von den Elektronen

Tabelle 2.

n	$\frac{r}{s} P_1$	$\frac{-r^2}{s a_2} P_2$	$\frac{r^3}{s a_3} P_3$
9	13,1	47,4	303
8	10,2	22,2	72
7	8,2	13,7	30
6	6,7	9,4	16
5	5,4	6,7	9
4	4,2	4,8	6
3	3,1	3,3	4
2	2,0	2,1	2
1	1,0	1,0	1

des Kerns erzeugten Potentiales (vgl. § 8), soll die vereinfachte Annahme gelten, daß diese *sämtlich* sich auf derselben Kreisbahn bewegen. Deren Radius werde mit $r\frac{1}{V}$ bezeichnet. Da Ra β-Strahlen aussendet[1]), nehmen wir jetzt 1 Elektron mehr als bei Ra B an, also $s+2$ Elektronen. Das Potential der Elektronen ist durch Formel (1), a. a. O. S. 632, ausgedrückt, wobei daselbst an Stelle von v tritt V, $\varrho = r\frac{1}{V}$ zu setzen und statt s einzuführen ist $-(s+2)$. Unter der Voraussetzung, daß die positiven Ladungen der einzelnen Kreise, abgesehen vom letzten, deren Radien nahezu proportional sind, findet man als Potential in einem Punkte des 10. Ringes:

$$(21)\quad \begin{cases} P = \frac{s}{r}\left\{1{,}19\,(78+s) + 7{,}51 - \frac{2(s+2)\,V\,K(V)}{\pi}\right. \\ \qquad \left. - \frac{a_2}{r}[2{,}46\,(78+s)+6{,}00] + \frac{a_3}{r^2}[9{,}6\,(78+s)+5{,}04]\right\}. \end{cases}$$

Bei der Berechnung des von den 4 anderen α-Strahlteilchen ausgeübten Potentiales wurde von deren Bewegung abgesehen.

1) Sollte Ra kein Elektron aus dem Kern entsenden, so wäre dies für die folgenden Betrachtungen nicht von wesentlicher Bedeutung.

§ 10. *Die Feldstärke.* Tab. 8 läßt die Beiträge erkennen, welche die einzelnen positiven Ringe zur Feldstärke liefern in einem Punkte des 10. Ringes. Bei der Ausrechnung wurde vorausgesetzt, daß der $n$te Ring die Ladung $n\,\varepsilon$ trägt. $\mathfrak{E}_1$ ist nach Gleichung (11), $\mathfrak{E}_2$ nach (4) und $\mathfrak{E}_3$ nach (6) berechnet.

Tabelle 8.

n	$\frac{r^2}{\varepsilon}\mathfrak{E}_1$	$\frac{-r^3}{a_2\,\varepsilon}\mathfrak{E}_2$	$\frac{r^4\cdot 10^{-1}}{\varepsilon\,a_2}\mathfrak{E}_3$
9	35,3	499	619
8	18,0	123	75
7	11,8	54	21
6	8,5	29	9
5	6,2	18	4
4	4,6	11	2
3	3,2	7	1
2	2,1	4	0
1	1,0	2	0

Das von den Elektronen herrührende Feld ergibt sich aus Formel (8a), a. a. O. S. 633. Das von den positiven und negativen Ladungen des Kernes in einem Punkte des 10. Ringes hervorgerufene Feld ist:

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \frac{\varepsilon}{r^2}\left\{4{,}75 + 1{,}98\,(78+s) + \frac{2(s+2)V}{\pi}\left[\frac{E(V)}{1-V^2} - K(V)\right]\right. \\ \left. \quad - \frac{a_2}{r}\left[8{,}00 + 16{,}6\,(78+s)\right] + \frac{a_3}{r^2}\left[157\,(78+s)+6\right]\right\}. \end{cases}$$

§ 11. *Der Bewegungszustand der α-Strahlteilchen im Kern.* Wir werden im allgemeinen annehmen, daß eine α-Strahlpartikel im Kern dieselbe Geschwindigkeit besitzt, wie nach ihrer Aussendung, daß also das Potential $P = 0$ ist. Diese Hypothese liegt im Hinblick auf eine Arbeit von F. A. Lindemann[1]) nahe. Letztere gründet sich auf die bekannte einfache Beziehung, welche zwischen der Zerfallskonstante und der Reichweite, also auch der Geschwindigkeit der α-Strahlen besteht (Geiger-Nuttallsche Gleichung $\log\lambda = A + B\log R$, ferner $v_a = h\sqrt[3]{R}$). Der theoretische Zusammenhang zwischen

1) F. A. Lindemann, Phil. Mag. **30**. S. 560. 1915. Dieselbe Annahme findet sich bei H. Rausch von Traubenberg, Physik. Zeitschr. **16**. S. 264. 1915.

der Zerfallskonstante und der Geschwindigkeit im Kern einerseits und die empirische Beziehung zwischen dieser Konstante und der α-Strahlgeschwindigkeit außerhalb des Atoms ist am leichtesten einzusehen, wenn beide Geschwindigkeiten einander gleich sind. Deren Zahlenwert beträgt bei Ra $1{,}5 \cdot 10^9$ cm sec^{-1}.

Besitzt ein auf dem Ring vom Radius r mit der Geschwindigkeit w umlaufendes α-Strahlteilchen die Masse μ und wirkt auf dasselbe insgesamt das Feld $\mathfrak{E}$, so lautet bei Vernachlässigung magnetischer Kräfte seine Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{\mu w^2}{r} + 2\varepsilon\mathfrak{E} = 0. \tag{23}$$

1. Spezialfall. Es sei $r = 6 \cdot 10^{-13}$ cm. Die Kernelektronen mögen sich auf einem Kreis vom Radius $\frac{1}{V} r = \frac{r}{0{,}72}$ befinden. Ihre Anzahl ist dann nach Tab. 1 gleich $s + 2 = 34$. Die Bedingung $P = 0$ nimmt die Form an:

$$P\frac{r}{e} = 109 - \frac{a_2}{r} 276 + \frac{a_3}{r^2} 1{,}06 \cdot 10^3 = 0,$$

während die Gleichgewichtsbedingung eines α-Strahlteilchens lautet:

$$514 - \frac{a_2}{r} 3{,}67 \cdot 10^3 + \frac{a_3}{r^2} 34{,}6 \cdot 10^3 = 0.$$

Aus beiden Gleichungen folgt $a_2/r = 0{,}57$ und $a_3/r^2 = 0{,}046$. Eine punktförmige Einheitsladung übt sonach auf eine andere von ihr im Abstand $R = k\,r$ befindliche die Kraft aus:

$$\frac{1}{R^2} - \frac{2a_2}{R^3} + \frac{3a_3}{R^4} = \frac{1}{R^2}\left(1 - \frac{2}{k}\cdot\frac{a_2}{r} + \frac{3}{k^2}\cdot\frac{a_3}{r^2}\right)$$
$$= \frac{1}{R^2}\left(1 - \frac{1}{k}\,1{,}14 + \frac{1}{k^2}\,0{,}138\right).$$

Man sieht, daß bereits in einer Entfernung, welche 10^{-12} cm, wenig überschreitet, das erste Glied dieses Ausdruckes anfängt an Größe wesentlich zu überwiegen. Dies gilt erst recht für das Potential. Durch die vorliegende abgeänderte Potentialformel würden z. B. Berechnungen über die Zerstreuung von α- und β-Strahlen durch Materie wenig beeinflußt. Die Bedingung für die Stabilität in radialer Richtung lautet:

$$\Delta\frac{\pi r^3}{2} = -8{,}2 \cdot 10^3 + \frac{a_2}{r} 3{,}72 \cdot 10^4 - \frac{a_3}{r^2} \cdot 67 \cdot 10^4$$
$$= (-0{,}1 + 2{,}1 - 3{,}0) \cdot 10^4 < 0.$$

Sie ist also erfüllt. Die Elektronen liefern nur einen geringen Beitrag zu Δ.

Anmerkung. Die Frage nach der Stabilität in axialer Richtung dürfte schwieriger zu erledigen sein als wie die radiale. Eine Überschlagsrechnung läßt vermuten, daß jene im vorliegenden Fall nicht besteht. Vielleicht wird die axiale Stabilität durch ein Quantengesetz geregelt. Im folgenden Spezialfall dürfte sie vorhanden sein.

Läßt man die Voraussetzung fallen, daß das Potential $P = 0$ ist, so ist die Geschwindigkeit w, welche das α-Strahlteilchen im Kern besitzt, von der Endgeschwindigkeit w_∞, die es bei seiner Ausstrahlung erlangt, verschieden. Da die Partikel die Ladung 2ε trägt, so ist

$$\frac{\mu w_\infty^2}{2} = \frac{\mu w^2}{2} + 2\varepsilon P. \tag{24}$$

Diese Gleichung ergibt mit (23) zusammen:

$$\frac{\mu w_\infty^2 r}{2\varepsilon^2} = 2\frac{r}{\varepsilon} P - \frac{r^2}{\varepsilon} \mathfrak{E}. \tag{25}$$

2. Spezialfall. Der Kern enthalte 5 positiv geladene Ringe. Deren äußerster bestehe wiederum aus 5 α-Strahlteilchen, während im übrigen entsprechende Verteilung der Ladungen angenommen wird wie oben. Es sei $r = 6 \cdot 10^{-13}$ cm, $V = 0{,}72$ und $\varepsilon = 32$. Wir lassen die Bedingung $P = 0$ fallen und haben somit Formel (25) anzuwenden. Aus ihr folgt:

$$\frac{a_3}{r^3} = -\,0{,}0029 + 0{,}132\,\frac{a_3}{r}.$$

Setzt man $a_3/r = 1$, so ergibt sich $a_3/r^3 = 0{,}18$. Die Bedingungsgleichung für die radiale Stabilität ist erfüllt, und für w findet man den Wert $3{,}7 \cdot 10^9$ cm sec^{-1}.

V. Anwendung der Potentialformel $P = L\left(\frac{1}{R} - \frac{a_3}{R^3} + \frac{a_5}{R^5}\right)$.

§ 12. Wir nehmen wiederum 10 positive Ringe an. Es mögen dieselben Voraussetzungen über die Verteilung der Ladungen im Kern gelten wie oben. Tab. 4 zeigt die Beiträge, welche der 6. bis 9. Ring zum Potential P_5 und zur Feldstärke $\mathfrak{E}_5$ in einem Punkte des 10. Ringes liefern [vgl. die Formeln (7) und (8)]. In ihr ist der Fall wiedergegeben, daß der $n$te Ring die Ladung $n\varepsilon$ trägt.

Enthalten die einzelnen Ringe Ladungen, welche den in § 9 eingeführten Bedingungen entsprechen, so rufen die inner-

halb des 10. Ringes befindlichen Ladungen zusammen auf Grund des 8. Gliedes obiger Potentialformel in einem Punkte desselben das Potential $\frac{a_3 s}{r^3}$ 464 (78 + s) und die Feldstärke $\frac{a_3 s}{r^3}$ 181 · 10^2 (78 + s) hervor.

Tabelle 4.

n	$\frac{r^5}{s a_5} P_5 \cdot 10^{-3}$	$\frac{r^6}{s a_5} \mathfrak{E}_5 \cdot 10^{-3}$
9	201	815
8	12	24
7	2	3
6	1	1

1. Spezialfall. Es sei $r = 6 \cdot 10^{-13}$ cm, $V = 0{,}72$, $s = 32$. Führt man die Bedingung $P = 0$ ein, so findet man

$$\frac{a_3}{r^3} = 0{,}17, \quad \frac{a_5}{r^4} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Die Bedingung für die radiale Stabilität lautet:

$$\Delta \frac{\pi r^3}{2} = -8{,}2 \cdot 10^2 + \frac{a_3}{r^3} 6{,}7 \cdot 10^5 - \frac{a_5}{r^4} \cdot 1{,}92 \cdot 10^8$$
$$= (-0{,}01 + 1{,}1 - 2{,}5) \cdot 10^5 < 0.$$

Die Kraft, welche eine punktförmige Einheitsladung auf eine andere von ihr im Abstand kr befindliche ausübt, ist jetzt durch den Ausdruck gegeben:

$$\frac{1}{k^2 r^2}\left(1 - \frac{3}{k^2} \cdot \frac{a_3}{r^3} + \frac{5}{k^4} \frac{a_5}{r^4}\right) = \frac{1}{k^2 r^2}\left(1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{6{,}5 \cdot 10^{-3}}{k^4}\right).$$

Man sieht, daß bereits in sehr geringer Entfernung von der wirksamen Ladung das erste Glied die anderen wesentlich überwiegt.

2. Spezialfall. Für $r = 8 \cdot 10^{-13}$, $V = 0{,}64$ und $s = 55$ erhält man unter der Voraussetzung $P = 0$ die Werte

$$\frac{a_3}{r^3} = 0{,}16 \quad \text{und} \quad \frac{a_5}{r^4} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}.$$

Daß jetzt die Bedingung für radiale Stabilität erfüllt ist, kann man auf Grund des vorhergehenden Spezialfalles und der allgemeinen Formeln ohne neue Rechnung einsehen.

Zusammenfassung.

I. Es werden die folgenden Anschauungen über die Beschaffenheit des Atomkernes und die in ihm wirkenden Kräfte begründet: Der Kern hat eine scheibenförmige Gestalt, indem er aus konzentrischen Ringen zusammengesetzt ist. Abgesehen von dem äußersten bestehen sie aus einfach positiv geladenen H- und doppelt geladenen He-Atomen, welche den Atommittelpunkt umkreisen. Außerhalb von ihnen rotieren Elektronen (§§ 1 und 3). Der Zusammenhalt dieser positiven Ladungen wird durch die Annahme erklärt, daß sie nach einer gewissen gegenseitigen Annäherung einander anziehen. Man muß sich aber vorstellen, daß bei sehr geringem Abstand wiederum Abstoßung eintritt. Demgemäß wird vorausgesetzt, daß eine der beiden Potentialformeln

$$\text{(I)}\quad P=L\left(\frac{1}{R}-\frac{a_2}{R^2}+\frac{a_3}{R^3}\right),\qquad \text{(II)}\quad P=L\left(\frac{1}{R}-\frac{a_2}{R^2}+\frac{a_5}{R^5}\right)$$

im Atomkern für die gegenseitige Einwirkung positiver Ladungen gültig ist (§§ 1 und 2).

II. Es werden Ausdrücke für das Potential und das Kraftfeld abgeleitet, welche eine Kreisladung in einem außerhalb von ihr in derselben Ebene gelegenen Punkte erzeugt auf Grund der neu eingeführten Glieder der Potentialformel (§§ 4—6). Für den Fall, daß eine Kreisladung nach einer der beiden Formeln einen Punkt anzieht, welcher auf einem konzentrischen, in gleicher Ebene gelegenen größeren Kreise umläuft, wird eine Stabilitätsbedingung für die Bewegung dieses Punktes aufgestellt (§ 7).

III. Damit man die Anzahl der erwähnten Elektronen abschätzen kann, werden für jene Formeln abgeleitet, indem die Entstehung der schnellsten β-Strahlen in Betracht gezogen wird. Es handelt sich hierbei um eine Modifikation einer Berechnung, die in einer früheren Arbeit des Verfassers angestellt wurde (§ 8).

IV. Die Potentialformel I wird auf ein Modell des Atomkernes von Ra angewandt. Für zwei spezielle Fälle werden die Konstanten der Formel so bestimmt, daß α-Strahlen von der beobachteten Geschwindigkeit ausgesandt werden können (§§ 9—11).

V. Entsprechend wird Formel II angewandt. Es werden wiederum zwei Sonderfälle behandelt (§ 12).

Dresden, im Juni 1919.

(Eingegangen 18. Juni 1919.)

2. *Theorie der Spalttöne;* *von F. Krüger und E. Schmidtke.*

(Hierzu Tafel II.)

Nachdem schon A. Masson[1]) und C. Sondhaus[2]) das Auftreten von Tönen beim freien Ausströmen von Luft aus engen kreisförmigen Öffnungen in dicken Platten beobachtet hatten, wurden die Töne, welche beim Durchströmen von

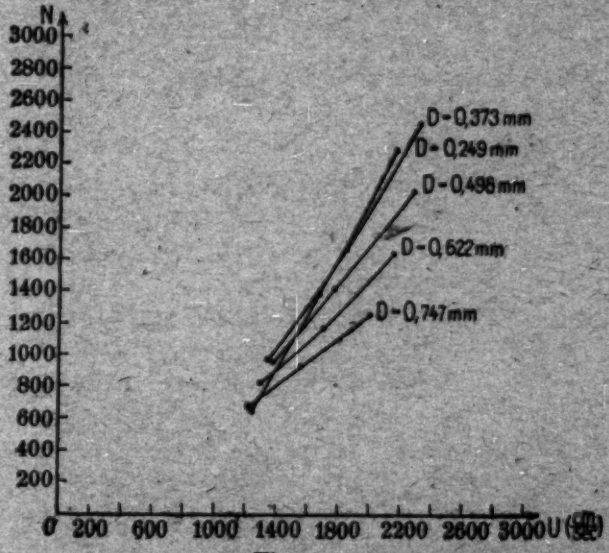


Fig. 1.

Gasen durch Spalten entstehen, zuerst von W. Kohlrausch[3]) eingehend untersucht. Die Abhängigkeit der Tonhöhe dieser Töne von verschiedenen Faktoren zeigt eine weitgehende Analogie mit der der sogenannten Hiebtöne, die Strouhal[4]) untersuchte. Vor allem ergab sich die Tonhöhe N als eine

1) A. Masson, Compt. Rend. **36**. S. 257 u. 1004. 1853.
2) C. Sondhaus, Wied. Ann. **91**. S. 214. 1854.
3) W. Kohlrausch, Pogg. Ann. d. Phys. u. Chem. **18**. S. 545. 1881.
4) V. Strouhal, Wied. Ann. **5**. S. 216. 1878.

lineare Funktion der Ausströmungsgeschwindigkeit U in der Form $N = k\,(U - U_0)$. Die vorstehende Fig. 1, die nach den Zahlen von Kohlrausch für eine Spaltbreite von 5 mm gezeichnet und in der als Abszisse die Geschwindigkeit U, als Ordinate die Tonhöhe N aufgetragen ist, gibt diesen Zusammenhang für ausströmende Luft deutlich wieder. Die Kurven sind Gerade, die um so steiler verlaufen, je geringer die Spaltbreite D ist; in ihrer hypothetischen Verlängerung würden sie die Abszissenachse in Abständen U_0 vom Koordinatenanfangspunkte schneiden, die mit wachsender Spalt-

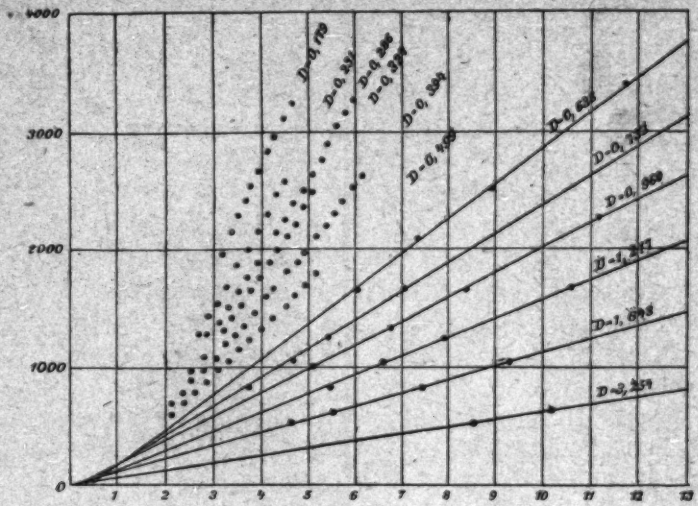


Fig. 2.

breite kleiner und kleiner werden. Die große Ähnlichkeit dieser Figur mit der entsprechenden Strouhals für die Hiebtöne, die hier in der obenstehenden Fig. 2 wiedergegeben ist, springt in die Augen; nur tritt ein Überschneiden der Kurven, wie es für die Spalttöne wenigstens für die Kurven der engsten Spaltbreiten angegeben ist, bei den Hiebtönen nicht ein. Kohlrausch hat auch noch die Abhängigkeit der Spalttöne von der Spaltdicke s, d. h. der Spalttiefe (zwischen 9,5 und 1 mm) bei gleicher Spaltbreite ($D = 5$ mm) untersucht und gefunden, daß die Änderung der Spaltdicke von fast verschwindendem Einfluß auf die Konstanten U_0 und k ist; jedoch geben die gemessenen Punkte der Kurven für geringe Spaltdicken kein Überschneiden der Kurven.

Der Vergleich der Kurven für die Spalttöne und für die Hiebtöne lehrt aber weiterhin Folgendes. Hätte Kohlrausch größere Spaltbreiten benutzt, so würde er U-N-Kurven erhalten haben, die nicht nur nahezu, wie die für die größten von ihm benutzten Spaltbreiten, sondern exakt durch den Koordinatenanfangspunkt gegangen wären. Für diese würde dann also U_0 gleich Null und somit die Tonhöhe der Strömungsgeschwindigkeit direkt proportional sein, ganz ebenso wie bei den Tonhöhen der Hiebtöne. Dieser Grenzfall der einfachsten Gesetzmäßigkeit ist von Kohlrausch für die größte von ihm benutzte Spaltbreite zwar sehr angenähert, aber noch nicht ganz erreicht, während Strouhal ihn für eine ganze Anzahl größerer Stabdicken realisiert hat. Kohlrausch bewegt sich vielmehr mit der Mehrzahl seiner Messungen schon in dem Gebiete, in welchem infolge zu geringer Spaltbreite ganz die analogen Abweichungen auftreten, wie sie Strouhal bei zu geringen Stabdicken beobachtete. Da für alle diese Kurven für $U = 0$ auch $N = 0$ sein muß, gehen sie für geringe Stabdicken bzw. Spaltbreiten als gekrümmte Kurven vom Koordinatennullpunkt aus, haben aber in ihrem oberen Teil Gerade als Asymptoten, die in ihrer Verlängerung die U-Achse in den Abständen U_0 schneiden würden. Diese Krümmung der Kurven hat sowohl Kohlrausch für geringe Spaltbreiten wie Strouhal für geringe Stabdicken gefunden. Es ist deshalb richtiger, die Kurven mit Strouhal durch die Formel:

$$N = \frac{k}{D}[U - f(U)]$$

wiederzugeben, in der $f(U)$ mit steigender Geschwindigkeit einem endlichen positiven Grenzwert sich nähert, der außerdem für hinreichend große Stabdicken bzw. Spaltbreiten gleich Null wird.

Auch W. Kohlrausch bemerkt, „daß mit zunehmender Spaltbreite die Neigung der Geraden gegen die U-Achse abnimmt und ihr Schnittpunkt mit dieser Achse sich dem Nullpunkt des Systems nähert". Er hat auch die weitgehende Analogie zwischen den Spalttönen und den Hiebtönen deutlich erkannt und betont, es könne kaum ein Zweifel sein, daß die Entstehung der Spalttöne wie der Drahttöne (Hiebtöne) auf ähnliche Ursachen zurückzuführen ist.

Nachdem nun, wie in der Arbeit von A. Lauth und mir[1]) und einer späteren von mir[2]) gezeigt wurde, die Theorie der Hiebtöne sich quantitativ auf die Wirbelablösung unter Zugrundelegung der Theorie von v. Kármán[3]) zurückführen ließ, lag es nahe, die Theorie der Wirbelablösung auch zur Erklärung der Spalttöne heranzuziehen.

Hierfür war also in erster Linie das Auftreten stabiler Wirbelsysteme beim Ausströmen von Flüssigkeiten aus engen Spalten nachzuweisen. Es wurde dazu der in der früheren Arbeit von mir[4]) beschriebene Rundlauf benutzt. In den Glastrog desselben wurden als Spalt zwei unter einem Winkel von etwa 70° geneigte Zinkbleche eingesetzt, die seitlich an den Glaswänden abgedichtet waren, so daß die ganze Strömung durch

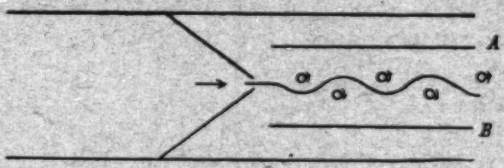


Fig. 3.

den Spalt gehen mußte. Die Spaltbreite konnte leicht verstellt werden. Die obenstehende Fig. 3 zeigt die schematische Anordnung von oben betrachtet; *A* und *B* bedeuten Glaswände (*B* trägt noch eine Zentimeterskala), welche eingesetzt wurden, um die störende Rückströmung zu verringern und einen geraden Verlauf des Wirbelsystems zu gewährleisten.

Zur Sichtbarmachung der Wirbel sollte anfangs durch Ausglühen von seiner Fettschicht befreites Aluminiumpulver benutzt werden, das im Wasser schwimmt und sich ziemlich lange schwebend erhält. Bei hinreichender Konzentration des Pulvers sieht man sowohl an der Oberfläche, wie im Inneren der Flüssigkeit die Wirbel mit bloßem Auge außerordentlich schön, so z. B. wenn man mit dem Pulver versetztes Wasser in einem Becherglase umrührt. Für die photographische Aufnahme erwies sich dies Verfahren jedoch weniger geeignet,

1) F. Krüger und A. Lauth, Ann. d. Phys. **44**. S. 801. 1914.
2) F. Krüger, Ann. d. Phys. **60**. S. 279. 1919.
3) Th. v. Kármán, Göttinger Nachr. 1912, S. 547; Th. v. Kármán und H. Rubach, Phys. Zeitschr. **13**. S. 49. 1912.
4) F. Krüger, Ann. d. Phys. **60**. S. 279. 1919.

da die Wirbelfäden sich beim Fortschreiten nicht genau zylindrisch erhalten, so daß leicht verschwommene Bilder entstehen. Der Vorteil, daß man sich durch die Beobachtung der Vorgänge im Inneren des Wassers von den leicht vorhandenen Störungen an der Oberfläche befreit, geht dadurch wieder verloren. Es wurde daher für die Aufnahme in üblicher Weise auf die Oberfläche gestreutes Lykopodiumpulver benutzt.

Es wurde zuerst versucht, als Beleuchtung für die Aufnahme starke elektrische Funken zu verwenden. Bei den so belichteten Aufnahmen sah man nun wohl die einzelnen Lykopodiumkonglomerate scharf abgebildet, aber die Stromlinien waren nicht zu erkennen. Damit sie im Bilde hervortreten, müssen sich eben die Lykopodiumteile ein wenig während der Aufnahme verschieben, so daß sie im Bilde Linien ergeben. Es wurden daher geringe Mengen Blitzlichtpulver, und zwar je etwa 0,01 g entzündet und damit Aufnahmen erhalten, welche die Strömungslinien gut erkennen lassen. Das Objektiv des photographischen Apparates war ein sehr lichtstarkes, von der Firma Busch, sein Öffnungsverhältnis betrug 2,06, seine Brennweite 10,7 cm. Für die Aufnahmen wurden die sehr empfindlichen Agfa-Isorapidplatten benutzt.

Zwei der so erhaltenen Aufnahmen sind in den Figg. 4 und 5 (Tafel II) wiedergegeben. Sie zeigen sehr deutlich das Auftreten von Wirbelsystemen, deren einzelne Wirbel gegeneinander versetzt sind, genau so wie die von v. Kármán und Rubach photographierten und theoretisch als stabil erwiesenen Wirbelsysteme hinter Hindernissen. Die Wirbel bilden sich am Spalt natürlich so, daß die nach der Prandtlschen Theorie abgeschobene Grenzschicht sich nach außen aufrollt, während sie sich hinter einem Hindernis, etwa einem runden Stabe, nach innen aufrollt. Die Richtung des Drehungssinnes relativ zu der bewegten Flüssigkeit ist jedoch dieselbe. Die völlige Analogie läßt die umstehende Fig. 6 erkennen, in der oben die Wirbelablösung hinter einem bewegten Stabe, unten die beim Ausströmen der Flüssigkeit aus einem Spalt skizziert ist; man könnte das Verhältnis beider Vorgänge schildern, indem man sagt, daß im ersteren Falle das Flüssigkeitsband gezogen, im letzteren Falle geschoben wird.

Die von v. Kármán abgeleitete Stabilitätsbedingung,

daß das Verhältnis des Abstandes l zweier Wirbel zu dem Abstande h der beiden Wirbelreihen den konstanten Wert 0,283 haben muß, findet sich auch hier erfüllt. Die Ausmessung verschiedener Aufnahmen ergab z. B. die Werte 0,30, 0,27, 0,28, 0,29, also im Mittel etwa 0,285.

Für die Frequenz der Wirbelablösung N, die akustisch mit der Tonhöhe identisch ist, gilt nun $N = u/l$, wenn mit u die Fortbewegungsgeschwindigkeit der Wirbel in bezug auf den Spalt bezeichnet wird.

Ebenso wie bei der Wirbelablösung hinter Hindernissen muß nun nach v. Kármán das Verhältnis der Wirbelge-

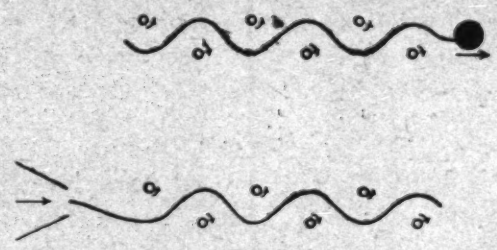


Fig. 6.

schwindigkeit u zu der Strömungsgeschwindigkeit U der Flüssigkeitslamelle konstant sein; es sei mit a bezeichnet, also $a = u/U$. Ferner muß das Verhältnis des Abstandes der einzelnen Wirbel zu der Spaltbreite D konstant sein; es werde mit b bezeichnet, also $b = l/D$. Diese Verhältnisse a und b können theoretisch bisher nicht berechnet werden, sondern müssen auf den Strömungsbildern abgemessen werden. Setzen wir nun also $u = a \cdot U$ und $l = b \cdot D$, so bekommen wir

$$N = \frac{u}{l} = \frac{a \cdot U}{b \cdot D}$$

oder

$$\frac{N \cdot D}{U} = \frac{a}{b} = \text{konst.}$$

Für die Spalttöne gilt also bei hinreichender Spaltbreite ganz das entsprechende Gesetz, wie für die Hiebtöne, d. h. die Tonhöhe ist der Strömungsgeschwindigkeit direkt, der Spaltbreite umgekehrt proportional.

Eine völlig exakte Gültigkeit dieser Beziehung ist für die von W. Kohlrausch bestimmte Tonhöhe der Spalttöne

kaum zu erwarten, da, wie oben auseinandergesetzt, die benutzten Spaltbreiten nicht groß genug waren, so daß die N-U-Kurven für die größten Spaltbreiten die Abszissenachse nur in der Nähe des Koordinatenanfangspunktes, aber nicht genau in diesem selbst schneiden. Die nachfolgende Tab. 1 enthält in der dritten Kolonne die Werte des Ausdrucks

Tabelle 1.

Ausströmen von Luft in Luft.

Spaltbreite D in cm	Geschwindigk. U in cm/sec	Frequenz N	$N \cdot D/U$	
0,0747	1220	670	0,041	Mittel 0,044
	1560	930	0,044	
	2000	1250	0,047	
0,0622	1290	820	0,039	Mittel 0,043
	1700	1170	0,043	
	2150	1640	0,047	
0,0498	1370	950	0,035	
	1770	1410	0,039	
	2280	2030	0,044	
0,0373	1340	960	0,027	
	1840	1660	0,034	
	2310	2450	0,039	
0,0249	1240	650	0,013	
	1670	1380	0,020	
	2170	2280	0,026	

$N \cdot D/U$ und zeigt, das wenigstens für die beiden größten Spaltbreiten dieser Ausdruck ziemlich konstant ist und der gebildete Mittelwert für diese beiden Spaltbreiten nahezu derselbe ist.

Diese akustisch gefundene Konstante 0,044 des Ausdruckes $N \cdot D/U$ muß sich nun aus den hydrodynamischen Messungen bestimmen lassen, wenn eben N mit der Frequenz der Wirbelablösung identifiziert wird. Um zunächst die Konstante $a = u/U$ zu bestimmen, mußte einerseits die Wirbelgeschwindigkeit u, andererseits die Strömungsgeschwindigkeit U gemessen werden. Zur Bestimmung von u wurde direkt mit der Stoppuhr die Zeit gemessen, die ein Wirbel zum Durchlaufen einer bestimmten Strecke (5 cm) gebraucht. Um eine hinreichende Genauigkeit zu bekommen, wurde aus einer großen Zahl von Messungen das Mittel genommen. Die

Strömungsgeschwindigkeit U wurde indirekt bestimmt, indem die Geschwindigkeit U' des Wassers vor dem Spalt in dem breiten Kanal gemessen wurde. Dies geschah durch Messen der Zeit, die im Wasser schwebende Aluminiumteilchen zum Durchlaufen einer bestimmten Strecke gebrauchten. Bedeutet dann D' den Durchmesser des Kanals, D die Spaltbreite, so ist $U = U' \cdot D'/D$. Daß die Strömung als stationär und gleichförmig angesehen werden konnte, zeigt die folgende Tab. 2, in der für zwei Fälle die Zeit angegeben ist, welche ein Teilchen in den verschiedensten Stellen des geradlinigen Teiles (Glastrog) des Kanals, abgesehen von Teilchen unmittelbar am Rande des Kanals, zum Durcheilen einer Strecke von 8 cm gebrauchten.

Tabelle 2.

t_1	t_2
9,6	14,2
9,8	13,2
9,5	12,2
9,6	12,6
9,8	13,0
9,6	13,0
10,0	12,8
10,0	12,8
9,6	13,2
9,8	13,4
9,6	Mittel 13,0
9,6	
9,8	
Mittel 9,7	

Die folgende Tab. 3 enthält für zwei Spaltbreiten die Geschwindigkeiten U, U' und u, sowie das Verhältnis $a = u/U$. Aus dieser Tabelle ergibt sich das Gesamtmittel für a zu 0,224.

Zur Bestimmung des Verhältnisses $b = l/D$ wurden die Werte des Wirbelabstandes l und der Spaltbreite D aus einer Reihe von photographischen

Tabelle 3.

Spaltbreite D in cm	U' in cm/sec	U in cm/sec	u in cm/sec	$a = u/U$	
0,26	0,33	25,8	6,0	0,23	Mittel
	0,35	27,6	6,25	0,227	0,229
	0,31	24,6	5,7	0,23	
0,19	0,19	20,6	4,34	0,215	Mittel
	0,23	24,9	5,49	0,22	0,218

Aufnahmen ausgemessen. Die Resultate enthält die folgende Tab. 4.

Tabelle 4.

Wirbelabstand l	Spaltbreite D	$b = l/D$
13,0	2,7	4,8
15,0	3,0	5,0
19,0	3,9	4,9
22,4	4,7	4,8
23,0	4,8	4,8
22,0	4,4	5,0
		Mittel 4,9

Aus den so erhaltenen Konstanten a und b ergibt sich nun

$$\frac{N \cdot D}{U} = \frac{a}{b} = \frac{0{,}224}{4{,}9} = 0{,}046 .$$

Dieser hydrodynamisch gefundene Wert 0,046 für den Ausdruck $N \cdot D/U$ ist also in recht guter Übereinstimmung mit dem akustisch bestimmten Wert 0,044, wodurch also die Zurückführung der Spalttöne auf die Wirbelablösung erwiesen erscheint.

Es ist von Interesse, die Konstanten der Spalttöne mit denen der Hiebtöne zu vergleichen. Die Konstante $b = l/D$, welche hier den Wert 4,9 hat, beträgt bei den Hiebtönen für zylindrische Stäbe 4,8; die Konstante $a = u/U$, welche bei den Spalttönen gleich 0,224 ist, hat bei den Hiebtönen den Wert 0,14. Die Größenordnung ist jedenfalls dieselbe, die Verschiedenheit dürfte vor allem in der durch die verschiedenen Ablösungsbedingungen verursachten Verschiedenheit der Wirbelstärke Γ begründet sein, mit der ja die Wirbelgeschwindigkeit in der Beziehung $u = \Gamma/l \cdot \sqrt{8}$ steht. Daß der Ausdruck $N \cdot D/U$ für die Hiebtöne die Form $1 - a/b$, für die Spalttöne dagegen die Form a/b hat, ist, wie leicht ersichtlich, darin begründet, daß bei den Spalttönen die Lamelle relativ zum Spalt strömt, während die umgebende Flüssigkeit ruht, daß dagegen bei den Hiebtönen umgekehrt die Lamelle ruht und die umgebende Flüssigkeit relativ zu dem Stabe strömt. Infolgedessen ist im ersten Falle die Ablösungsgeschwindigkeit der Wirbel einfach gleich u, im letzteren dagegen gleich $U - u$. Vernachlässigt man den Unterschied der Konstanten für die Spalttöne und für die Hiebtöne und setzt angenähert für beide die Mittelwerte $a = 0{,}18$, so folgt, wenn mit N_{Sp} die Frequenz

der Spalttöne, mit N_H die der Hiebtöne bezeichnet wird, für gleiche U- und D-Werte

$$\frac{N_H}{N_{Sp}} = \frac{1-a}{a}$$

oder

$$N_H = N_{Sp} \cdot \frac{1-a}{a}$$

oder nahezu

$$N_H = N_{Sp} \cdot 4{,}5.$$

Die Hiebtöne sind also bei gleicher Geschwindigkeit und gleicher Spaltbreite bzw. gleichem Stabdurchmesser rund vier- bis fünfmal höher als die Spalttöne.

Die Konstanz des Ausdruckes $N \cdot D/U$ folgt rein formal ebenso wie für die Hiebtöne auch hier für die Spalttöne aus den Ähnlichkeitssätzen der Hydrodynamik. Daraus ergibt sich auch für die Spalttöne der weitere Schluß, daß, soweit der Ausdruck konstant ist, er auch unabhängig von Druck und kinematischer Zähigkeit bzw. der Temperatur sein muß. Das bedeutet aber, daß sich für diesen Ausdruck dieselbe Konstante ergeben muß, nicht nur wenn die gesamte Flüssigkeit (Gas), d. h. ausströmende Flüssigkeit und Flüssigkeit, in die sie ausströmt, wechselt, sondern auch, wenn die aus dem Spalte strömende Flüssigkeit (Gas) eine andere ist, wie die, in welche sie strömt. Beobachtungen hierüber liegen ebenfalls von W. Kohlrausch vor, der auch die Höhe der Spalttöne gemessen hat, wenn Kohlensäure (Dichte $\Delta = 1{,}515$), ein Gemisch von Kohlensäure und Luft (Dichte $\Delta = 1{,}247$), Sauerstoff (Dichte $\Delta = 1{,}105$), ein Gemisch von Kohlensäure und Leuchtgas (Dichte $\Delta = 0{,}992$) und ein Gemisch von Luft und Leuchtgas (Dichte $\Delta = 0{,}716$) in Luft ausströmte. Es ist also zu erwarten, daß auch in diesen Fällen der Ausdruck $N \cdot D/U$ nahezu denselben Wert besitzt, wenigstens für die größten benutzten Spaltbreiten, für welche die N-U-Kurven nahezu durch den Koordinatenanfangspunkt gehen. Die folgende Tab. 5 gibt für die genannten Gase bzw. Gasgemische bei den größten von W. Kohlrausch benutzten Spaltbreiten die Werte von $N \cdot D/U$.

Die Tabelle zeigt, daß auch beim Ausströmen von Gasen, die verschieden sind von dem Gase, in das sie ausströmen, die Beziehung zwischen Tonhöhe, Strömungsgeschwindigkeit

Tabelle 5.

Ausströmendes Gas	Spaltbreite D in cm	Geschwindigkeit U in cm/sec	Frequenz N	$N \cdot D/U$	
Kohlensäure ($\Delta = 1{,}515$)	0,0747	1040	670	0,048	Mittel
		1320	870	0,049	0,049
		1470	1010	0,051	
Gemisch von Kohlensäure und Luft ($\Delta = 1{,}247$)	0,0747	1140	670	0,044	Mittel
		1490	910	0,046	0,046
		1690	1070	0,047	
Sauerstoff ($\Delta = 1{,}105$)	0,0747	1130	640	0,042	Mittel
		1820	1160	0,048	0,045
Gemisch von Kohlensäure und Leuchtgas ($\Delta = 0{,}992$)	0,0622	1380	870	0,039	Mittel
		1750	1210	0,043	0,042
		2150	1510	0,044	
Gemisch von Luft und Leuchtgas ($\Delta = 0{,}716$)	0,0622	1540	820	0,033	Mttel
		2010	1180	0,037	0,036
		2340	1480	0,039	

und Spaltbreite auch quantitativ sehr nahezu dieselbe ist, wie für Gase, die in dasselbe Gas ausströmen; für das Gemisch von Luft und Leuchtgas ist der Wert der Größe $N \cdot D/U$ schon merklich kleiner als der Normalwert, doch ist zu beachten, daß sowohl für dies Gemisch wie auch für das Gemisch von Kohlensäure und Leuchtgas die größte benutzte Spaltbreite nur 0,622 mm betrug, während für die anderen Gase die größte Spaltbreite den Wert 0,747 mm hatte.

Entsprechend dem oben Gesagten, wonach der Ausdruck für die Abhängigkeit der Frequenz von der Geschwindigkeit, wenn er auch die kleinen Spaltbreiten mit umfassen soll, vermutlich zu schreiben ist

$$N = \frac{k}{D}[U - f(U)],$$

worin $f(U)$ für hinreichend große U sich einem konstanten Werte U_0 nähert, so daß dann $d f(U)/d N = 0$ wird, sollte exakter gelten

$$D \cdot \frac{d N}{d U} = k = \frac{a}{b}.$$

Bei der Prüfung dieser Beziehung ist jedoch zu bedenken, daß der Differentialquotient $d N/d U$ nur recht roh zu bestimmen ist, da von W. Kohlrausch für jede Spaltbreite

bei jedem Gase nur drei Werte für U (U_1, U_2, U_3) und für N (N_1, N_2, N_3) angegeben sind. Aus diesen ist in der folgenden Tabelle bei der Berechnung das Mittel aus $N_2 - N_1/U_2 - U_1$ und aus $N_3 - N_2/U_3 - U_2$ genommen und für dN/dU eingesetzt. Um genauere Werte des Produktes $D \cdot dN/dU$ zu bekommen, müßte eine weit größere Reihe zusammengehöriger Werte von N und U gegeben sein, wie das für die Hiebtöne durch die Messungen von Strouhal der Fall ist. Immerhin mögen die so für Luft bei einer Spaltbreite von 5 mm und verschiedenen Spaltdicken s zwischen 9,5 mm und 1 mm (die letzte mit einem Stern bezeichnete Kolonne gibt die Zahlen für einen mit Schmirgel aufgerauhten Spalt) in der folgenden Tab. 6 wiedergegeben werden.

Tabelle 6.

Ausströmen von Luft in Luft.

Spaltbreite D in mm	$D \cdot dN/dU$				
	$s = 9{,}5$ mm	$s = 5$ mm	$s = 3$ mm	$s = 1$ mm	$s^* = 1$ mm
0,747	0,062	0,056	—	—	—
0,622	0,064	0,059	0,061	0,061	0,056
0,498	0,063	0,059	0,052	0,056	0,060
0,373	0,052	0,057	0,052	0,052	0,053
0,249	0,041	0,043	0,044	0,045	0,044
Mittel	0,056	0,055	0,052	0,054	0,053

Die Werte der Tabelle für den Ausdruck $D \cdot (dN/dU)$ sind nicht völlig konstant, sondern sie schwanken etwa zwischen 0,06 bis 0,04; das auftretende Maximum beim Übergang von größeren zu kleineren Spaltbreiten deutet wohl darauf hin, daß die vorgenommene Tangentenbildung aus drei Punkten zu ungenau ist, um exakte Werte zu geben. Der hydrodynamisch bestimmte Wert 0,046 fällt jedoch zwischen die hier gegebenen Grenzen.

Die Abweichung von dem einfachen Gesetz $N \cdot D/U =$ konst. hat Lord Rayleigh[1]) für die Hiebtöne mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze zu geben gesucht, indem er auf Grund der letzteren schreibt:

$$N = \frac{U}{D} f\left(\frac{\nu}{UD}\right),$$

[1]) Lord Rayleigh, Theory of sound, 2. ed. Vol. II, S. 372, 1896; Phil. Mag. (6) 29. S. 435. 1915.

worin ν die kinematische Zähigkeit bedeutet. Da der dimensionslose Ausdruck $\nu/U \cdot D$ eine kleine Zahl ist, entwickelt er die Funktion in eine Potenzreihe und findet so, indem er die Reihe mit dem zweiten Gliede abbricht

$$\frac{N \cdot D}{U} = a\left(1 - \frac{c \cdot \nu}{U \cdot D}\right),$$

worin c eine neue Konstante bedeutet. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$N = \frac{a}{D}\left(U - \frac{c \cdot \nu}{D}\right)$$

und vergleicht sie mit der empirischen Formel von Kohlrausch

$$N = k\,(U - U_0)\,,$$

so sieht man, daß $k = a/D$ oder $k \cdot D = a$ und ferner $U_0 = c \cdot \nu/D$ oder $U_0 \cdot D = \nu \cdot c = c'$ sein muß, worin c' eine Konstante bedeutet, die nur noch von der kinematischen Zähigkeit ν abhängt, für eine gegebene Flüssigkeit also einen bestimmten Wert hat. Die Differentiation von N nach U ergibt also die bereits oben abgeleitete Beziehung $D \cdot (dN/dU) = a$, nur daß eben in der Gleichung von Kohlrausch die N-U-Kurven von vornherein als Gerade angesehen werden. Die folgende Tab. 7 enthält die Prüfung dieser Beziehungen.

Tabelle 8.

Spaltbreite D in cm	k	$D \cdot k$	U_0 in cm/sec	$D \cdot U_0$
0,0747	0,74	0,0553	303	22,6
0,0622	0,94	0,0585	436	27,1
0,0498	1,19	0,0593	580	28,9
0,0373	1,53	0,0570	731	27,3
0,0249	1,75	0,0436	867	21,6

Man sieht, daß sowohl der Ausdruck $D \cdot k$ wie auch $D \cdot U_0$ zwar angenähert, aber durchaus nicht völlig konstant sind, was z. T. jedenfalls darauf zurückzuführen sein dürfte, daß die Kurven auch in dem hier gemessenen Gebiete ein wenig gekrümmt sind. Die Krümmung der Kurven würde aber erst durch die höheren Glieder in der Reihenentwicklung von Lord Rayleigh wiedergegeben werden. Andererseits ist

der Rayleighsche Ansatz für die Abweichungen von der einfachen Beziehung $N \cdot D/U = \text{konst.}$ immerhin hypothetisch und rein formal. Die physikalischen Ursachen der Abweichungen werden in der Art der Wirbelablösung begründet sein, die bei zu engen Spalten bzw. zu geringen Stabdicken irgendwie behindert oder verändert sein wird. Über sie wird erst eine eingehende Untersuchung dieser Abweichungen mit Hilfe photographischer Aufnahmen an strömendem Wasser Aufklärung bringen können. Hier sollte zunächst eine Theorie der Spalttöne auf Grund der Theorie der Wirbelablösung für den einfachen Grenzfall hinreichend großer Spaltbreiten gegeben werden, die durch die Versuche als bestätigt anzusehen ist.

Danzig-Langfuhr, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 18. Juni 1919.)

3. *Zur Hydrodynamik der Schneidentöne;* von *E. Schmidtke.*

(Hierzu Tafel III.)

Die Abhängigkeit der sogenannten Schneidentöne, welche entstehen, wenn eine Gaslamelle gegen eine mehr oder weniger scharfkantige Schneide strömt, von den verschiedensten Faktoren ist in den letzten Jahren vor allem von R. Wachsmuth und seinen Schülern[1]) eingehend untersucht. Diese Arbeiten haben als wesentlichste Resultate folgende Gesetzmäßigkeiten ergeben:

Ein Ton entsteht erst dann, wenn die Schneide des Keiles einen gewissen minimalen Abstand vom Spalt hat; dieser kritische Abstand a_0 ist abhängig von der Ausströmungsgeschwindigkeit. Die Tonhöhe sinkt bei Vergrößerung des Schneidenabstandes stetig und ist diesem umgekehrt proportional. Bei einem bestimmten Wert a_1 des Abstandes springt der Ton jedoch um eine Oktave nach oben, um dann wieder bei wachsendem Abstand a stetig nach demselben Gesetze wie vorher abzunehmen bis zu einer Stelle a_2, wo die Tonhöhe wieder um etwa eine Oktave springt. Es ist a_1 nahezu proportional $2a_0$ und a_2 proportional $3a_0$. Die Tonhöhe ist ferner der Ausströmungsgeschwindigkeit U direkt proportional. Der Zusammenhang zwischen Tonhöhe N, dem Schneidenabstand a und der Ausströmungsgeschwindigkeit U läßt sich nun für die verschiedenen Intervalle in die einfache Gleichung zusammenfassen

$$\frac{2aN}{iU} \cong 1,$$

worin für i die Reihe der ganzen Zahlen einzusetzen ist und zwar für das erste Intervall 1, für das zweite 2, usw.

Der Mechanismus der Tonerzeugung dieser Schneidentöne ist besonders durch die kinematographische Aufnahme von

1) Literatur vgl. bei H. R. Göller, Dissertation, Gießen 1912.

Schlierenbildern der pendelnden Luftlamelle durch R. Wachsmuth[1]) erheblich geklärt; er zeigte, daß durch die Stauung des Luftstromes eine Pendelung um die Gleichgewichtslage eingeleitet wird, bei welcher die Lamelle entweder ihrer ganzen Länge nach um die Schneiden hin und her pendelt, wie dies bei dem Grundton oder dem 1. Intervall der Fall ist oder aber in Unterabteilungen, in einzelne sogenannte Bänder zerfällt und so hin und her pendelt, wobei die Anzahl der Bänder dem jeweiligen Intervall entspricht.

Die erwähnte Beziehung

$$\frac{2aN}{i \cdot U} \cong 1$$

ist von W. König[2]) gefunden auf Grund der Vorstellung, daß eine Störung infolge der Stauung von der Schneide weg mit Schallgeschwindigkeit der Strömung entgegen zum Spalt zurückläuft, daß sie dann hier eine Störung in der Ausströmungsgeschwindigkeit verursacht, die von der Lamelle mit der Strömungsgeschwindigkeit fortgetragen wird und an der Schneide dann eine neue Stauung auslöst. Die Formulierung dieser Vorstellung ergibt die Gleichung

$$\frac{aN}{i \cdot U} \cong 1.$$

Damit der Faktor 2 noch im Zähler auftritt, muß angenommen werden, daß die erste Stauungsverdichtung eine Verdünnung in der Lamelle erzeugt, so daß die zweite Störung eine Verdünnungswelle sein würde und erst die dritte Störung wieder eine Verdichtung. Diese Annahme erscheint nicht ohne Bedenken. König selbst gibt ferner zu, daß seine Theorie keine Erklärung für die Tatsache ergibt, daß der Ton erst bei einem gewissen Schneidenabstand entstehen kann, daß sie ferner auch von dem Springen des Tones in die nächst höheren Oktaven keine Rechenschaft gibt.

Eine weitere Aufklärung dieser Vorgänge ist jedenfalls erwünscht. Sie kann natürlich zunächst nur durch experimentelle Untersuchungen gewonnen werden. Der hoffnungsvollste Weg hierfür scheint nun der zu sein, daß man den dem akustischen Vorgang der Schneidentöne entsprechenden Fall

1) R. Wachsmuth, Ann. d. Phys. 14. S. 469. 1904.
2) W. König, Phys. Zeitschr. 18. S. 1053. 1912.

einer strömenden Wasserlamelle, die auf eine Schneide auftrifft, beobachtet. Daß sich Wasser für Tonerzeugungen, die dem behandelten Fall verwandt sind, grundsätzlich von Gasen nicht unterscheidet, hat schon C. Sondhaus[1]) gezeigt. Eine solche Untersuchung von Flüssigkeitslamellen hat den Vorzug, daß der Vorgang bei der sehr viel geringeren Strömungsgeschwindigkeit und der damit verbundenen geringeren Pendelungsfrequenz sowie den größeren Dimensionen mit dem Auge direkt beobachtbar ist. Das gleiche Verfahren hat ja schon bei den Hiebtönen[2]) und den Spalttönen[3]) zu weitgehender Aufklärung und einer Bestätigung der Wirbelablösungstheorie dieser Töne geführt. Auf Veranlassung von Hrn. Professor Krüger habe ich daher das Verhalten einer aus einem Spalt ausströmenden auf eine Schneide auftreffenden Flüssigkeitslamelle untersucht.

Es war also vor allem festzustellen, 1. ob sich auch bei geringen Ausflußgeschwindigkeiten irgendein periodischer Vorgang einstellt, der bei genügend großer Frequenz als Ursache der Tonbildung anzusprechen ist. 2. Ob auch hierbei das für diese Art von Tönen so charakteristische Springen eintritt, d. h. ob hier für einen bestimmten Schneidenabstand a eine ungefähre Verdoppelung der Frequenz eintritt usf. 3. Ob auch hier die Königsche Beziehung

$$\frac{2aN}{i \cdot U} \cong 1$$

gilt.

Zur Sichtbarmachung der Vorgänge im Wasser wurde versucht, dem ausströmenden Wasser eine Suspension von von der Fettschicht befreitem Aluminiumpulver zuzusetzen, oder aber es durch einen Zusatz von hinreichend konzentrierter Kaliumpermanganatlösung zu färben. Beide Wege erwiesen sich als gut brauchbar, um die auftretenden Bewegungen mit dem Auge zu verfolgen, indessen kann man sich ihrer bei photographischen Aufnahmen weniger gut bedienen, da ein scharfes Einstellen kaum möglich ist.

Es genügt aber auch, sich bei der Beobachtung auf eine Ebene zu beschränken, als die sich naturgemäß die Oberfläche

1) C. Sondhaus, Pogg. Ann. **124.** S. 1 u. 135. 1865.

2) F. Krüger u. A. Lauth, Ann. d. Phys. **44.** S. 801. 1914; F. Krüger, Ann. d. Phys. **60.** S. 279. 1919.

3) F. Krüger u. E. Schmidtke, Ann. d. Phys. **60.** S. 701. 1919.

darbietet. Auf das Wasser gestreutes Lykopodiumpulver erwies sich hierfür am geeignetsten; das von Lord Rayleigh vorgeschlagene Schwefelpulver flockt sich sehr bald zu größeren Konglomeraten zusammen. Man kann sich hier um so eher auf die Betrachtung der Oberfläche beschränken, als man nicht zu befürchten braucht, daß die Erscheinungen durch Störungen der Oberflächenspannung beeinflußt werden. Dazu sind die auftretenden Bewegungen zu intensiv, und zudem ergab auch eine Vergleichung der Oberflächenbewegung mit der durch Aluminiumteilchen sichtbar gemachten Bewegung in tieferen Schichten eine vollkommene Übereinstimmung.

Es wurde zunächst versucht, für diese Versuche den schon in der Arbeit von F. Krüger[1]) beschriebenen Rundlauf zu benutzen. Der aus einem Zinkspalt von 2 mm Breite ausströmenden Wasserlamelle wurde ein Zinkkeil von 52° Keilwinkel und von 3,7 cm Seitenlänge entgegengestellt. Berührte zunächst der Keil den Spalt nahezu, so geschah nichts Periodisches. Erst wenn man den Abstand des Keiles vom Spalt auf ungefähr 1 cm vergrößerte, fing die Lamelle an, ziemlich kräftig zu pendeln. Wurde nun der Abstand allmählich vergrößert, so blieb die Frequenz der Pendelung nahezu konstant, um plötzlich auf genau die Hälfte zu fallen. Durch Variieren der Geschwindigkeit des ausströmenden Wassers wurde eine Änderung der Frequenz der Pendelung nicht herbeigeführt.

Diese Ergebnisse entsprechen also zunächst in keiner Weise den bei den Schneidentönen beobachteten. Der Grund für dieses abweichende Verhalten war aber unschwer zu erkennen: durch die Pendelungen der Lamelle wird die ganze Wassermasse im Kanal zu heftigen Schwingungen erregt. Da diese Wassermasse aber eine ausgesprochene Eigenfrequenz besitzt, die bei den relativ beschränkten Dimensionen des Kanals der Pendelungsfrequenz einigermaßen nahe liegt, so wird die zu erwartende Änderung der Frequenz der Lamellenpendelung von dem überwiegenden Einfluß der Eigenschwingung der Wassermasse unterdrückt, diese zwingt vielmehr der Lamelle wenigstens innerhalb weiter Grenzen ihre eigene Frequenz auf. Wir haben hier also ganz die analogen Verhältnisse wie bei

1) F. Krüger, Ann. d. Phys. 60. S. 279. 1919.

einer Pfeife, deren Verhalten von R. Wachsmuth[1]) dahin vollkommen aufgeklärt ist, daß das Resonanzrohr der Pfeife die Frequenz der Lamellenschwingung innerhalb ausgedehnter Grenzen konstant hält, und daß erst bei einer sehr erheblichen Differenz der Frequenz der Lamellen- und Flüssigkeitsschwingung das konstante Mitschwingen versagt, bis plötzlich ein Umschlagen in einen der Obertöne des Pfeifenrohres eintritt.

Wenn man aber einigermaßen Einsicht in den Mechanismus der reinen Schneidentöne gewinnen will, so muß man also diese Eigenschwingungen des umgebenden Mediums ausschalten oder richtiger ihre Frequenz von der der Lamellenschwingung soweit verschieden machen, daß eine gegenseitige störende Beeinflussung nicht mehr eintritt. Zu dem Zweck muß die Wassermasse, in die der Strahl durch den Spalt eintritt, möglichst ausgedehnt sein, damit sie eine möglichst langsame Eigenfrequenz hat. Es wurde daher eine Zinkwanne von

Fig. 1.

120 cm Länge, 50 cm Breite und 8 cm Höhe benutzt. In diese Zinkwanne ist ein Zinkkasten von 32 cm Länge und 13 cm

1) R. Wachsmuth, Ann. d. Phys. **14**. S. 469. 1904.

Breite eingesetzt, der auf der einen Seite unter einem Winkel von 65° in einen Spalt von 2 mm Breite ausläuft. Dieser Kasten steht mit seiner Längsrichtung parallel der schmaleren Seite des Wasserbeckens, wie das die vorstehende Fig. 1 wiedergibt.

Durch eine Schlauchleitung fließt das Wasser dem inneren Kasten stetig zu. In diesem Kasten eingebaute drei Siebe aus feiner Drahtgaze bewirken, daß das Wasser wirbelfrei und mit so gut wie gleichmäßiger Geschwindigkeit dem Spalte zuströmt. Vor dem Spalt wird der schon erwähnte kleine Zinkkeil symmetrisch aufgestellt. Die Zinkwanne enthält drei Ausflußröhren, deren Öffnung so reguliert wird, daß das Wasserniveau in der Wanne konstant bleibt. Um zu verhindern, daß das auf die Oberfläche gestreute Lykopodiumpulver abläuft, wurde vor die Öffnungen ein Wehr aus Zinkblech gesetzt, das den unteren Wasserschichten freien Austritt ermöglicht, der obersten Schicht aber verwehrt. Durch Entfernung dieses Bleches läßt sich andererseits die Oberfläche sehr schnell erneuern. Eine solche Erneuerung ist öfters geboten, da die Oberfläche nach einigem Stehen wegen auftretender Spannung für die Versuche unbrauchbar wird.

Als Belichtung für die photographischen Aufnahmen wurde wieder Blitzlichtpulver verwandt und zwar in so kleinen Mengen, als es die Empflindlichkeit der Platten nur eben zuließ. Durch eine große Linse wurden die Strahlen besonders auf das Gebiet zwischen Spalt und Schneide konzentriert.

Wurde nun bei gleichbleibender Geschwindigkeit U des ausströmenden Wassers der Abstand a zwischen Schneide und Spalt stetig verändert, so ergab sich folgendes: ist $a = 0$, so teilt sich die ausströmende Flüssigkeit am Keil, ohne etwas Besonderes zu zeigen. Hieran ändert sich nichts, bis der Abstand etwa gleich 1,3 cm geworden ist. Dann fängt das austretende Flüssigkeitsband an zu pendeln, und zwar anfangs ziemlich schnell. Die Frequenz dieser Pendelung nimmt aber ab in dem Maße, in dem man den Schneidenabstand vergrößert. In Tabelle I sind die Resultate einer solchen Versuchsreihe aufgeführt, und zwar steht in der 1. Spalte der jeweilige Abstand a in Zentimetern, in der zweiten die für 20 Schwingungen gebrauchte Zeit in Sekunden und das Mittel hiervon, in der dritten stehen die hieraus berechneten Werte der Pendelungs-

frequenz N und endlich in der letzten Spalte das Produkt aus Frequenz N und Schneidenabstand a.

Tabelle 1.

Schneidenabstand a in cm	Zeit für die Dauer von 20 Schwingungen		Frequenz N	$N \cdot a$
	6,2	Mittel		
1,5	6,4 6,4 6,2	6,3	3,17	4,8
	7,0			
1,65	7,0 7,0 7,0	7,0	2,86	4,7
	8,4			
1,9	8,2 8,6 8,2 8,2	8,3	2,41	4,6
	8,8			
2,05	9,0 8,6 8,8	8,8	2,27	4,7
	10,4			
2,5	10,0 10,2	10,2	1,96	4,8
	5,2 5,6	5,4	3,70	9,2
	6,2			
2,8	6,4 6,0	6,2	3,23	9,1
	7,8			
3,4	8,0 7,6 8,2	7,9	2,53	8,7
	8,4			
3,7	9,0 8,6 8,6	8,7	2,30	8,5
	9,6			
4,05	9,2 9,2	9,3	2,15	8,7

In dem Intervall zwischen den Schneidenabständen $a = 1{,}5$ mm bis $a = 2{,}5$ mm ist das beobachtete Bild des Pendelns dasselbe, nur nimmt die Frequenz des Pendelns mit wachsendem Abstand a ab, und zwar ist sie, wie die letzte Spalte zeigt,

mit großer Annäherung diesem Abstand umgekehrt proportional. Bei dem Schneidenabstand $a = 2{,}5$ cm tritt aber offenbar ein Sprung in den Bewegungserscheinungen auf: die Lamelle schwingt jetzt plötzlich doppelt so schnell, ihre Frequenz ist also auf die höhere Oktave gesprungen. Aber auch in diesem neuen Intervall nimmt jetzt wieder die Frequenz mit wachsendem Schneidenabstand ab und zwar, wie die letzte Spalte der Tabelle zeigt, wieder sehr angenähert dem Scheidenabstand umgekehrt proportional.

Bei weiterer Vergrößerung des Schneidenabstandes a war das Pendeln nicht mehr zu verfolgen, da sich äußere störende Einflüsse immer stärker bemerkbar machten. Es konnten infolgedessen auch weitere Sprünge in der Pendelfrequenz nicht beobachtet werden.

Die Resultate der Tab. 1 sind noch in der folgenden. Fig. 2 wiedergegeben, in der als Abszisse der Schneidenabstand a, als Ordinate die Pendelungsfrequenz N aufgetragen ist.

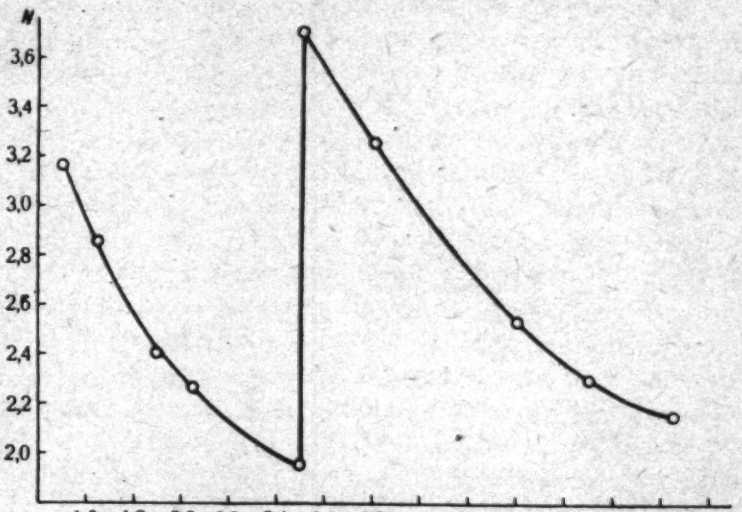


Fig. 2.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den Resultaten der Untersuchung der Schneidentöne, so erkennt man die völlige Übereinstimmung, nur daß eben hier wegen der langsamen Frequenz das Pendeln mit dem Auge direkt beobachtet werden kann, während es bei den Schneidentönen erst aus einer Reihe kinematographischer Aufnahmen von Schlierenbildern der Luftlamelle erschlossen werden muß.

Über den Strömungsmechanismus bei diesen Pendelungen und speziell über seine Änderung beim Übergang vom ersten in das zweite Intervall, in dem die Pendelungsfrequenz um eine Oktave in die Höhe springt, lehrt nun die direkte Beobachtung mit dem Auge folgendes. Im ersten Intervall pendelt die Lamelle als Ganzes hin und her. Beim jedesmaligen Zurückgehen aus der maximalen Lage rollt sich das Ende zu einem Wirbel auf, der dann an der Keilwand entlang fortwandert. Auf der rechten Seite der Lamelle (Blickrichtung Spalt–Schneide) sind diese sich ablösenden Hauptwirbel rechtsdrehend, von oben betrachtet, wie das die nachstehende Fig. 3 zeigt; das Umgekehrte findet auf der linken Seite statt. Es hat sich also auch hierbei das Ergebnis herausgestellt, daß genau, wie bei den Hieb- und Spalttönen, die Frequenz des auftretenden Tones unmittelbar zusammenhängt mit der Anzahl der abgelösten Wirbel. Als neue Tatsache kommt hier jedoch hinzu,

Fig. 3.

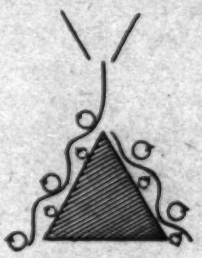


Fig. 4.

daß, wenn bei Vergrößerung des Abstandes *a* die Pendelung langsamer wird, auch die Anzahl der in der Zeiteinheit abgelösten Wirbel entsprechend kleiner wird. Die primären Wirbel, die vor der Schneide entstehen, erzeugen nun bei ihrem Weiterwandern längs der Keilwand oder richtiger wohl beim Auftreffen auf die Schneide sekundäre Wirbel, deren Drehungssinn dem der ersteren entgegengesetzt ist. Die obenstehende Fig. 4 gibt eine Skizze hiervon; die ausgezogenen Kreise stellen die primären Wirbel, die kleineren gestrichelten Kreise die sekundären Wirbel dar. Die letzteren sind naturgemäß durch die Reibung an der Keilwand stärker gedämpft als die ersteren. Abgesehen von der dadurch bedingten Unsymmetrie haben wir auf jeder der beiden Keilseiten ein v. Kármánsches Wirbelsystem. Schon Wachsmuth hatte darauf hingewiesen, daß die mit der Tonbildung eng zusammenhängenden Wirbel schon vor der Schneide entstehen. Er folgerte dies aus ihrem Drehungssinn; denn würden sie durch Reibung an den Keilwänden entstehen, so müßte ihr Drehungssinn mit dem der eben besprochenen sekundären Wirbel über-

einstimmen. Auf den Schlierenbildern Wachsmuths sind aber nur die Hauptwirbel erkennbar. Wachsmuths Annahme, daß die primären Wirbel vor der Schneide entstanden sein müssen, wird also durch unsere Ergebnisse vollauf bestätigt. Photographische Aufnahmen des Strömungszustandes im ersten Intervall gibt die Fig. 5 (Tafel III) wieder, die sehr schön die Reihe der primären und sekundären Wirbel, welche an der Keilwand entlang wandern, erkennen läßt.

Hat man durch Vergrößerung des Abstandes a den kritischen Punkt erreicht, wo der Ton ungefähr in seine höhere Oktave umschlägt, so ändert sich das Bild wesentlich. Die Lamelle schwingt nicht mehr als Ganzes, sondern erscheint gewellt. Offenbar bildet sich schon zwischen Spalt und Keil ein kurzes Stück eines v. Kármánschen Wirbelsystems aus. Photographische Aufnahmen des Strömungszustandes in diesem zweiten Intervall zeigen die Figg. 6 und 7 (Tafel III). Man sieht in diesen Figuren deutlich zwei wohlausgebildete Wirbel vor dem Keil. Bei einem Umschlagen aus der ersten, in die zweite Phase verdoppelt sich also die Zahl der pro Zeiteinheit abgelösten Wirbel. Während aber bei der Wirbelablösung des freien Ausströmens, dem die Spalttöne entsprechen, der Abstand zweier aufeinander folgender Wirbel bei konstanter Spaltbreite eindeutig gegeben ist, ist dieser Abstand hier von dem Keilabstand a abhängig.

Die nachstehende Fig. 8 gibt eine Skizze von vier Phasen des Schwingungszustandes in diesem zweiten Intervall; die

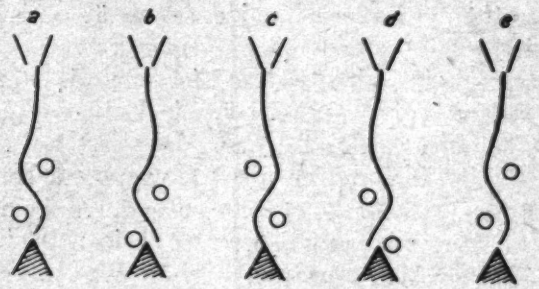


Fig. 8.

Phasen unterschieden sich um je $^1/_4$ Periode, in e ist dann wieder derselbe Zustand erreicht wie in a.

Die Wirbel wandern auch hier an der Keilwand entlang, indem sie sich durch Nebenwirbel ergänzen.

Nach dem Bisherigen ist es nun nicht schwer, sich ein Bild davon zu machen, wie sich in den weiteren Intervallen der Schwingungszustand abspielen wird. In der nebenstehenden Fig. 9 ist ein v. Kármánsches Wirbelsystem gezeichnet, wie es sich beim Ausströmen von Flüssigkeiten aus einem Spalt einstellt[1]); zu beachten ist natürlich, wie aus dem oben Gesagten zur Genüge hervorgeht, daß der Wirbelabstand beim Vorhandensein einer Schneide vom Schneidenabstand abhängt. Ein Keil in der Stellung I, II, III, IV würde nun jedesmal ein und denselben Ton, aber jeweils in dem Intervall bzw. 1, 2, 3 oder 4 hervorrufen. Hieraus folgt, daß die Differenz der Abstände a für ein und denselben Ton in zwei aufeinander folgenden Intervallen konstant sein muß. Diese Konstante muß natürlich in dem Maße abnehmen, wie die Tonhöhe zunimmt, da sich dann das ganze Wirbelsystem zusammendrängt.

Fig. 9.

Diese Forderung der Konstanz der Differenz der Schneidenabstände bei gleichem Ton in verschiedenen Intervallen läßt sich an den hier angestellten hydrodynamischen Versuchen nicht prüfen, da sich nur zwei Intervalle beobachten ließen. Die Prüfung läßt sich jedoch leicht ausführen an den Resultaten der akustischen Messungen, die J. Rieth[2]) für ausströmende Luft erhalten hat. Um in den verschiedenen Intervallen die Schneidenabstände für die gleiche Schwingungszahl zu erhalten, mußte natürlich an Hand der Kurven zwischen den gemessenen Werten interpoliert werden. In der folgenden Tab. 2 sind in der ersten Kolonne die Schwingungszahlen,

Tabelle 2.

Spaltbreite D=0,102cm, Ausflußgeschwindigkeit der Luft U=562,1cm/sec.

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_4-a_3	a_3-a_2	a_2-a_1	Mittel von $a_{n+1}-a_n$
450	0,64	1,29	1,93	—	—	0,64	0,65	0,645
500	0,58	1,19	1,78	—	—	0,59	0,61	0,60
550	0,52	1,10	1,65	2,22	0,57	0,55	0,58	0,56
600	0,47	1,01	1,52	2,06	0,54	0,51	0,54	0,53
650	0,43	0,93	1,43	1,95	0,52	0,50	0,50	0,51
700	0,40	0,86	1,35	1,85	0,50	0,49	0,46	0,48

1) F. Krüger u. E. Schmidtke, Ann. d. Phys. **60**. S. 701. 1919.
2) J. Rieth, Dissertation, Gießen 1917.

in den nächsten vier Kolonnen die zugehörigen Schneidenabstände, in den nächsten drei Kolonnen die Differenzen je zweier aufeinander folgender Schneidenabstände und in der letzten Kolonne das Mittel aus diesen Differenzen angegeben.

Der Theorie entsprechend ergeben sich also in der Tat die Werte von $a_4 - a_2$, $a_3 - a_2$, $a_2 - a_1$ für ein und dieselbe Schwingungszahl N als nahezu konstant.

Es folgt übrigens schon aus der Tatsache, daß diese Werte $a_4 - a_3$, $a_3 - a_2$, $a_2 - a_1$ untereinander gleich sind für eine bestimmte Schwingungszahl $N = N_1$, daß dann dasselbe für jede andere Schwingungszahl $N = N_2$ auch gelten muß, wenn man voraussetzt, daß die N-a-Kurven eben Hyperbeln sind, wie das ja die Beobachtung ergibt.

Wir setzen, um dies zu zeigen,

$$\ldots,\ a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = A_{N_1}.$$

Für den Wert $N = N_2$ seien die entsprechenden Werte

$$\ldots,\ a_4^{(2)} - a_3^{(2)},\ a_3^{(2)} - a_2^{(2)},\ a_2^{(2)} - a_1^{(2)}.$$

Die Kurvenstücke, die man als Bilder für die Abhängigkeit der Schwingungszahl N vom Abstand a erhält, gehören, wie schon gesagt, zu Hyperbelbogen, die ihrerseits wieder einer einparametrigen Schar angehören. Diese Schar läßt sich durch die Gleichung darstellen

$$N \cdot a = (c + \nu A_{N_1}) \cdot N_1,$$

worin

$$\nu = 0,\ 1,\ 2 \ldots .$$

Die umstehende Fig. 10 gibt diese Hyperbelschar wieder. Legt man nun die Gerade $N = N_2$ durch die Schar, so erhält man damit

. . . . . .

$$a_4^{(2)} - a_3^{(2)} = \frac{N_1}{N_2}\left(c + 3\,A_{N_1}\right) - \frac{N_1}{N_2}\left(c + 2\,A_{N_1}\right) = \frac{N_1}{N_2} \cdot A_{N_1},$$

$$a_3^{(2)} - a_2^{(2)} = \frac{N_1}{N_2}\left(c + 2\,A_{N_1}\right) - \frac{N_1}{N_2}\left(c + A_{N_1}\right) = \frac{N_1}{N_2} \cdot A_{N_1},$$

$$a_2^{(2)} - a_1^{(2)} = \frac{N_1}{N_2}\left(c + A_{N_1}\right) - \frac{N_1}{N_2}\,c = \frac{N_1}{N_2} \cdot A_{N_1}.$$

Es ist also, wie behauptet, auch

$$a_4^{(2)} - a_3^{(2)} = a_3^{(2)} - a_2^{(2)} = a_2^{(2)} - a_1^{(2)} = \frac{N_1}{N_2} \cdot A_{N_1} = A_{N_2}.$$

Das Ergebnis läßt sich auch so ausdrücken: Legt man Gerade im Abstand N parallel zu der Abszissenachse durch die Hyperbelschar, dann schneiden zwei aufeinander folgende

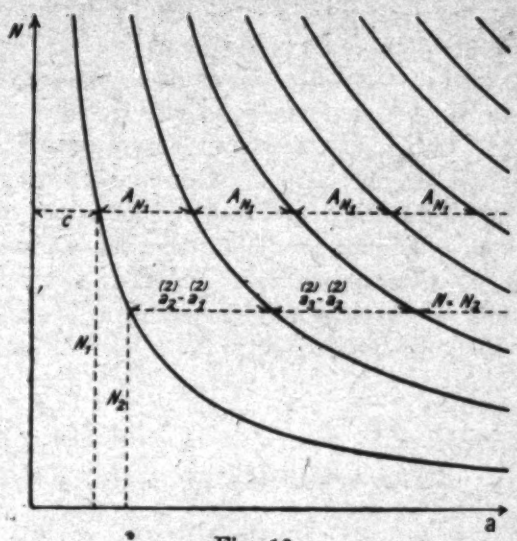


Fig. 10.

Hyperbeln auf ein und derselben Geraden immer gleich lange Stücke heraus. Für verschiedene Gerade verhalten sich diese Stücke oder Differenzen A umgekehrt wie ihre Abstände von der Abszissenachse. Diese letzte Folgerung ist an den Zahlen der vorhergehenden Tabelle in der folgenden Tab. 3 geprüft. In dieser Tabelle stehen in der ersten Kolonne die Schwingungszahl N, in der zweiten die zugehörigen Werte A_N, in der dritten das Produkt beider, das also konstant sein sollte.

Tabelle 3.

N	A_N	$N \cdot A_N$
450	0,645	290
500	0,60	300
550	0,56	308
600	0,53	318
650	0,51	312
700	0,48	336

Die Tabelle zeigt, daß diese Forderung nahezu erfüllt ist. Daß der Wert des Produktes $N \cdot A_N$ einen kleinen Gang aufweist, rührt daher, daß die Kurven ein wenig von der Hyperbelgestalt abweichen.

Außer von dem Schneidenabstand hängt die Tonhöhe N der Schneidentöne von der Strömungsgeschwindigkeit U ab. Wie oben erwähnt, gilt dafür die Beziehung

$$\frac{2a\,N}{i\,U} \cong 1.$$

Es war also zu untersuchen, ob auch für die Pendelungen der Wasserlamelle diese Gleichung Gültigkeit besitzt.

Die Bestimmung der Ausströmungsgeschwindigkeit U geschah indirekt. Durch die in den Zuströmungskasten (vgl. Fig. 1) eingesetzten Siebe wurde erreicht, daß das Wasser mit angenähert gleichmäßiger Geschwindigkeit dem Spalte zuströmte. Diese Geschwindigkeit U' im Kasten konnte nun durch direkte Beobachtung von im Wasser suspendierten Aluminiumteilchen festgestellt werden. Die Messung der Geschwindigkeit durch die Beobachtung von auf die Oberfläche gestreutem Lykopodiumpulver kann hier ganz falsche Resultate liefern, da sich im Kasten die Oberfläche bei den langsamen Bewegungen anders als die tieferen Wasserschichten bewegt. Die im Wasser schwebenden Aluminiumteilchen ermöglichten es, an den verschiedensten Stellen des Kastenquerschnitts die Geschwindigkeit zu bestimmen. Messungen an den verschiedenen Stellen ergaben nur wenig voneinander abweichende Werte. Aus dieser Strömungsgeschwindigkeit U' im Kasten berechnet sich nun die Ausströmungsgeschwindigkeit U der Flüssigkeitslamelle aus dem Spalt nach der Gleichung

$$U = U' \cdot \frac{D'}{D},$$

worin D' die Breite des Kastens, D die des Spaltes bedeutet.

Es wurden zunächst zwei Versuchsreihen bei verschiedener Ausströmungsgeschwindigkeit U angestellt.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit U' in dem Zuströmungskasten wurde das Mittel aus 13 Messungen der Zeit genommen, die ein Aluminiumteilchen zum Durchlaufen des Weges von 3,5 cm gebrauchte; so ergab sich $U' = 0.103$ cm/sec. Hieraus berechnet sich, da der Durchmesser des Kastens $D' = 12{,}9$ cm, der des Spaltes $D = 0{,}19$ cm betrug,

$$U = \frac{12{,}9}{0{,}19} \cdot 0{,}103 = 6{,}99 \text{ cm/sec.}$$

Die übrigen Messungen der Anzahl der Pendelungen bei verschiedenem Schneidenabstand wurden genau so wie bei den

obigen Messungen ausgeführt. Die folgende Tab. 4 enthält die Resultate dieser Messungen bei der genannten Ausströmungsgeschwindigkeit von $U = 6{,}99$ cm/sec.

Tabelle 4.

Ausströmungsgeschwindigkeit $U = 6{,}99$ cm/sec.

Schneidenabstand a in cm	Frequenz N	$N \cdot a$	Ordnungszahl i	$\frac{2aN}{i \cdot U}$
1,3	2,94	3,82	1	1,09
1,5	2,38	3,57	1	1,02
1,6	2,27	3,63	1	1,04
1,85	1,92	3,55	1	1,02
2,15	1,67	3,59	1	1,03
2,30	1,59	3,66	1	1,05
2,40	1,56	3,74	1	1,07
2,45	3,13	7,67	2	1,10
2,60	2,86	7,43	2	1,06
2,85	2,70	7,70	2	1,10
2,95	2,63	7,77	2	1,11
3,1	2,53	7,84	2	1,12

In der folgenden Fig. 11 ist analog wie oben die Abhängigkeit der Schwingungszahl N vom Schneidenabstand a wiedergegeben.

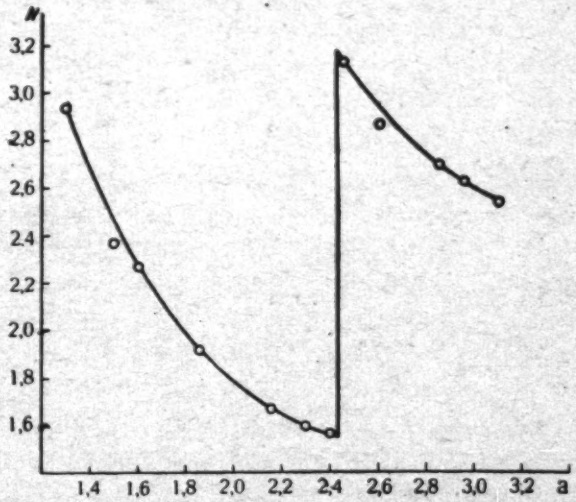


Fig. 11.

Bei der zweiten Beobachtungsreihe mit veränderter Strömungsgeschwindigkeit U wurden 2 Bestimmungen der Ge-

schwindigkeit U' vorgenommen, die erste vor den Messungen der Pendelungsfrequenz und zwar mit 15 Einzelbeobachtungen, die andere hinterher mit 18 Einzelbeobachtungen. Die erstere ergab $U' = 0{,}119$ cm, die zweite $U' = 0{,}117$ cm, im Mittel also $U' = 0{,}118$ cm. Daraus berechnet sich die Ausströmungsgeschwindigkeit aus dem Spalt

$$U = \frac{0{,}118 \cdot 12{,}9}{0{,}19} = 8{,}025 \text{ cm/sec.}$$

Die nächste Tab. 5 enthält die Resultate dieser Versuche, die Bedeutung der Angaben der Tabelle ist dieselbe wie die der in der vorhergehenden Tabelle.

Tabelle 5.

Ausströmungsgeschwindigkeit $U = 8{,}03$ cm/sec.

Schneidenabstand a in cm	Frequenz N	$N \cdot a$	Ordnungszahl i	$\frac{2aN}{iU}$
1,3	3,13	4,06	1	1,02
1,4	2,86	4,0	1	1,00
1,6	2,48	3,98	1	0,99
1,7	2,38	4,06	1	1,02
1,75	2,33	4,08	1	1,02
1,9	2,22	4,22	1	1,05
2,05	4,0	8,2	2	1,02
2,4	3,34	8,02	2	1,00
2,7	2,98	8,07	2	1,00
3,0	2,78	8,33	2	1,04

Auch hier sei die Abhängigkeit der Frequenz N vom Keilabstand a in der umstehenden Fig. 12 dargestellt.

Aus beiden Versuchsreihen geht hervor, daß auch diese Pendelungsschwingungen der Wasserlamelle sehr gut die Königsche Gleichung

$$\frac{2aN}{iU} \cong 1$$

erfüllen. Das beweist, daß man es bei ihnen mit genau demselben Vorgang zu tun hat, der dem akustischen Problem der Schneidentöne zugrunde liegt.

Es sei hier zum Schluß noch eine Versuchsreihe wiedergegeben, bei der statt des Keils ein einfaches 1 mm starkes und 3 cm breites Aluminiumblech der ausströmenden Wasser-

lamelle entgegengesetzt wurde. Für die Ausströmungsgeschwindigkeit aus dem Spalt wurde hier als Mittel aus 19 Einzel-

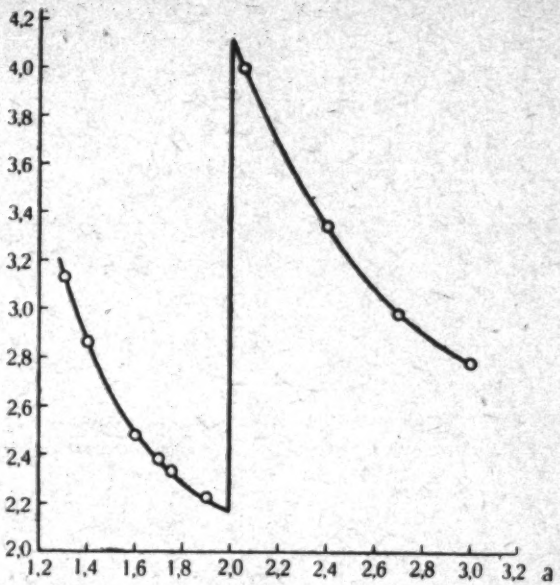


Fig. 12.

beobachtungen der Wert $U = 5{,}4$ cm/sec gefunden. Die Resultate sind in der nachfolgenden Tab. 6 enthalten.

Tabelle 6.

Ausströmungsgeschwindigkeit $U = 5{,}4$ cm/sec,
Schneide von Aluminiumblech von 1 mm Dicke.

Schneidenabstand a in cm	Frequenz N	$N \cdot a$	Ordnungszahl i	$\frac{2aN}{i \cdot U}$
0,9	2,9	2,61	1	0,97
1,0	2,7	2,70	1	1,0
1,45	1,89	2,74	1	1,02
2,2	1,23	2,68	1	0,993
2,3	2,42	5,57	2	1,03
2,5	2,27	5,67	2	1,05
2,8	2,04	5,72	2	1,06

Auch bei dem einfachen Blech als Schneide erfolgt also ein ganz entsprechendes Pendeln der Lamelle wie bei einem richtigen Keil. Es entspricht das der bei den akustischen

Messungen gefundenen Tatsache, daß die Form des Keils nur von sehr geringem Einfluß auf die Höhe der Schneidentöne ist. Die Resultate der letzten Tabelle sind noch in der folgenden Fig. 13 dargestellt, in der auch der hier vorhandene Sprung der Frequenz deutlich zutage tritt.

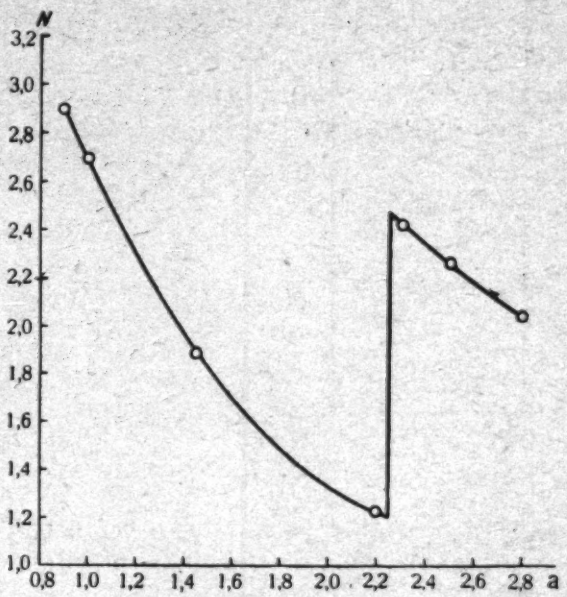


Fig. 13.

Das Gesamtergebnis dieser Untersuchung der Pendelung einer Wasserlamelle an einer gegenüberstehenden Schneide läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: Die dem Auge direkt zugänglichen Vorgänge bei dieser Pendelung entsprechen in jeder Beziehung qualitativ und quantitativ den akustischen bei den Schneidetönen. Vor allem tritt auch hier ein Springen der Pendelungsfrequenz um eine Oktave ein, und es gilt auch die Königsche Beziehung

$$\frac{2aN}{iU} \cong 1.$$

Die Ursache der Pendelungen ist hier mit Sicherheit n der Bildung von Wirbeln zu sehen, die abwechselnd rechts und

links schon vor der Schneide sich bilden. Diese Wirbelbildung entspricht ganz der bei den Spalttönen gefundenen, nur mit dem Unterschiede, daß der Abstand der Wirbel hier durch den Schneidenabstand geregelt wird.

Zum Schluß möchte ich auch noch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Professor F. Krüger, für die Anregung zu dieser Arbeit und seine Ratschläge meinen aufrichtigsten Dank aussprechen.

Danzig-Langfuhr, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 3. Juli 1919.)

---

4. *Der senkrechte Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Schicht räumlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante;* *von J. Wallot.*

1. In den Punkten 0 und z_1 der z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 1) denken wir uns zwei zur Achse senkrechte Ebenen. Der Raum zwischen ihnen sei ausgefüllt durch ein Medium („Medium II"), dessen Dielektrizitätskonstante (D.K.) ε eine stetige Funktion der Koordinate z sei; in den Räumen vor und hinter der planparallelen „Übergangsschicht" veränderlicher D.K. seien die Dielektrizitätskonstanten konstant gleich ε_0, bzw. ε_1 („Medium I", bzw. „Medium III"). Die Übergänge der D.K. an den beiden Grenzebenen seien stetig. Leitung und Dispersion seien in allen drei Medien ausgeschlossen.

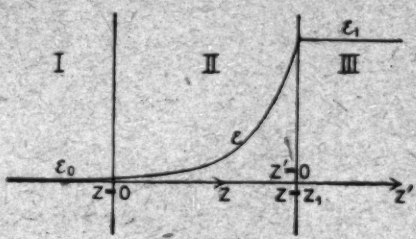


Fig. 1.

Was geschieht nun, wenn auf eine solche Schicht elektromagnetische Wellen auffallen? Werden sie reflektiert oder gehen sie reflexionsfrei hindurch?

Über die Beantwortung dieser Fragen haben bis auf den heutigen Tag Meinungsverschiedenheiten bestanden. Obgleich niemand daran zweifelt, daß bei *unstetigem* Übergang von ε_0 auf ε_1 die Fresnelschen Formeln gelten und obgleich Unstetigkeiten sonst ziemlich allgemein als mathematische Abstraktionen aufgefaßt werden, die der Physiker in jedem Falle durch die unendlich benachbarten stetigen Änderungen ersetzen kann, so ist doch immer wieder die Meinung vertreten worden, die Reflexion an einer Stelle, wo die D.K. von ε_0 auf ε_1 übergeht, sei an die *Unstetigkeit* dieses Übergangs geknüpft, bei *stetigem* Übergang werde *nichts* reflektiert.

2. Als erster hat sich wohl Schlick[1]) gegen diese irrige Ansicht gewandt. Er hat nachgewiesen, daß das Licht in der Schicht stetig veränderlicher D.K. im allgemeinen wirklich reflektiert wird, und zwar mit einem Reflexionskoeffizienten, welcher, wenn die D.K. in der Schicht nur Werte *zwischen* ε_0 und ε_1 annimmt, stets kleiner ist als der für sprunghaften Übergang geltende Fresnelsche Wert.

3. Später hat sich Rüdenberg[2]) in einer Arbeit über den „Verlauf elektrischer Wellen auf Leitungen mit räumlich veränderlicher Charakteristik" mit dem entsprechenden Problem der Kabeltheorie beschäftigt. Es gelang ihm, die Lösung für senkrechtes Auftreffen der Wellen und unendlich langsame, sonst aber beliebige räumliche Änderung der Charakteristik zu finden. Er war jedoch der Meinung, es gebe unter allen denkbaren Leitungen von räumlich veränderlicher Charakteristik eine Schar ausgezeichneter Leitungen, auf denen für *alle* Wellenlängen und Wellenformen jede Reflexion vollkommen ausgeschlossen sei. Ich[3]) habe darauf hingewiesen, daß diese Folgerung auf einem Rechenfehler beruht und daß die Rüdenbergsche Lösung nur im Grenzfall sehr langsamer Änderung der Charakteristik richtig ist.

4. Unter der entsprechenden Voraussetzung langsamer Änderung der D.K. hat dann Gans[4]) unabhängig von den bisher genannten Arbeiten das optische Problem sehr vollständig für beliebige Einfallswinkel der auftreffenden Strahlung behandelt. Die von ihm für *senkrechten* Einfall abgeleitete Lösung stimmt, von Korrektionsgliedern abgesehen, mit der Lösung von Rüdenberg und mir überein. Seine Ableitungen sind jedoch strenger, und es wird auch zum ersten Male genau ihr Gültigkeitsbereich abgeschätzt.

5. In der neuesten Zeit ist eine Arbeit von Emden[5]) erschienen, in der versucht wird, das Problem zwar nur für senkrechten Einfall geradlinig polarisierter ebener Wellen und nur für die zwei besonderen Änderungsgesetze:

---

1) M. Schlick, Dissertation. Berlin 1904.
2) R. Rüdenberg, Elektrot. u. Maschinenbau. 1913. Heft 20.
3) J. Wallot, ebenda, 1914, Heft 28.
4) R. Gans, Ann. d. Phys. 47. S. 709. 1915.
5) R. Emden, Sitz.-Ber. d. Bayr. Akad. 1918. S. 417.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + a z)^m \\ (2) & \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot e^{az} \end{array}\right\} \quad (a \text{ und } m \text{ sind Konstante}),$$

im übrigen aber ganz allgemein zu lösen.

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit sind die folgenden: Auch bei beliebig rascher Änderung des Brechungsexponenten soll jede Schwächung des Lichts durch Reflexion im Innern der Schicht ausgeschlossen sein.[1]) Trotzdem aber soll die Strahlung bei sehr rascher stetiger Änderung des Brechungsexponenten nicht etwa nur in dem durch die Fresnelschen Formeln gegebenen Maße, sondern unter Umständen nahezu *total* reflektiert werden. Und zwar soll diese eigentümliche Totalreflexion offenbar in der vorderen Grenzfläche zustande kommen.

6. Diese Arbeit des Herrn Emden hat zu den nachstehenden Ausführungen den Anstoß gegeben. Ich werde das Problem des senkrechten Durchgangs elektromagnetischer Wellen durch eine Übergangsschicht veränderlicher D.K. unter den Emdenschen Voraussetzungen (1) und (2) für beliebige Schichtdicken ausführlich durchrechnen. Dabei wird sich in Übereinstimmung mit Schlick ergeben, daß die erwähnten Folgerungen des Herrn Emden nicht haltbar sind, daß also die Strahlung bei genügend großem Gradienten der D.K. zweifellos im Inneren der Schicht reflektiert wird, jedoch keinesfalls in höherem Maße, als den Fresnelschen Formeln entspricht.

Ob die Strahlung reflektiert wird oder nicht, hängt nur ab von dem Verhältnis der Schichtdicke zur Wellenlänge. Die Schichtdicke, von der ab die Strahlung durch Reflexion ungeschwächt hindurchgeht, kann aus der genannten Arbeit von Gans entnommen werden. Ich werde auf diesen Grenzfall nicht näher eingehen.

Sollen — im entgegengesetzten Grenzfall — die Fresnelschen Formeln gelten, so muß die Schichtdicke nicht etwa von der Größenordnung der Wellenlänge, sondern im Vergleich zu dieser klein sein. Bei sehr geringer Schichtdicke sind die Fresnelschen Formeln bereits bis auf Größen 2. Ordnung richtig; gegen den Fall unstetigen Übergangs besteht dann nur noch der Unterschied, daß das System der ver-

1) A. a. O. S. 417.

waschenen Knoten und Bäuche vor der Schicht gegen diese um ein geringes verschoben ist.

In dem von mir zur Erläuterung der allgemeinen Entwicklungen zahlenmäßig durchgerechneten Falle, daß die D.K. in einer Schicht von $0{,}07\,\lambda$ Dicke (λ = Wellenlänge im leeren Raum) nach dem Gesetze (2) von 1 auf 81 ansteigt, gehen bereits rund 55% der auffallenden Energie durch die Schicht hindurch, nur rund 45% werden reflektiert, während bei unstetiger Änderung der D.K. nach den Fresnelschen Formeln 36% durchgelassen, 64% reflektiert werden würden.

7. Besonderen Wert werde ich auf eine möglichst anschauliche Diskussion der gefundenen Lösung legen.

Das elektromagnetische Feld vor der Übergangsschicht geht, wie nach den Grenzbedingungen nicht anders zu erwarten, durch die Schicht hindurch vollkommen stetig in das Feld hinter der Schicht über. Von irgendwelchen geheimnisvollen Vorgängen in der Nähe der vorderen Grenzfläche ist keine Rede.

Trotz des Auftretens der reflektierten Wellen ist die mittlere Strahlung für jeden Gradienten der D.K. völlig unabhängig von z. Dies folgt schon aus dem Energieprinzip; denn die Theorie bezieht sich nur auf *stationäre* Energieströmungen, und durch die Grundgleichungen ist von vornherein jede Umwandlung elektromagnetischer Energie in andere Energieformen ausgeschlossen.

Das Feld in der Übergangsschicht kann ebenso wie die Felder in den Räumen mit konstanter D.K. als eine Übereinanderlagerung durchgehender und reflektierter Wellen gedeutet werden. Man bekommt aber einfachere Formeln und übersichtlichere Resultate, wenn man es *als Ganzes* zu berechnen und zu beschreiben versucht. Der Geschwindigkeit der durchgehenden und reflektierten Einzelwellen kann man dann die Geschwindigkeit der aus ihnen zusammengesetzten „Wellengruppe" gegenüberstellen; und es läßt sich leicht zeigen, daß die Gruppengeschwindigkeit[1]) auch hier nahe zusammenhängt mit der Geschwindigkeit, mit der sich die Energie fortpflanzt.

1) Es scheint mir in unserem Falle sachgemäßer, zwischen „Einzelwellen"- und Gruppengeschwindigkeit, als zwischen „Phasen"- und Gruppengeschwindigkeit zu unterscheiden [vgl. die Definitionsgleichung (27)]. Rayleigh spricht meist von wave-velocity und group-velocity.

Die Eigenschaften des resultierenden Feldes lassen sich besonders bequem überblicken, wenn man die Amplituden der Feldstärken ähnlich wie in der Kabeltheorie durch Umlaufbahnen in der komplexen Ebene darstellt.

8. Daß Herr Emden im Widerspruch mit meinen Resultaten überhaupt keine Reflexion im Inneren der Schicht bekommt, erklärt sich folgendermaßen. Es läßt sich leicht zeigen, daß bereits für Abstände z von der vorderen Grenzebene, die nur wenige Wellenlängen betragen, *unabhängig von der Größe des Gradienten der D.K.* mit hinreichender Genauigkeit die Rüdenberg-Ganssche Lösung benutzt werden kann.[1]) Da nun selbstverständlich auch bei dieser Lösung die mittlere Strahlung konstant ist, so schließt Herr Emden, auch bei beliebig großem Gradienten sei jede Reflexion im Innern der Schicht ausgeschlossen. Hierbei übersieht er aber zweierlei: erstens fallen bei *großem* Gradienten auf die Übergangsschicht nur *Bruchteile* von Wellenlängen, die Rüdenberg-Ganssche Lösung ist daher für große Gradienten ungültig, und zweitens bedeutet die Feststellung, daß die Strahlung räumlich konstant ist, nach Nr. 7 nichts weiter als eine Probe auf die Richtigkeit der Rechnung; über die Frage, ob die Strahlung reflektiert wird oder nicht, kann sie nicht entscheiden.

Herr Emden darf aber bei seinen Gleichungen auch gar keine Reflexion erwarten. Denn er streicht ja von vornherein[2]) die in der Übergangsschicht rückwärts laufenden Wellen als „nicht in Betracht kommend", macht also seine Strahlung *selbst* zu einer reflexionslosen. Wie es möglich ist, daß er *trotz*, ja gerade *wegen* dieser durchgreifenden Beseitigung der reflektierten Wellen für große Gradienten Totalreflexion bekommt, wird in Nr. 38 gezeigt werden.

Herr Emden hätte sich wohl kaum zu seinen Schlußfolgerungen verleiten lassen, wenn er von vornherein (nicht nur in seinen Zahlenbeispielen) statt eines unbegrenzten Mediums mit veränderlicher D.K. eine begrenzte Übergangsschicht vorausgesetzt hätte.[3])

---

1) A. a. O. S. 422.

2) A. a. O. S. 421 unten.

3) Auf die Unbestimmtheit der Emdenschen Problemstellung hat schon Schlick aufmerksam gemacht (a. a. O. S. 45f.).

Aufstellung und Integration der Differentialgleichungen.

9. Wegen der *Voraussetzungen der Rechnung* verweise ich auf Nr. 1 und Fig. 1. Die D.K. soll also von dem konstanten Wert ε_0, den sie im „Medium I" hat, durch das „Medium II" hindurch stetig auf den Wert ε_1 übergehen, den sie im „Medium III" hat.

Die elektrische Feldstärke habe die einzige Komponente $\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}$, die magnetische die einzige Komponente $\mathfrak{H}_y = \mathfrak{H}$.

Die Abhängigkeit von der Zeit sei überall durch den Faktor e^{int} gegeben. Die Schwingungszahl in 2π Sekunden n steht mit der Wellenlänge im leeren Raum λ in dem Zusammenhang ($c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sek):

$$\frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{3}$$

In dem homogenen Medium III befinden sich keine Energiequellen; dort brauchen also nur solche Wellen berücksichtigt zu werden, die in der Richtung der wachsenden z fortschreiten.

10. *Differentialgleichungen.* Unter den gemachten Voraussetzungen gelten für alle drei Medien die Maxwellschen Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z}, \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial z}. \end{cases} \tag{4}$$

Mit Rüdenberg[1]) führt man nun für das Medium II vorteilhaft die Variable ϑ ein, die definiert sei durch

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_0^z \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\, dz, \quad \text{also} \quad \frac{d\vartheta}{dz} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}. \tag{5}$$

Damit nehmen die Grundgleichungen die Gestalt an:

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \vartheta}, \\ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \vartheta}. \end{cases} \tag{6}$$

Setzt man

$$\begin{cases} \mathfrak{E} = F \cdot e^{int} \\ \mathfrak{H} = \varphi \cdot e^{int} \end{cases} \tag{7}$$

1) A. a. O. Gleichung (25). — Formal ist die Rüdenbergsche veränderliche „Charakteristik" gleich $1/\sqrt{\varepsilon}$.

und bezeichnet man die Differentiation nach ϑ durch einen Punkt, so wird

$$\text{in}\sqrt{\varepsilon}\,F = -\dot{\varphi}$$

$$\text{in}\,\varphi = -\sqrt{\varepsilon}\,\dot{F}.$$

Wir differenzieren die zweite dieser beiden Gleichungen nach ϑ, setzen aus der ersten $\dot{\varphi}$ ein und erhalten so die Differentialgleichung für das elektrische Feld im Medium II:

$$\ddot{F} + \frac{\dot{\varepsilon}}{2\varepsilon}\dot{F} + n^2 F = 0. \tag{8}$$

Ganz entsprechend folgt für das magnetische Feld im Medium II:

$$\ddot{\varphi} - \frac{\dot{\varepsilon}}{2\varepsilon}\dot{\varphi} + n^2\varphi = 0. \tag{9}$$

11. *Einführung der Annahme* (1). Den weiteren Rechnungen legen wir die Annahme (1) zugrunde. In den so gewonnenen Formeln werden auch die Formeln für die Abhängigkeit (2) enthalten sein; man braucht nach Emden nur a durch a/m zu ersetzen und m über alle Grenzen wachsen zu lassen, um die für die exponentielle Abhängigkeit geltenden Formeln zu erhalten.

Unsere Konstante a ist bei gegebener Schichtdicke z_1 nicht willkürlich; denn es muß sein:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 (1 + a z_1)^m$$

oder

$$a z_1 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{m}} - 1. \tag{10}$$

Für die Variable ϑ erhält man den Wert:

$$\vartheta = \frac{2}{m+2}\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{a c}(1 + a z)^{\frac{m+2}{2}} = \vartheta_0 (1 + a z)^{\frac{m+2}{2}}, \tag{11}$$

so daß auch

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{\frac{2m}{m+2}}. \tag{12}$$

Statt m führen wir noch den Parameter q ein durch die Festsetzungen:

$$(13)\quad q = \frac{m+1}{m+2};\quad m = \frac{2q-1}{1-q};\quad \frac{m}{m+2} = 2q-1;\quad \frac{m+2}{2} = \frac{1}{2(1-q)};$$

q steigt von $1/2$ über $2/3$ bis 1, wenn m von 0 über 1 bis ∞ wächst.

Dann wird nach (12)

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\vartheta}\lg\varepsilon = \frac{m}{m+2}\cdot\frac{1}{\vartheta},$$

und unsere Gleichungen (8) und (9) nehmen die durch die Einführung von ϑ besonders symmetrische Gestalt an:

$$(14)\qquad \begin{cases} \ddot{F} + \dfrac{1-2(1-q)}{\vartheta}\dot{F} + n^2 F = 0 \\ \ddot{\varphi} + \dfrac{1-2q}{\vartheta}\dot{\varphi} + n^2\varphi = 0. \end{cases}$$

12. *Lösungen.* Wir lösen diese Gleichungen durch Hankelsche Zylinderfunktionen[1]) und schreiben:

$$(15)\qquad \begin{cases} F = \vartheta^{1-q}\{A_1' H^{(1)}_{\mp(1-q)}(n\vartheta) + A_2' H^{(2)}_{\mp(1-q)}(n\vartheta)\} \\ \varphi = \vartheta^{q}\{B_1 H^{(1)}_{\pm q}(n\vartheta) + B_2 H^{(2)}_{\pm q}(n\vartheta)\}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (6) in Verbindung mit (12) und der Rechenregel[2])

$$(16)\qquad \frac{d}{d\vartheta}[\vartheta^p H_{\pm p}(n\vartheta)] = \pm n\vartheta^p H_{\pm(p-1)}(n\vartheta)$$

zeigen, daß

$$B_1 = \mp i\sqrt{\varepsilon_0}\,\vartheta_0^{-(2q-1)} A_1'$$
$$B_2 = \mp i\sqrt{\varepsilon_0}\,\vartheta_0^{-(2q-1)} A_2'$$

ist, und daß hier und bei den Parametern der Zylinderfunktionen entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen genommen werden müssen. Wir entscheiden uns für die unteren und erhalten so die Lösungen:

$$(17)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = e^{int}\left(\dfrac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{1-q}\{A_1 H^{(1)}_{q-1}(n\vartheta) + A_2 H^{(2)}_{q-1}(n\vartheta)\} \\ \mathfrak{H} = -ie^{int}\sqrt{\varepsilon_0}\left(\dfrac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{q}\{A_1 H^{(1)}_{q}(n\vartheta) + A_2 H^{(2)}_{q}(n\vartheta)\}. \end{cases}$$

13. *Bestimmung der Integrationskonstanten.* Die Konstanten A_1 und A_2 sind aus den Grenzbedingungen zu berechnen. Wir machen für die Medien I und III die folgenden Ansätze:

---

1) Ich schließe mich in den Bezeichnungen an die Funktionentafeln von E. Jahnke und F. Emde, Leipzig und Berlin 1909, an (J. u. E.).

2) J. u. E. S. 165.

für das Medium I:

$$(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = e^{int}\left\{E e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_0}z} - R\cdot e^{+i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_0}z}\right\} \\ \mathfrak{H} = e^{int}\sqrt{\varepsilon_0}\left\{E e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_0}z} + R\cdot e^{+i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_0}z}\right\}; \end{cases}$$

für das Medium III:

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = e^{int} D e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_1}z} \\ \mathfrak{H} = e^{int} D\sqrt{\varepsilon_1} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon_1}z}. \end{cases}$$

Dann folgt aus der Stetigkeit der tangentialen Komponenten (andere sind nicht vorhanden) für die erste Grenzfläche:

$$(20)\quad \begin{cases} E - R = A_1 H^{(1)}_{q-1}(n\vartheta_0) + A_2 H^{(2)}_{q-1}(n\vartheta_0), \\ E + R = -i\{A_1 H^{(1)}_{q}(n\vartheta_0) + A_2 H^{(2)}_{q}(n\vartheta_0)\}, \end{cases}$$

für die zweite Grenzfläche:

$$(21)\quad \begin{cases} D = \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}\right)^{1-q}\{A_1 H^{(1)}_{q-1}(n\vartheta_1) + A_2 H^{(2)}_{q-1}(n\vartheta_1)\}, \\ D\sqrt{\varepsilon_1} = -i\sqrt{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}\right)^{q}\{A_1 H^{(1)}_{q}(n\vartheta_1) + A_2 H^{(2)}_{q}(n\vartheta_1)\}. \end{cases}$$

Nennen wir nun unter Beachtung der Gleichung (12):

$$(22)\quad \begin{cases} H^{(1)}_{q-1}(n\vartheta_0) - iH^{(1)}_{q}(n\vartheta_0) = P_1 \\ H^{(2)}_{q-1}(n\vartheta_0) - iH^{(2)}_{q}(n\vartheta_0) = P_2 \\ \sqrt{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}\right)^{q}\{H^{(1)}_{q-1}(n\vartheta_1) + iH^{(1)}_{q}(n\vartheta_1)\} = P_3 \\ \sqrt{\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}\right)^{q}\{H^{(2)}_{q-1}(n\vartheta_1) + iH^{(2)}_{q}(n\vartheta_1)\} = P_4, \end{cases}$$

so wird

$$(23)\quad A_1 = -\frac{P_4}{P_2P_3 - P_1P_4}2E,$$

$$(24)\quad A_2 = \frac{P_3}{P_2P_3 - P_1P_4}2E.$$

R und D ergeben sich nach Bestimmung von A_1 und A_2 leicht aus (20) und (21).

Das Feld läßt sich demnach für beliebig dicke Übergangs-

schichten berechnen, wenn für die Werte der Zylinderfunktionen Tafeln zur Verfügung stehen.[1])

Diskussion der Lösung.

14. Den weiteren Erörterungen sei eine grundsätzliche Bemerkung vorausgeschickt.

Bei der theoretischen Behandlung des Reflexionsproblems in der Optik zerlegt man meist, nachdem die Lösung gefunden ist, das Feld im Medium I sofort wieder in eine „einfallende" und eine „reflektierte" Welle und betrachtet dann nur noch die reflektierte Teilwelle in ihrem Verhältnis zur einfallenden.

Mit diesem Verfahren würden wir bei der Diskussion der für das Medium II gefundenen Lösung nicht auskommen. Die Dicke der Übergangsschicht kann nämlich in unserem allgemeinen Falle von der Größenordnung der Wellenlänge λ oder noch kleiner sein als diese; und es ist ja bekannt, daß man bei optischen Problemen, bei denen die vorkommenden Abmessungen mit der Wellenlänge vergleichbar sind, das Feld sehr häufig nur als *Ganzes* beschreiben, aber nicht eindeutig in einzelne „Teilwellen" mit bestimmten Dämpfungen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zerlegen kann. Wir werden deshalb im folgenden bei der Diskussion des Feldes im Medium II in höherem Maße, als sonst üblich, das aus der durchgehenden und der reflektierten Welle zusammengesetzte „resultierende Feld" ins Auge fassen müssen. Wir können dies um so mehr, als wir nur auf diesem Wege auch der energetischen Seite des Problems gerecht werden können und als im Gebiet der langen Wellen oder an Leitungen mit veränderlicher Charakteristik das resultierende Feld sich mindestens ebenso gut beobachten läßt als die reflektierten Teilwellen.

15. Ich werde die allgemeinen Ausführungen beständig durch ein vollständig durchgerechnetes Zahlenbeispiel und durch graphische Darstellungen zu veranschaulichen suchen.

Dem *Zahlenbeispiel* liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die D.K. in der Übergangsschicht nach dem exponentiellen Gesetze (2) von $\varepsilon_0 = 1$ bis zu $\varepsilon_1 = 81$ ansteige (vgl. die Kurve

1) Rüdenberg hat a. a. O. das Problem nicht weiter verfolgt, weil für die Zylinderfunktionen von der Ordnung $-\frac{1}{3}$ und $+\frac{1}{3}$, die in dem von ihm allein behandelten Falle des linearen Anstiegs der Charakteristik auftreten, keine Tafeln bekannt sind.

der Fig. 1), und daß die Dicke der Schicht sehr nahe gleich $^7/_{100}$ der Wellenlänge sei. Bei diesen Annahmen treten nur die Zylinderfunktionen H_0 und H_1 auf, für die in dem Buche von Jahnke und Emde Tafeln zu finden sind; ihre Argumente liegen symmetrisch um die Zahl 1, und es wird

$$a z_1 = \lg \varepsilon_1/\varepsilon_0 = 4{,}3945; \qquad a\lambda = 20\pi = 62{,}832;$$
$$n\vartheta_0 = 0{,}2000; \qquad n\vartheta_1 = 1{,}8000 .$$

(Für $\lambda = 1$ km wird z. B. $z_1 = 69{,}94 =$ rund 70 m, $n = 1{,}885 \cdot 10^6$.)

Die Gleichungen (20) bis (24) ergeben:

Bezeichnung der komplexen Größe	Betrag	Argument	Reeller Teil	Faktor des imaginären Teil
A_1/E	0,05466	147° 27′ 10″	− 0,04608	+ 0,02941
A_2/E	0,4199	−12° 22′ 40″	+ 0,4102	− 0,09001
R/E	0,6695	−40° 19′ 20″	+ 0,5104	− 0,4332
D/E	0,2476	−74° 21′ 10″	+ 0,06678	− 0,2384

16. Zur *Veranschaulichung* wollen wir uns die Amplituden der elektrischen und der magnetischen Feldstärke für alle vorkommenden Koordinaten z in der Ebene der komplexen Zahlen aufgezeichnet denken. Ist $x + i\,y = r(z) \cdot e^{i\,\psi(z)}$ eine solche Amplitude, so beschreibt die Pfeilspitze des sie darstellenden „Vektors" bei veränderlichem Parameter z eine bestimmte Bahn; denkt man sich an die einzelnen Punkte dieser Bahn oder auch an die zugehörigen Radienvektoren die entsprechenden z-Werte angeschrieben, so erhält man ein vollständiges Bild für die Abhängigkeit der betreffenden Feldstärke vom Ort und von der Zeit.

17. *Fortpflanzungsgeschwindigkeit.* Wir werden im folgenden die kinematisch definierte Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch v, die energetisch definierte durch V bezeichnen.

Unter der kinematisch definierten Geschwindigkeit v einer Einzelwelle oder einer Wellengruppe verstehen wir die Geschwindigkeit, mit der sich ein fest angenommener Wert der Feldstärke $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{H}$ mit der Zeit verschiebt. Ist also die betreffende Feldstärke gleich $(x + i\,y)\,e^{int} = r \cdot e^{i(nt + \psi)}$, so ist v zu berechnen aus der Bedingung:

$$d\,(x \cos n t - y \sin n t) = 0 .$$

Hieraus folgt, wenn wir die Differentiation nach z durch einen Strich andeuten:

$$v = \frac{dz}{dt} = n \cdot \frac{x \sin nt + y \cos nt}{x' \cos nt - y' \sin nt} \quad (25)$$

v ist also im allgemeinen vom Ort und von der Zeit abhängig. Da eine Diskussion dieser Abhängigkeit kein Interesse bieten würde, bilden wir sofort den Mittelwert von v für eine Periode:

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T n \cdot \frac{x \sin nt + y \cos nt}{x' \cos nt - y' \sin nt}\, dt$$

$$= \frac{n}{T}\left[\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}\, t - \frac{1}{n} \cdot \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} \lg (x' \cos nt - y' \sin nt)\right]_0^T$$

und erhalten somit als Formel für die kinematisch definierte Geschwindigkeit:

$$\bar{v} = n \cdot \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2} \quad (26)$$

18. In Polarkoordinaten nimmt dieser Ausdruck die Form

$$\bar{v} = -n \cdot \frac{\psi'}{\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \psi'^2} \quad (27)$$

an. Bei Wellen von geringer scheinbarer räumlicher Dämpfung[1]), also kleinem r'/r, kann man hierfür setzen:

$$\bar{v} = -\frac{n}{\psi'} \quad (28)$$

Demnach ist unter der soeben genannten Voraussetzung die „räumliche" Winkelgeschwindigkeit ψ', mit der in unseren Diagrammen die Pfeilspitze des abbildenden Vektors auf ihrer Bahn herumläuft, nahezu umgekehrt proportional der mittleren Fortpflanzungsgeschwindigkeit der dargestellten Welle. Mit anderen Worten: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer wenig gedämpften Welle ist um so größer, je enger sich in unseren Diagrammen die Radienvektoren zusammendrängen, die zu gleich weit auseinanderliegenden z-Werten gehören.

19. Wir werden die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ nach (26) sowohl für die durchgehenden und reflektierten *Teil*wellen als auch für die aus diesen zusammengesetzten Wellengruppen

1) Unsere Wellen sind alle nur *scheinbar* gedämpft, da der Poyntingsche Vektor räumlich konstant ist.

berechnen. Es wird sich zeigen, daß die Gruppengeschwindigkeiten in einfacher Beziehung stehen zur Geschwindigkeit der Energie, die durch die Gleichung

$$V = \frac{\bar{S}}{\bar{\varrho}} \tag{29}$$

definiert ist, wo $\bar{S}$ und $\bar{\varrho}$ die zeitlichen Mittelwerte der Strahlung und der Energiedichte bedeuten.[1])

20. *Die Teilwellen.* Wir beginnen mit der Betrachtung der in den Medien I, II und III vorwärts oder rückwärts laufenden Teilwellen.

Im Medium III werden die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ offenbar dargestellt durch Punkte, die mit der konstanten („räumlichen") Winkelgeschwindigkeit $2\pi\sqrt{\varepsilon_1}/\lambda$ auf Kreisbahnen mit den Halbmessern D und $D\sqrt{\varepsilon_1}$ herumlaufen. Der Umlaufsinn entspricht dem des Uhrzeigers, wenn die übrigen Umläufe wie in Fig. 5 angenommen werden.

Im Medium I tritt zu den vorwärtslaufenden Wellen der elektrischen und magnetischen Kraft je eine rückwärts laufende, die natürlich gemäß (28) durch eine Kreisbahn dargestellt wird, auf der die darstellenden Punkte im umgekehrten Sinne herumlaufen. Das Verhältnis der beiden Kreisbahnhalbmesser ist $E:|R|$; die Winkelgeschwindigkeit der umlaufenden Pfeilspitzen ist $2\pi\sqrt{\varepsilon_0}/\lambda$.

21. Im Medium II setzen sich die Feldstärken $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nach den Gleichungen (17) ebenfalls aus je zwei Gliedern zusammen. Wir wollen die Glieder mit A_1 als die (elektrischen oder magnetischen) „Teilwellen 1", die mit A_2 als die „Teilwellen 2" bezeichnen und zunächst nachweisen, daß bei positivem a die Teilwellen 1 mit den reflektierten, die Teilwellen 2 mit den durchgehenden Wellen identisch sind. Zu diesem Zwecke sind die in Frage kommenden reellen und imaginären

1) Schlick hat bereits a. a. O. S. 43f. darauf hingewiesen, daß man in der Übergangsschicht zwischen der Strömungsgeschwindigkeit der Energie und der Geschwindigkeit, mit der sich in dem resultierenden Felde eine bestimmte Phase fortpflanzt, unterscheiden muß. Diese letztgenannte Phasengeschwindigkeit (wir würden sie „Gruppengeschwindigkeit" nennen) definiert er jedoch nicht durch die Gleichung (27), sondern durch die Näherungsgleichung (28), die in unserem Falle bei endlichem Gradienten der D.K. zu keinen übersichtlichen Resultaten führt [a. a. O. Gleichung (59)].

Bestandteile der Gleichungen (17) in (26) einzusetzen. Da bei der Durchführung dieser und späterer ähnlicher Rechnungen keine grundsätzlichen Schwierigkeiten zu überwinden sind, werde ich jetzt und später in der Regel nur die Resultate angeben. Zur bequemeren Nachprüfung stelle ich jedoch die folgenden, bei derartigen Umformungen mit Vorteil verwendbaren Rechenregeln[1]) zusammen:

$$(30)\quad H_p^{(1)}(x) = J_p(x) + iN_p(x);\quad H_p^{(2)}(x) = J_p(x) - iN_p(x);$$

$$(31)\quad Z_p' = -\frac{p}{x}Z_p + Z_{p-1} = \frac{p}{x}Z_p - Z_{p+1};$$

$$(32)\quad N_{p-1}J_p - N_pJ_{p-1} = \frac{2}{\pi x};$$

$$(33)\quad J_pN_p' - N_pJ_p' = \frac{2}{\pi x};$$

$$(34)\quad J_p'^2 + N_p'^2 \pm \frac{2p}{x}(J_pJ_p' + N_pN_p') = |H_{p\mp1}|^2 - \frac{p^2}{x^2}|H_p|^2.$$

Für die Geschwindigkeiten der Teilwellen 1 und 2 erhält man auf dem angedeuteten Wege die folgenden Werte:

$$(35)\quad \begin{cases} v_{\text{el.}} = \mp \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \dfrac{2}{\pi n \vartheta} \dfrac{1}{|H_q|^2} \\ v_{\text{magn.}} = \mp \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \dfrac{2}{\pi n \vartheta} \dfrac{1}{|H_{q-1}|^2}. \end{cases}$$

Die oberen Zeichen gelten hierbei für die Teilwellen 1, die unteren für die Teilwellen 2; außerdem ist zu beachten, daß nach (12) und (13) die Beziehung gilt:

$$(36)\quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{2q-1},\quad \text{also}\quad \frac{1}{\vartheta\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\vartheta_0\sqrt{\varepsilon_0}} \cdot \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta}\right)^{2q}.$$

22. Die Teilwellen 1 und 2 wandern also mit derselben Geschwindigkeit nach entgegengesetzten Richtungen. Das Gesetz, nach dem sich ihre Geschwindigkeiten mit dem Orte ändern, ist für die elektrischen Teilwellen im allgemeinen ein anderes als für die magnetischen.

Nur bei sehr kleinem $|a|\lambda$ (nahezu reflexionsfreier Fortpflanzung) liegen die Verhältnisse einfacher: dann sind nach (11)

---

1) (30) steht bei J. u. E. S. 95; (31) und (32) ebenda S. 165; (33) und (34) folgen aus (30) bis (32). $Z_p = c_1 J_p + c_2 N_p$; $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

die Argumente unserer Zylinderfunktionen sehr groß, der bekannte Grenzwert:

$$H_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{\pm i\left(x - \frac{2p+1}{4}\pi\right)} \tag{37}$$

wird anwendbar, und man erhält für $\bar{v}$ in Übereinstimmung mit der Gleichung (14) des Herrn Emden den einfachen Wert:

$$\bar{v}_{\text{el.}} = \bar{v}_{\text{magn.}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{38}$$

Der Gang der Geschwindigkeiten $\bar{v}$ im Falle unseres Zahlenbeispiels wird durch Fig. 2 veranschaulicht. Die elek-

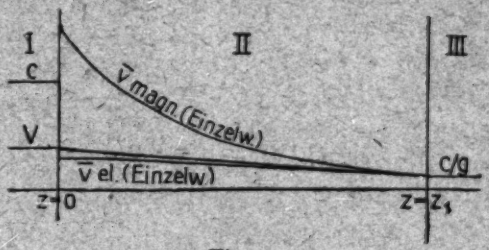


Fig. 2.

trischen Teilwellen beginnen bei $z = 0$ mit den Werten $\mp 0{,}288\, c$, die magnetischen mit den Werten $\mp 1{,}481\, c$; die Endwerte: $0{,}101\, c$ und $0{,}114\, c$ liegen wegen des verhältnismäßig großen Argumentes $n\,\vartheta_1 = 1{,}8$ nur wenig unter bzw. über der Geschwindigkeit im Medium III ($c/9$).

28. *Das resultierende Feld.* Die resultierenden Felder im Medium I können statt in je zwei nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen auch in je eine fortschreitende und je eine stehende Welle zerlegt werden. Setzen wir nämlich:

$$\frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_0}\cdot z}{\lambda} = \chi; \tag{39}$$

$$R = R_1 + iR_2 = |R|\cdot e^{i2\alpha}, \tag{40}$$

so wird

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} &= e^{\text{int}}\{E e^{-i\chi} - R e^{+i\chi}\} = e^{\text{int}}\{(E - |R|)e^{-i\chi} \\ &\qquad - |R|\, e^{i\alpha}\cdot 2i\sin(\chi+\alpha)\} \\ \mathfrak{H} &= e^{\text{int}}\sqrt{\varepsilon_0}\{E e^{-i\chi} + R e^{+i\chi}\} = e^{\text{int}}\sqrt{\varepsilon_0}\{(E - |R|)e^{-i\chi} \\ &\qquad + |R|\, e^{i\alpha}\cdot 2\cos(\chi+\alpha)\}. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Die beiden stehenden Wellen werden graphisch dargestellt durch Punkte, die auf geradlinigen Bahnen durch den Koordinatenanfang Sinusschwingungen ausführen. Die Richtungen dieser Bahnen werden durch den Faktor $e^{i\alpha}$ gegeben, und zwar bildet die stehende elektrische Welle den Winkel $90^0 + \alpha$, die stehende magnetische Welle den Winkel α mit der reellen Achse. Ferner ergibt sich aus den Gleichungen (41), daß die stehende elektrische Welle bei

$$z = -\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_0}} \tag{42}$$

einen Knoten, die stehende magnetische Welle an derselben Stelle einen Bauch hat.

24. Aus dem Gesagten folgt sofort, daß die resultierenden Wellen im Medium I durch elliptische Bahnen dargestellt werden, deren große Achsen mit den die stehenden Schwingungen darstellenden geradlinigen Bahnen gleichgerichtet sind (vgl. Figg. 3 u. 4). Dreht man das Koordinatensystem um den Winkel α, so wird die elektrische Kraft in den neuen Koordinaten x', y' dargestellt durch

$$x' = (E - |R|)\cos(\chi + \alpha) \qquad y' = -(E + |R|)\sin(\chi + \alpha), \tag{43}$$

die magnetische Kraft durch

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\varepsilon_0}(E + |R|)\cos(\chi + \alpha), \\ y' = -\sqrt{\varepsilon_0}(E - |R|)\sin(\chi + \alpha). \end{cases} \tag{44}$$

Die den großen Achsen der Ellipsen entsprechenden z-Werte geben die Lage der Bäuche, die den kleinen Achsen entsprechenden die Lage der Knoten.[1])

Die Winkelgeschwindigkeiten ψ', mit denen die darstellenden Punkte auf den Ellipsen herumlaufen, ergeben sich leicht aus den Gleichungen (18) oder (41). Setzt man

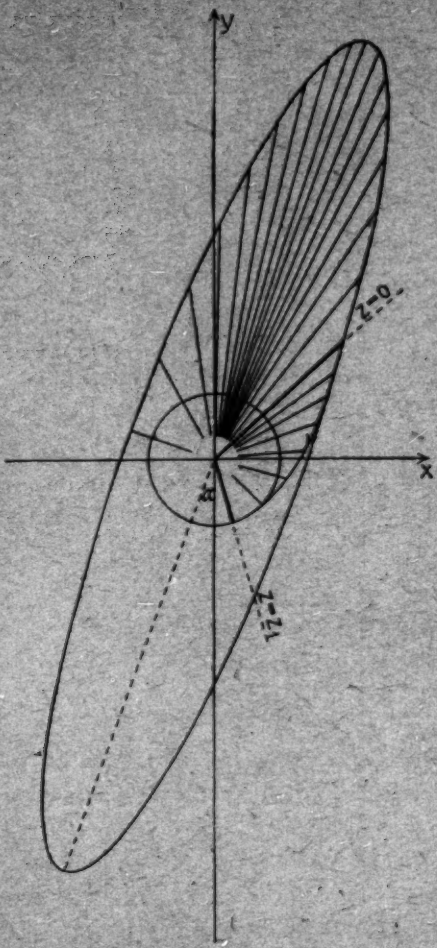
$$a = E \cdot e^{-iz} \mp R e^{+iz}, \tag{45}$$

wo das obere Zeichen für die elektrische, das untere für die magnetische Kraft gilt, so wird

$$\psi' = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_0}}{\lambda} \cdot \frac{E^2 - |R|^2}{|a|^2}, \tag{46}$$

1) Experimentell lassen sich die bei der partiellen Reflexion auftretenden verwaschenen Knoten und Bäuche besonders leicht durch Drahtwellenversuche nachweisen. Vgl. J. v. Geitler, Wied. Ann. **49**. S. 184. 1893; J. Wallot, Ann. d. Phys. **30**. S. 517. 1909.

d. h. die „Flächengeschwindigkeit“ $|\mathfrak{a}|^2 \psi'$ bleibt während des Umlaufs konstant. Die abbildenden Punkte laufen also rasch durch die Knoten, langsam durch die Bäuche.



Abstand benachbarter Radienvektoren: Medium I: $\lambda/36$, Medium II: $\lambda/100$.
Fig. 3.

25. Auch das Feld im Medium II kann nach der Gleichung

$$(47)\quad \left\{ \begin{array}{r} A_1 H^{(1)} + A_2 H^{(2)} = (A_2 \\ - A_1) H^{(2)} + 2 A_1 J \end{array} \right.$$

in eine fortschreitende und eine stehende Welle zerlegt werden. Knoten und Bäuche sind aber nicht zu beobachten; denn entweder sind die stehenden Wellen nur schwach, oder die Übergangsschicht ist so dünn, daß auf sie nur ein Bruchteil einer Wellenlänge fällt.

Da nach unseren Grundgleichungen an den Grenzflächen nicht nur die Funktionen F und φ, sondern auch ihre Differentialquotienten $\dot{F}$ und $\dot{\varphi}$ stetig sein müssen, gehen die Ellipsen des Mediums I durch das Medium II hindurch stetig und ohne Knicke in die Kreisbahnen des Mediums III über.

Die Winkelgeschwindigkeiten ψ', mit denen die Bahnen des Mediums II durchlaufen werden, sind aus den Gleichungen (17) zu berechnen. Mit der Abkürzung:

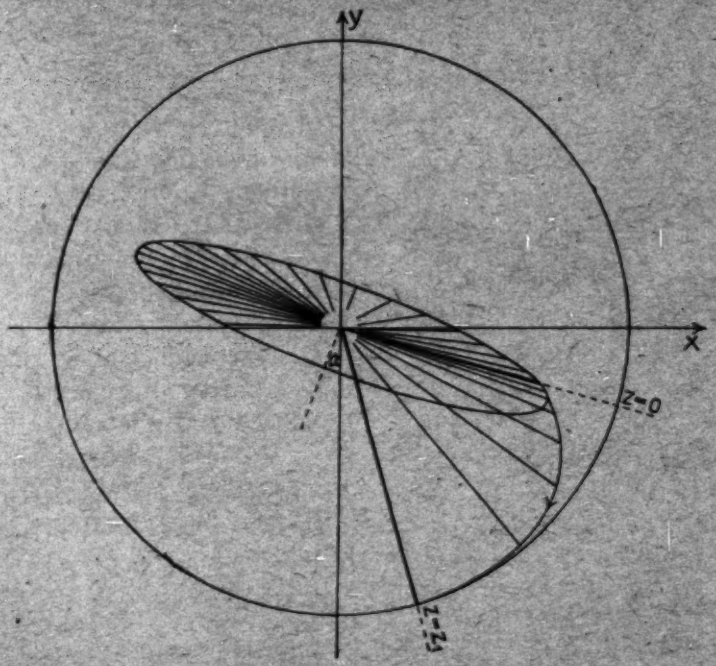
$$(48)\qquad \mathfrak{A}_p = A_1 H_p^{(1)}(n\vartheta) + A_2 H_p^{(2)}(n\vartheta)$$

findet man

$$(49)\qquad \psi' = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \cdot \frac{2}{\pi n \vartheta} \cdot \frac{|A_2|^2 - |A_1|^2}{|\mathfrak{A}_p|^2}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist also auch hier für das elektrische $(p = q - 1)$ und das magnetische $(p = q)$ Feld verschieden.[1])

26. In den Figg. 3 u. 4 ist der Verlauf der elektrischen und der magnetischen Feldstärken in den drei Medien unter den Voraussetzungen des Zahlenbeispiels dargestellt.[2])



Abstand benachbarter Radienvektoren:
Medium I: $\lambda/36$, Medium II: $\lambda/100$.
Fig. 4.

Die Bilder zeigen, daß der Durchgang der Strahlung durch die Schicht veränderlicher D.K. ein ganz stetiger Vorgang ist. Die Ellipsen im Medium I, in denen sich die Relexion ausdrückt, sind sozusagen die Folge der Zu- oder Ab-

1) Aus (49) folgt, daß für die elektrische Kraft die „Flächengeschwindigkeit" auch im Medium II konstant ist. Dies ist die geometrische Deutung der von Schlick abgeleiteten Gleichung (58) (a. a. O. S. 42). Für die magnetische Kraft gilt nichts Ähnliches, wie schon ein Blick auf Fig. 4 lehrt.

2) Fig. 3 ist doppelt so groß gezeichnet wie Fig. 4.

nahme der Amplituden in der Übergangsschicht und der Grenzbedingungen. Unsere Diagramme machen anschaulich, daß die Amplituden nur bei großen Schichtdicken, also sehr langsamer Änderung der D.K., vor und hinter der Schicht auf Kreisbahnen laufen können, die durch eine enge, vielgewundene Spirale miteinander verbunden sind.

Bei sprunghafter Änderung der D.K. gehen die Ellipsen unmittelbar in die Kreisbahnen über. Der Radiusvektor der Grenzfläche fällt dann notwendig mit einer der Ellipsenachsen zusammen (Fig. 5).

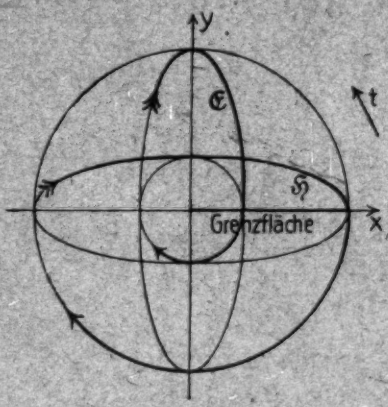


Fig. 5.

In dem Falle des Zahlenbeispiels liegen die Knoten und Bäuche im Medium I nach (42) und der Tabelle in Nr. 15 an denselben Stellen, wie wenn sich die D.K. an der Stelle $z = 0{,}801\ z_1$ sprunghaft änderte.

27. *Gruppengeschwindigkeiten.* Die mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\bar{v}$ läßt sich nach (26) auch für das resultierende Feld, also für die aus den durchgehenden und reflektierten Wellen zusammengesetzten Wellengruppen leicht berechnen. Man erhält:

für das Medium I:

$$(50)\quad \begin{cases} \bar{v}_{\text{el.}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cdot \dfrac{E^2 - |R|^2}{E^2 + |R|^2 + 2E|R|\cos 2(\chi + \alpha)}, \\ \bar{v}_{\text{magn.}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \cdot \dfrac{E^2 - |R|^2}{E^2 + |R|^2 - 2E|R|\cos 2(\chi + \alpha)}; \end{cases}$$

für das Medium II [vgl. die Abkürzung (48)]:

$$(51)\quad \begin{cases} \bar{v}_{\text{el.}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \dfrac{2}{\pi n \vartheta} \cdot \dfrac{|A_2|^2 - |A_1|^2}{|\mathfrak{A}_q|^2}, \\ \bar{v}_{\text{magn.}} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \dfrac{2}{\pi n \vartheta} \cdot \dfrac{|A_2|^2 - |A_1|^2}{|\mathfrak{A}_{q-1}|^2}. \end{cases}$$

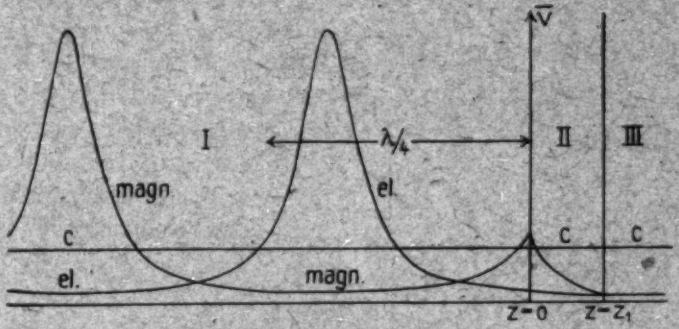
Die kinematisch definierte Gruppengeschwindigkeit ist demnach in beiden Medien, also auch in dem homogenen Medium I, von der Koordinate z abhängig. Fig. 6 zeigt ihren Gang für den Fall des Zahlenbeispiels. Wie man sieht, hat

auch die Gruppengeschwindigkeit (ähnlich wie $1/\psi'$) in den Bäuchen der stehenden Schwingungen spitze Maxima.

Auf den Zusammenhang zwischen der Gruppengeschwindigkeit und der Geschwindigkeit der Energie werde ich in Nr. 31 eingehen.

28. Die *mittlere Strahlung* des resultierenden elektromagnetischen Feldes muß sich, wie schon in der Einleitung betont, für alle Schichtdicken als räumlich konstant ergeben.

In der Tat, multipliziert man nach den Gleichungen (18), (17) und (19) die reellen Teile der Feldstärken $\mathfrak{E}$ mit den reellen Teilen der Feldstärken $\mathfrak{H}$ und mit $c/4\pi$ und bildet



Gruppengeschwindigkeiten.

Fig. 6.

man die Mittelwerte für eine Periode, so erhält man für die mittleren Strahlungen:

$$(52)\qquad \begin{cases} \overline{S}_{\mathrm{I}} = \dfrac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_0}\,(E^2 - |R|^2) \\ \overline{S}_{\mathrm{II}} = \dfrac{c}{8\pi}\dfrac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\pi n \vartheta_0}(|A_2|^2 - |A_1|^2) \\ \overline{S}_{\mathrm{III}} = \dfrac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}\,|D|^2. \end{cases}$$

$\overline{S}$ ist also in allen drei Medien konstant, wie es sein muß.

In dem Falle des Zahlenbeispiels ist

$$|R|^2 = 0{,}4482\,E^2; \quad |D|^2 = 0{,}0613\,E^2;$$
$$|A_1|^2 = 0{,}0030\,E^2; \quad |A_2|^2 = 0{,}1763\,E^2.$$

$$\sqrt{\varepsilon_0}\,(E^2 - |R|^2) = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\pi n \vartheta_0}(|A_2|^2 - |A_1|^2) = \sqrt{\varepsilon_1}\,|D|^2 = 0{,}5518\,E^2.$$

29. Für die *mittlere Energiedichte* findet man nach der Definition

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon\overline{\mathfrak{E}^2} + \overline{\mathfrak{H}^2})$$

und unter Beachtung der Beziehungen

$$(53) \qquad \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{2-2q} = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}, \qquad \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{2q} = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

leicht die Werte:

$$(54) \qquad \begin{cases} \bar{\varrho}_{\mathrm{I}} = \frac{1}{8\pi}\varepsilon_0(E^2 + |R|^2) \\ \bar{\varrho}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}{2}\frac{\vartheta}{\vartheta_0}(|\mathfrak{A}_{q-1}|^2 + |\mathfrak{A}_q|^2) \\ \bar{\varrho}_{\mathrm{III}} = \frac{1}{8\pi}\varepsilon_1|D|^2. \end{cases}$$

30. Die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie* endlich ergibt sich nach (29) zu

$$(55) \qquad \begin{cases} V_{\mathrm{I}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\cdot\frac{E^2 - |R|^2}{E^2 + |R|^2} \\ V_{\mathrm{II}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{4}{\pi n\vartheta}\cdot\frac{|A_0|^2 - |A_1|^2}{|\mathfrak{A}_{q-1}|^2 + |\mathfrak{A}_q|^2} \\ V_{\mathrm{III}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1}}. \end{cases}$$

Für große $n|\vartheta|$ wird natürlich nach (37) auch V überall gleich $c/\sqrt{\varepsilon}$.

Der Verlauf der Geschwindigkeit V ist für den Fall des Zahlenbeispiels in Fig. 2 eingetragen.

31. *Zusammenhang zwischen Gruppen- und Energiegeschwindigkeit.* Ein Vergleich der Formeln (55) mit den Formeln (50) und (51) zeigt, daß die energetischen Geschwindigkeiten V in den drei Medien als Mittelwerte der kinematischen Gruppengeschwindigkeiten aufgefaßt werden dürfen.

Besonders leicht läßt sich dies für das Medium I nachweisen. Definieren wir nämlich einen räumlichen Mittelwert $\bar{v}$ der Gruppengeschwindigkeit durch die Bedingung, daß eine mit $\bar{v}$ wandernde Welle in derselben Zeit um eine Wellenlänge fortschreiten soll wie unsere Wellengruppe, also durch die Bedingung

$$\frac{\lambda}{\bar{v}\sqrt{\varepsilon_0}} = \int_0^{\lambda} \frac{dx}{v}, \tag{56}$$

so erhalten wir für $\bar{v}$ offenbar nach (50) nichts anderes als die Geschwindigkeit V_I [Gleichung (55)].

Für das Medium II läßt sich die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ nicht berechnen, weil die Übergangsschicht im allgemeinen kürzer ist als eine Wellenlänge. Wohl aber geht aus einem Vergleich der Gleichungen (50), (51) und (55) hervor, daß wir die energetisch definierte Geschwindigkeit in allen drei Medien aus der kinematisch definierten Gruppengeschwindigkeit nach der Gleichung

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_{el.}} + \frac{1}{v_{magn.}}\right) \tag{57}$$

berechnen können. Auch hier ist also die Auffassung des elektromagnetischen Feldes als einer untrennbaren Einheit der dualistischen Auffassung überlegen.[1])

32. *Zerlegung der Energiegrößen.* Wir fragen noch, ob man auch bei den Energiegrößen von einem durchgehenden und einem reflektierten Bestandteil sprechen kann. In den homogenen Medien I und III zweifellos. Von jeher hat man z. B. für das Medium I die einfallenden Größen durch

$$\bar{S}_e = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_0}\,E^2; \quad \bar{\varrho}_e = \frac{\varepsilon_0}{8\pi}E^2; \quad V_e = +\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \tag{58}$$

die reflektierten durch

$$\bar{S}_r = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_0}\,|R|^2; \quad \bar{\varrho}_r = \frac{\varepsilon_0}{8\pi}|R|^2; \quad V_r = -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \tag{59}$$

definiert. Die resultierende Geschwindigkeit muß dann nach (55) natürlich als Mittelwert aus V_e und V_r unter Berücksichtigung der verschiedenen „Gewichte" der Teilgeschwindigkeiten berechnet werden.

In der Übergangsschicht dagegen liegen die Verhältnisse nicht so einfach. Daß man die Teilenergiegrößen nicht einfach aus den Teilfeldstärken berechnen kann, liegt auf der Hand. Die *nachträgliche* Zerlegung der resultierenden Größen (z. B. von $\bar{S}_{II}$) ist aber immer auf unzählig viele Weisen möglich. Daß wir uns beim Medium I so bedenkenlos für die durch

1) Dementsprechend ist auch nur die Geschwindigkeit V beständig kleiner als c.

(58) und (59) ausgedrückte Möglichkeit entschieden haben, liegt daran, daß bei verschwindendem oder kleinem Gradienten der D.K. die in entgegengesetzten Richtungen fortschreitenden Strahlungen voneinander völlig unabhängig sind.[1]) Wollten wir aber entsprechend für die Übergangsschicht z. B. die beiden Glieder der zweiten Gleichung (52) als die Teilstrahlungen deuten, so würden diese an den beiden Grenzflächen springen, was jedenfalls viel unwahrscheinlicher wäre als irgendein stetiger — selbstverständlich mit (52) verträglicher — Übergang der Teilstrahlungen von den Werten (58) und (59) zu den Werten $\overline{\delta}_m$ und Null.

33. *Phasendifferenzen zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke.* Wir können uns noch in anderer Weise davon überzeugen, daß sich in der Übergangsschicht unendlich kleine reflektierte Mengen zu endlichen Beträgen addieren. Zu diesem Zwecke wollen wir in unseren Diagrammen den Verlauf der elektrischen und der magnetischen Feldstärke rückwärts vom Medium III über das Medium II nach dem Medium I hin verfolgen. Ist zunächst $|a|\lambda$ sehr klein, ändert sich also die D.K. nur langsam, so beobachtet man, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ beständig miteinander in Phase sind. Denn die Winkelgeschwindigkeit ψ' ist für kleine $|a|\lambda$ nach (11), (38) und (28) überall für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gleich groß. Bei größerem $|a|\lambda$, z. B. bei dem $|a|\lambda$ unseres Zahlenbeispiels, ist dagegen ψ' nach (49) für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verschieden groß (vgl. Figg. 3 u. 4); zwischen der zweiten und ersten Grenzfläche entwickelt sich daher zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ allmählich eine Phasendifferenz, die im Falle des Zahlenbeispiels an der ersten Grenzfläche den beträchtlichen Wert von $57^1/_2{}^0$ erreicht. Auch im Medium I liegen, wie die Gleichungen (45) und (46) und die Figg. 3 u. 4 zeigen, die zu gleichen Koordinaten z gehörenden abbildenden Punkte nur in den Knoten und Bäuchen der stehenden Schwingungen auf denselben Radienvektoren; im allgemeinen bestehen also auch hier Phasendifferenzen zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Bei unendlich dünner Schicht ist die Phasendifferenz zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ an der Grenzfläche zwar zunächst gleich Null; sie nimmt aber im Medium I mit abnehmendem z sofort stark zu, da ψ' nach Nr. 24 an der Grenzfläche für die elektrische Kraft ein Maximum, für die magnetische ein Minimum hat.

1) Vgl. R. Gans, a. a. O. S. 714.

Eine Phasendifferenz zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ (bei Leitungen mit veränderlicher Charakteristik: zwischen Strom und Spannung) bedeutet nun aber, daß die Strahlung (oder die Leistung), während der einzelnen Perioden ihr Vorzeichen wechselt, also zeitweise „reflektierte Strahlung" ist; oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die Strahlung zusammengesetzt ist aus einem stehenden Bestandteil, der beständig zwischen den Knoten und Bäuchen hin- und herpendelt, und aus einem fortschreitenden Bestandteil, der schließlich bei der zeitlichen Mittelbildung allein übrig bleibt. Das allmähliche Anwachsen der Phasendifferenz zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der Übergangsschicht ist daher eine Bestätigung der Auffassung, daß die Reflexion allmählich im Inneren der Schicht zustandekommt. Zugleich ist nun leichter zu verstehen, weshalb die Ortsabhängigkeit von ψ' und im Zusammenhang damit auch die von v für die elektrische und die magnetische Kraft verschieden ist.[1])

Sehr dünne Übergangsschicht.

34. Zum Nachweis, daß unsere Gleichungen (20) bis (24) bei unendlich dünner Übergangsschicht auf die Fresnelschen Formeln führen, gehen wir aus von der allgemeinen Beziehung[2]):

$$(60) \qquad H_p^{-}(2\xi) = \frac{\pm i}{\sin p\pi}\left[e^{\mp p\pi i} J_p(2\xi) - J_{-p}(2\xi)\right],$$

in der die oberen Zeichen für die Funktion $H^{(1)}$, die unteren für die Funktion $H^{(2)}$ gelten sollen.

Bei sehr dünner Übergangsschicht werden die Argumente $2\xi = n\vartheta$ unserer Zylinderfunktionen nach (10) und (11) sehr klein; wir können daher den Grenzwert für die Besselsche Funktion J_p[3])

$$(61) \qquad \lim_{\xi = 0} J_p(2\xi) = \frac{\xi^p}{\Gamma(p+1)},$$

benutzen. (Γ bedeutet die Gammafunktion.) Setzt man den Näherungswert (61) in (60) ein, so erhält man für unsere

---

1) Eine geringe Phasendifferenz zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ hat Gans (a. a. O. S. 714) auch schon für kleine Gradienten bekommen.

2) J. u. E. S. 95.

3) J. u. E. S. 90.

beiden Ordnungen $p = q$ und $p = q - 1$ die folgenden Ausdrücke[1]):

$$(62)\qquad \begin{cases} H_q(2\xi) = \pm i\{a_{\frac{1}{2}}\,\xi^q - c\,\xi^{-q}\} \\ H_{q-1}(2\xi) = \mp i\{b_{\frac{1}{2}}\,\xi^{q-1} - b\,\xi^{1-q}\}, \end{cases}$$

wo

$$(63)\qquad \begin{cases} a_{\frac{1}{2}} = \dfrac{e^{\mp q\pi i}}{\sin q\pi\,\Gamma(q+1)}, & c = \dfrac{1}{\sin q\pi\,\Gamma(1-q)} \\ b_{\frac{1}{2}} = \dfrac{e^{\mp(q-1)\pi i}}{\sin(1-q)\pi\,\Gamma(q)}, & b = \dfrac{1}{\sin(1-q)\pi\,\Gamma(2-q)} \end{cases}$$

gesetzt ist.

35. Die Näherungswerte (62) sind nun zunächst in unsere Gleichungen (23) und (24) einzusetzen. Ich deute den Gang der etwas umständlichen Rechnung nur für den Nenner $P_2 P_3 - P_1 P_4$ etwas genauer an. Beim Einsetzen der Werte heben sich zunächst von 32 Gliedern 12 Glieder weg. Ordnet man den Rest nach Potenzen der kleinen Größen ξ_0 und ξ_1, so erkennt man, daß 8 Glieder als klein von höherer Ordnung weggelassen werden können. In den übrigen 12 Gliedern treten die Kombinationen

$$(64)\qquad \begin{cases} (b_1 - b_2)\,c\,, \quad (a_2 - a_1)\,c \text{ und } (b_1 - b_2)\,b \\ \text{auf, für die nach bekannten Formeln}^2) \text{ der Reihe nach} \\ \text{die Werte} \\ \qquad \dfrac{2i}{\pi} \qquad \dfrac{2i}{q\pi} \qquad \text{und} \qquad \dfrac{2i}{(1-q)\pi} \end{cases}$$

gesetzt werden können. So erhält man schließlich mit den Abkürzungen

$$(65)\qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{\xi_1}{\xi_0} = \dfrac{\vartheta_1}{\vartheta_0} \\ \nu = \sqrt{\dfrac{e_1}{e_0}} = \beta^{2q-1} \end{cases}$$

$$(66)\quad P_2 P_3 - P_1 P_4 = \frac{2\sqrt{e_0}}{\pi\,\xi_0}(\nu+1)\left\{1 + i\cdot\frac{\xi_0}{\nu+1}\left[\frac{\beta\nu-1}{q} + \frac{\beta-\nu}{1-q}\right]\right\}.$$

---

1) Da q und $q - 1$ bei positivem m zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+1$ liegen, können die Gleichungen (62) nicht weiter vereinfacht werden. Auch ist zu beachten, daß später *Differenzen* zu berechnen sind.

2) J. u. E. S. 26.

36. Versucht man nun die Ausdrücke A_i oder auch $A_i H^{(0)}$ für sich zu berechnen, so bekommt man sehr unübersichtliche Ausdrücke. Einfach wird das Ergebnis auch hier nur, wenn man sofort statt der Teilfelder das resultierende Feld im Innern des Mediums II berechnet. Man erhält dann in ähnlicher Weise wie in Nr. 35 für die Feldstärken

$$(67)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = e^{\mathrm{int}} \cdot \dfrac{2E}{\nu+1}\left\{1 + i\xi_0\left[\nu(1+az) - \dfrac{1}{\nu+1}\left(\dfrac{\beta\nu-1}{q} - \dfrac{\nu(\beta+1)}{1-q}\right)\right]\right\} \\ \mathfrak{H} = e^{\mathrm{int}} \cdot \dfrac{2E\sqrt{\varepsilon_1}}{\nu+1}\left\{1 + i\xi_0\left[\dfrac{(1+az)^{\frac{q}{1-q}}}{\nu} + \dfrac{1}{\nu+1}\left(\dfrac{\beta+1}{q} - \dfrac{\beta-\nu}{1-q}\right)\right]\right\} \end{cases}$$

und für R [nach (20)]:

$$68)\qquad R = E \cdot \frac{\nu-1}{\nu+1}\left\{1 + i \cdot \frac{2\xi_0}{\nu^3-1}\left[\frac{\beta\nu-1}{q} - \frac{\nu(\beta-\nu)}{1-q}\right]\right\}.$$

Hier bedeutet

$$(69)\qquad \xi_0 = \frac{n\vartheta_0}{2} = \frac{2\pi(1-q)\sqrt{\varepsilon_0}}{a\lambda}$$

oder im Falle der Gleichung (2):

$$(70)\qquad \xi_0 = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_0}}{a\lambda};$$

ν ist der Brechungsexponent des Mediums III, bezogen auf das Medium I, β ist die durch (65) definierte Potenz von ν.

37. Unsere Formeln (20) bis (24) geben daher für unendlich kleine Schichtdicken (unendlich großes Produkt $|a|\lambda$) genau dasselbe Resultat wie die Fresnelschen Formeln.

Die Korrektionsglieder der Gleichungen (67) und (68) sind, wie nach Fig. 5 zu erwarten, rein imaginär. Auch bei kleiner, aber nicht verschwindender Schichtdicke kann demnach die reflektierte Lichtmenge bis auf kleine Größen höherer Ordnung nach der Fresnelschen Formel berechnet werden.

Die Endlichkeit der Schichtdicke hat nur die Folge, daß die verwaschenen Knoten und Bäuche vor der Schicht ein wenig verschoben sind, und zwar nach (42) um den Betrag

$$(71)\qquad \delta = \frac{(1-q)z_1}{(\nu^{2/m}-1)(\nu^3-1)}\left[\frac{\nu(\beta-\nu)}{1-q} - \frac{\beta\nu-1}{q}\right]$$

in der Richtung der wachsenden z. Für $m=1$ (linearen Anstieg der D.K.) ergibt sich $\delta = z_1/2$, wie es sein muß. Ändert sich die D.K. nach dem exponentiellen Gesetz (2), so ist $q=1$, $m=\infty$, $\beta=\nu$, und die Verschiebung wird:

$$\delta = z_1 \left[\frac{\nu^2}{\nu^2 - 1} - \frac{1}{2 \lg \nu} \right]. \tag{72}$$

(Für $\varepsilon_1 = 81$, $\varepsilon_0 = 1$ wird $\delta = 0{,}785\, z_1$, während wir in Nr. 26 für $\alpha\lambda = 62{,}8$ den Wert $0{,}801\, z_1$ gefunden hatten.)

38. In Widerspruch mit diesen Resultaten ergibt sich aus den Entwicklungen des Herrn Emden[1]) die Beziehung

$$\frac{E - R}{E + R} = \xi_0^{2q-1} \cdot \frac{\pi}{\Gamma^2(q)}, \tag{73}$$

aus welcher, wenn sie richtig wäre, die Folgerung gezogen werden müßte, daß das Licht beim Auftreffen auf eine Schicht mit sehr rasch veränderlicher D.K. stärker reflektiert würde als beim unstetigen Auftreffen auf eine Schicht *anderer* D.K. Dieses offenbar unmögliche Resultat rührt im wesentlichen davon her, daß Herr Emden die Konstante A_1 von vornherein gleich Null setzt, also die rückwärtslaufende Teilwelle vernachlässigt.

Um diese scheinbar in sich widerspruchsvolle Behauptung zu begründen, gehe ich kurz auf die Frage ein, was aus den nach entgegengesetzten Richtungen fortschreitenden Teilwellen im Medium II wird, wenn die Dicke der Übergangsschicht immer mehr abnimmt. Ich beschränke mich dabei auf den Fall der Gleichung (2)[2]):

$$\begin{cases} H_{q-1}(2\xi) = H_0(2\xi) = 1 \pm \frac{2i}{\pi} \lg \gamma\xi \\ H_q \quad (2\xi) = H_1(2\xi) = \xi \mp \frac{i}{\pi\xi}. \end{cases} \tag{74}$$

(Die oberen Zeichen gelten wieder für $H^{(1)}$, die unteren für $H^{(2)}$.)

Setzt man diese Näherungswerte in die Gleichungen (22) bis (24) und (17) ein, so erhält man bei Vernachlässigung kleiner Größen in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$\begin{cases} \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 \\ \mathfrak{E}_2^1 = \frac{E e^{\mathrm{int}}}{\nu + 1} \left\{ 1 \pm \frac{2i}{\pi} \lg \gamma\xi \right\} \\ \mathfrak{H}_2^1 = \frac{E\sqrt{\varepsilon_1}\, e^{\mathrm{int}}}{\nu + 1} \left\{ 1 \mp \left(\frac{1}{\pi\beta\xi_0} + \frac{2i}{\pi} \lg \beta\gamma\xi_0 \right) \right\}. \end{cases} \tag{75}$$

1) A. a. O. S. 429.
2) J. u. E. S. 90, 94, 95.

Die Amplituden der Teilwellen werden also bei unendlich abnehmender Schichtdicke für sich unendlich groß[1]), während ihre Summe mit den Fresnelschen Werten zusammenfällt. Setzt man, wie es Herr Emden tut, die imaginären Teile willkürlich gleich Null, so ergibt sich bei Vernachlässigung der Teilwelle 1 aus den Grenzbedingungen

$$\frac{E-R}{E+R} = \xi_0 \pi,$$

in Übereinstimmung mit (73). Herr Emden bekommt demnach tatsächlich gerade deshalb vollständige Reflexion, weil er die reflektierte Teilwelle vernachlässigt und weil die durchgehende magnetische Teilwelle zufällig stärker unendlich wird als die durchgehende elektrische Teilwelle.

39. Wir fragen zum Schlusse noch, wie dick die Übergangsschicht zwischen zwei Medien höchstens ist, wenn die Fresnelschen Formeln mit einer Genauigkeit von beispielsweise 1% richtige Werte geben. Da in unseren Gleichungen die kleinen Größen zweiter Ordnung weggelassen sind, können wir nur die *Größenordnung* der Schichtdicke z_1 angeben. Das Korrektionsglied der reflektierten Amplitude R in Gleichung (68) nimmt für $m = 1$ (linearen Anstieg) nach (11) und (65) den einfachen und von ν unabhängigen Wert $2\pi i \sqrt{\varepsilon_0}\, z_1/\lambda$ an. Ist also $\varepsilon_0 = 1$ und die Übergangsschicht dicker als rund $^1/_{100}\,\lambda$, so kann im allgemeinen nicht mehr erwartet werden, daß die Fresnelschen Formeln mit einer Genauigkeit von 1% gelten. Damit steht in Übereinstimmung, daß nach unserem Zahlenbeispiel in Nr. 15 bei einer Schichtdicke von nur $^7/_{100}\,\lambda$ und exponentiellem Anstieg der D.K. von $\varepsilon_0 = 1$ bis zu $\varepsilon_1 = 81$ die reflektierte Amplitude $(0{,}6695\,E)$ schon um rund 16% geringer ist als nach der Fresnelschen Formel $(0{,}8\,E)$.

Zusammenfassung.

40. Eine elektromagnetische Welle erleidet beim Durchgang durch ein Medium, dessen Dielektrizitätskonstante in der Fortpflanzungsrichtung nach den Gesetzen (1) oder (2) variiert, im allgemeinen eine partielle Reflexion. Die

1) Man hätte dies auch unmittelbar aus dem bekannten Verhalten der Hankelschen Funktionen schließen können.

Schwächung der Welle wird jedoch erst merklich, wenn die Dicke der Übergangsschicht vergleichbar wird mit der Wellenlänge; sie nimmt mit weiter abnehmender Schichtdicke stetig zu bis zu dem durch die Fresnelschen Formeln gegebenen Maximalwert.

Clausthal im Harz, Physik. Institut der Bergakademie, Juni 1919.

(Eingegangen 14. Juli 1919.)

Druckfehlerberichtigung

zu der Arbeit: „Über die Änderung der Thermokraft und der elektrischen Leitfähigkeit einer Kalium-Natriumlegierung beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand" von K. Siebel.

Es muß heißen: Seite 266 in der Überschrift zu Tabelle I + 37,9° C. statt − 37,9° C.; Seite 268 Zeile 10 v. o. + 18° statt − 18° und Zeile 16 v. u. + 6,5° statt − 6,5°; Seite 271 Zeile 6 v. u. + 20° statt − 20°.

Namenregister zum Jahrgang 1919.

A.

Abraham, O., Zur Akustik des Knalles 60, 55.

Ambronn, R., Über die elektrische Leitfähigkeit von Natron-Kalk-Silikatgläsern 58, 189.

Arkadiew, W., Über die Absorption elektromagnetischer Wellen an zwei parallelen Drähten 58, 105.

B.

Bär, R., Über eine Methode zur Bestimmung der Dichte von mikroskopischen und ultramikroskopischen Partikeln; ein Beitrag zur Frage nach der Existenz des Elektrons 59, 393.

Baerwald, H., Über die von langsamen positiven Strahlen ausgelösten Elektronen 60, 1.

Banneitz, Fr., Messung der Dielektrizitätskonstanten von Mischkörpern mit Hilfe einer Resonanzmethode für Kapazitätsmessungen 59, 289.

Beck, E., Zum experimentellen Nachweis der Ampèreschen Molekularströme 60, 109.

Becker, A., Über die Bestimmung von Elektronenaustrittsgeschwindigkeiten 58, 393. — Vergleich der lichtelektrischen und thermischen Elekronenemmission 60, 30.

Benedict, E. und Senftleben, H., Über die Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen leuchtender Flammen 60, 297.

Bennewitz, K., Über den Verdampfungsvorgang 59, 193.

Berek, M., Über den senkrechten Durchgang linear polarisierter ebener Wellen durch planparallele Platten durchsichtiger inaktiver Kristalle 58, 165.

Borelius, G., Zur Elektronentheorie des Magnetismus und des Halleffektes 58, 489. — Über Thermokräfte in einem chemisch homogenen Leiterkreise; Bearbeitungs- und Oberflächenerscheinungen 60, 381.

Bräuer, E., Die kathodischen Vorgänge im Bogenstrome 60, 95.

Brose, E., Stärke des elektrischen Feldes und Zerlegung der Wasserstofflinien vor der Kathode des Glimmstroms 58, 731.

C.

Christiansen, C., Elektrizitätserregung beim Zerspritzen von

Flüssigkeiten (Balloelektrizität) 59, 95, 280.

D.

Dällenbach, W., Die allgemein kovarianten Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes im Innern ponderabler Materie vom Standpunkt der Elektronentheorie 58, 523. — Hamiltonsches Prinzip der elektromagnetischen Grundgleichungen im Innern ponderabler Materie 59, 28.

Dieterle, R., Magnetische Messungen an Eisen–Vanadium-Legierungen mit Hilfe eines hochempfindlichen astatischen Torsionsmagnetometers 59, 343.

E.

Ehrenhaft, E. und Konstantinowsky, D., Bemerkung zum Nachtrage der R. Bärschen Arbeit: „Über die atomistische Struktur der Elektrizität" 58, 199.

Eötvös, R., Experimenteller Nachweis der Schwereänderung, die ein auf normal geformter Erdoberfläche in östlicher oder westlicher Richtung bewegter Körper durch diese Bewegung erleidet 59, 743.

Epstein, P. S., Theoretisches über den Starkeffekt in der Fowlerschen Heliumserie 58, 553.

F.

Fellinger, R., Über die Dielektrizitätskonstante einiger natürlicher und synthetischer Edelsteine (mit einem Anhang über Bernstein) 60, 181.

Försterling, K., Quantentheorie und Adiabatenhypothese 60, 673.

Fürth, R., Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen. I 59, 409. — Zur Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung an einem Einzelteilchen. II 60, 77.

G.

Grüneisen, E., Die thermische Ausdehnung regulär kristallisierender fester Körper. (Zweite Mitteilung) 58, 753.

Gumlich, E., Über die Abhängigkeit des Temperaturkoeffizienten permanenter Magnete von deren Gestalt 59, 668.

H.

Hahnemann, W. und Hecht, H., Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons 60, 454.

Hardtke, O. und Stark, J., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. IX. Vergleich von Dupletserien 58, 712.

Hecht, H. und Hahnemann, W., Der mechanisch-akustische Aufbau eines Telephons 60, 454.

Herzfeld, K. E., Zur Theorie der Reaktionsgeschwindigkeiten in Gasen 59, 635.

Heuse, W., Die spezifische Wärme von Argon und einigen mehratomigen Gasen 59, 86.

Himstedt, F., Über die absolute elektrooptische Verzögerung und Beschleunigung bei der elektri-

schen Doppelbrechung. (Zweite Mitteilung) 59, 332.

Hirsch, R. v., Über das Leuchten der H-Kanalstrahlen 59, 189.

Hölzel, A., Luftelektrisches Potentialgefälle und Gewittervorhersage 60, 521.

Hoffmann, Fr. und Meißner, W., Über die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold- und Palladiumschmelzpunkt 60, 201.

Holborn, L., Über die Abhängigkeit des Widerstandes reiner Metalle von der Temperatur 59, 145.

Holtsmark, J., Über die Verbreiterung von Spektrallinien 58, 577.

Hopf, L., Zur Theorie der Turbulenz 59, 588.

Huch, G., Versuch einer Theorie des Kanalstrahlenlichtes. (Zweite Abhandlung) 58, 201.

Humm, R. J., Über die Energiegleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie 58, 474.

J.

Jaeger, W. und Steinwehr, H. v., Über den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents 58, 487.

Joachim, H., Über die Messung der Dielektrizitätskonstante in der Wheatstoneschen Brücke bei Anwendung hoher Frequenzen 60, 570.

K.

Kafka, H., Zur vierdimensionalen Tensoranalysis 58, 1.

Konstantinowsky, D. und Ehrenhaft, E., Bemerkung zum Nachtrage der R. Bärschen Arbeit: Über die atomistische Struktur der Elektrizität 58, 199.

Krüger, F., Zur Hydrodynamik der Hiebtöne 60, 279.

Krüger, F. und Schmidtke, E., Theorie der Spalttöne. (Hierzu Tafel II) 60, 701.

L.

Laue, M. v., Unter welchen Bedingungen kann man von einem Elektronengas reden? 58, 695. — Über die Wirkungsweise der Verstärkerröhren 59, 465.

Lehmann, O., Über die Beziehungen zwischen mechanischer und chemischer Verdrehung der Struktur flüssiger Kristalle 58, 631.

Lenard, P., Über Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger. III: Wanderungsgeschwindigkeit kraftgetriebener Partikel in reibenden Medien mit Beiträgen von W. Weick und Hans Ferd. Mayer 60, 329.

M.

March, A., Zur Thermodynamik der Kapillarität 58, 515.

Meissner, K. W., Zur Kenntnis des Neonspektrums 58, 333.

Meissner, W. und Hoffmann-Fr., Über die relative Helligkeit schwarzer Strahlung beim Gold, und Palladiumschmelzpunkt 60, 201.

Meyer, E., Über die Beeinflussung des Funkenpotentials durch

ein transversales Magnetfeld 58, 297.

P.

Paschen, F., Das Spektrum des Neon 60, 405.

Pommerrenig, E. und Seeliger, R., Über die Lichtemission im Kathodendunkelraum und im Glimmlichtsaum 59, 589.

Q.

Quincke, G., Elektrische Zerstäubung von geschmolzenem Siegellack 58, 549.

R.

Reiche, F., Zur Quantentheorie der Rotationswärme des Wasserstoffs 58, 657.

Riegger, H., Über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Gasen 59, 753.

Ritter, M., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes, die Druckverschiebung und die Verbreiterung von Serienlinien 59, 170.

Rumpf, E., Über die Polarisation in der Geisslerentladung 59, 1.

S.

Schachenmeier, R., Kristallgitter, deren Atome durch Gravitationsfelder in stabilen Gleichgewichtslagen gehalten werden 60, 548.

Schaefer, Cl. und Schubert, M., Die Rolle des Kristallwassers und die Struktur der Alaune. (Antwort an Hrn. L. Vegard) 59, 583.

Scheuermann, R., Über die Gestalt und die Auflösung des fallenden Flüssigkeitsstrahles 60, 233.

Schirmann, M. A., Dispersion und Polychroïsmus des polarisierten Lichtes, das von Einzelteilchen von der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes abgebeugt wird 59, 493.

Schmidtke, E., Zur Hydrodynamik der Schneidentöne. (Hierzu Tafel III) 60, 715.

Schmidtke, E. und Krüger, F., Theorie der Spalttöne. (Hierzu Tafel II) 60, 701.

Schreiber, E., Über elektrometrische Untersuchungen 59, 425.

Schubert, M. u. Schaefer, Cl., Die Rolle des Kristallwassers und die Struktur der Alaune. (Antwort an Hrn. L. Vegard) 59, 583.

Schulze, A., Dampfspannungen von Benzol-Toluol-Mischungen in Abhängigkeit von der Temperatur 59, 73.

Sedström, E., Peltierwärme samt thermischer und elektrischer Leitfähigkeit einiger festen metallischen Lösungen 59, 134.

Seeliger, R., Die Anregungsfunktion einer Spektrallinie 59, 613.

Seeliger, R. und Pommerrenig, E., Über die Lichtemission im Kathodendunkelraum und im Glimmlichtsaum 59, 589.

Seemann, H., Eine fokussierende röntgenspektroskopische Anordnung für Kristallpulver 59, 455.

Senftleben, H. und Benedict, E., Über die Beugung des Lichtes an den Kohlenstoffteilchen leuchtender Flammen 60, 297.

Siebel, K., Über die Änderung der Thermokraft und der elektrischen Leitfähigkeit einer Kalium-Natriumlegierung beim Übergang vom festen in den flüssigen Aggregatzustand 60, 260.

Siegbahn, M., Röntgenspektroskopische Präzisionsmessungen. (Erste Mitteilung) 59, 56.

Sommer, J., Über die lineare Differentialgleichung für gekoppelte elektrische Schwingungen und die Wurzeln der Gleichung vierten Grades 59, 375.

Stark, J., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. X. Zusammenhang der Serien eines Systems 58, 723. — Der spektrale Nachweis elektrischer Felder an der Oberfläche chemischer Atome 60, 196.

Stark, J. und Hardtke, O., Beobachtungen über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien. IX. Vergleich von Dupletserien 58, 712.

Steinwehr, H. v. und Jaeger, W., Über den Wert des mechanischen Wärmeäquivalents 58, 487.

Stern, O. und Volmer, M., Sind die Abweichungen der Atomgewichte von der Ganzzahligkeit durch Isotopie erklärbar? 59, 225.

Steubing, W., Spektrale Intensitätsverschiebung und Schwächung der Jodfluoreszenz durch ein magnetisches Feld 58, 55.

Stuchtey, K., Untersonnen und Lichtsäulen an Sonne und Mond 59, 33.

Szarvassi, A., Über einen für die Quantentheorie wichtigen Satz der analytischen Mechanik 60, 501.

T.

Tank, F., Über Serienspektren nach dem Bohrschen Modell 59, 293.

V.

Vegard, L., Die Kristallstruktur der Alaune und die Rolle des Kristallwassers. Bemerkungen zu den Äußerungen des Hrn. C. Schaefer und Frl. Martha Schubert 58, 291.

Voigt, W., Strukturtheorie und Kohäsionserscheinungen 60, 638.

Volmer, M. und Stern, O., Sind die Abweichungen der Atomgewichte von der Ganzzahligkeit durch Isotopie erklärbar? 59, 225.

W.

Wallot, J., Der senkrechte Durchgang elektromagnetischer Wellen durch eine Schicht räumlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante 60, 734.

Weber, R. H., Über Gay-Lussac- und Boyle-Temperaturen 60, 291.

Weyl, H., Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie 59, 101. — Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen 59, 185. — Ausbreitung

elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter **60**, 481.

Weyssenhoff, J., Über die Reflexion von Quecksilbermolekülen an Gold bei tiefen Temperaturen **58**, 505.

Wien, W., Über Messungen der Leuchtdauer der Atome und der Dämpfung der Spektrallinien. I. (Hierzu Tafel I) **60**, 597.

Wiener, O., Ein allgemeiner Satz über die Schutzwirkung von Schirmen gegen Wärmeübertragung **60**, 324.

Wigand, A., Die vertikale Verteilung der Kondensationskerne in der freien Atmosphäre **59**, 689.

Wolff, H. Th., Atomkern und α-Strahlung **60**, 685.

Würschmidt, J., Elementare Theorie der terrestrischen Refraktion und der atmosphärischen Spiegelungen **60**, 149.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig

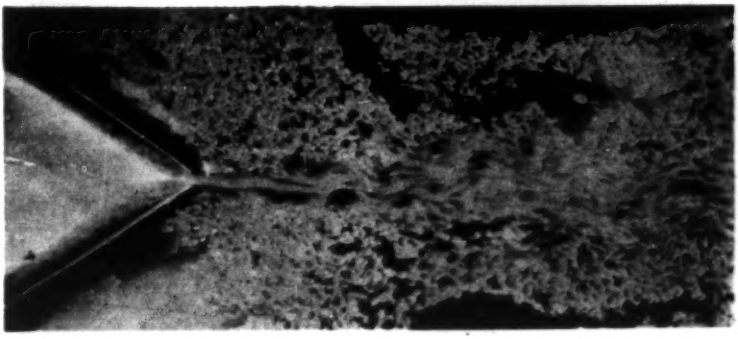


Fig. 4.

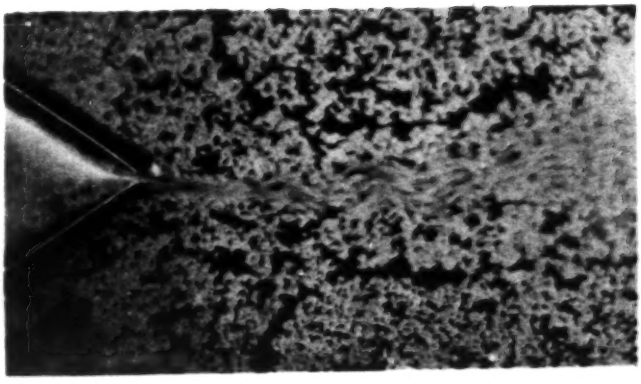


Fig. 5.

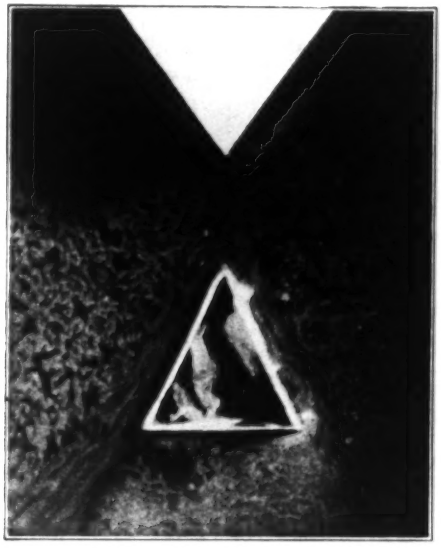


Fig. 5.

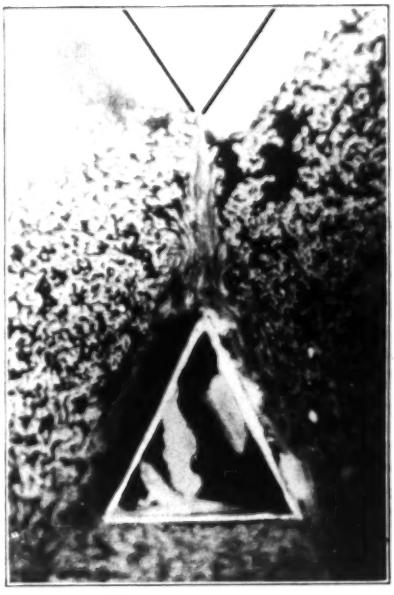


Fig. 6.

Fig. 7.